Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti Lincei
# Matematica e Applicazioni

Arturo Natali

## Considerazioni sul comportamento meccanico di materiali biologici con riguardo alla trattazione delle proprietà di anisotropia

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9*, Vol. **3** (1992), n.4, p. 307–313.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1992_9_3_4_307_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1992.

*Rend. Mat. Acc. Lincei*
*s. 9, v. 3:307-313 (1992)*

**Meccanica dei continui.** — *Considerazioni sul comportamento meccanico di materiali biologici con riguardo alla trattazione delle proprietà di anisotropia.* Nota di Arturo Natali, presentata (*) dal Socio E. Giangreco.

Abstract. — *Considerations on mechanical behaviour of biological materials with regard to the treatment of anisotropic properties.* The partitioning of strain energy into volumetric and deviatoric components, performed on isotropic materials, becomes unfeasible when anisotropy is present, because of terms that contain coupled volumetric and deviatoric components. This fact annuls the usefulness of such partitioning within the energetic approach to analysis of the mechanical behaviour of biological materials, due to their characteristic anisotropic properties. The adoption of a global energy parameter applicable to anisotropic materials encounters the difficulty of defining the strength criterion. Exacting experimental tests are necessary in order to obtain this knowledge and moreover, for some biological materials, experimentation is not yet carried out. However, computational mechanics can offer a valid approach to the solution of this problem.

Key words: Biological materials; Biomechanics; Anisotropy; Computational mechanics.

Riassunto. — La partizione dell'energia di deformazione nelle componenti deviatoriche e volumetriche, realizzata per materiali isotropi, diviene impraticabile in caso di anisotropia, a causa della presenza di termini di accoppiamento di componenti deviatoriche e volumetriche. Questo rende inutilizzabile la succitata partizione nell'approccio energetico all'analisi di materiali biologici, che presentano un caratteristico comportamento anisotropo. L'eventuale adozione del parametro energia globale con riferimento al materiale anisotropo pone il problema della corretta definizione del criterio di resistenza, per la qualcosa risulta necessario il contributo di prove sperimentali molto impegnative e persino, in alcuni casi, non disponibili allo stato attuale delle conoscenze. Un approccio secondo la meccanica computazionale offre una soluzione al problema posto.

Nell'analisi del comportamento di materiali isotropi è frequente l'impiego della scissione funzionale del campo di tensioni in idrostatico e deviatorico ed inoltre volumetrico e deviatorico per quanto attiene a quello delle deformazioni, con il noto significato fisico dei termini.

Le espressioni delle componenti di tensione e deformazione possono per conseguenza essere scritte nella forma seguente:

$$T_{ij} = T^d_{ij} + (\operatorname{tr} T/3)\,\delta_{ij} \qquad D_{ij} = D^d_{ij} + (\operatorname{tr} D/3)\,\delta_{ij} \tag{1}$$

indicando con $T_{ij}$ e $D_{ij}$ i tensori delle tensioni e delle deformazioni, con $T^d_{ij}$ e $D^d_{ij}$ le componenti deviatoriche, le tracce con $\operatorname{tr} T$ e $\operatorname{tr} D$ e con $\delta_{ij}$ i simboli di posizione. La ripartizione viene estesa alle relazioni tra tensioni e deformazioni ed alla espressione dell'energia di deformazione. La legge di Hooke generalizzata può infatti essere scritta nella forma:

$$T_{ij} = \lambda\,\delta_{ij} \operatorname{tr} D + 2\mu\, D_{ij} \tag{2}$$

(*) Nella seduta del 12 giugno 1992.

essendo $\lambda$ e $\mu$ le costanti di Lamé. È possibile la scrittura, secondo lo sdoppiamento citato, nelle due seguenti equazioni:

$$T_{ij}^d = 2\mu D_{ij}^d \qquad \mathrm{tr}\, T = (3\lambda + 2\mu)\,\mathrm{tr}\, D \tag{3}$$

esprimendo separatamente le relazioni tra le componenti deviatoriche delle tensioni e delle deformazioni ed inoltre tra le componenti idrostatiche di tensione e volumetriche di deformazione. Per quanto attiene all'energia di deformazione si avrà la seguente espressione:

$$2E = \mathrm{tr}\,(TD) = T_{ij} D_{ij} \tag{4}$$

indicando appunto con $E$ l'energia di deformazione. Analogamente è possibile scrivere:

$$E = E_d + E_v \tag{5}$$

$$2E_d = \mathrm{tr}\,(T^d D^d) = 2\mu\, \mathrm{tr}\, D^{d2} \qquad 2E_v = ((\mathrm{tr}\, T)/3)\,\mathrm{tr}\, D = ((3\lambda + 2\mu)/3)\,\mathrm{tr}\, D^2 \tag{6}$$

indicando con $E_d$ la componente deviatorica, prodotto delle componenti di tensione e deformazione deviatoriche e con $E_v$ la componente volumetrica dovuta alla tensione idrostatica ed alla deformazione di dilatazione.

Dette considerazioni, proprie dei materiali isotropi o a simmetria cubica, se riportate nell'ambito dei materiali biologici devono essere riviste alla luce delle caratteristiche proprietà di anisotropia [1-6] che sono loro proprie. L'espressione della legge di Hooke in forma generale si esprime nella forma:

$$T_{ij} = C_{ijkm} D_{km} \tag{7}$$

indicando con $C_{ijkm}$ i coefficienti del tensore dell'elasticità.

Individuando le componenti deviatoriche e idrostatiche, è possibile proporre la (7) mediante le espressioni seguenti:

$$T_{ij}^d = C_{ijkm}^d D_{km}^d + (C_{ij}^d\ \mathrm{tr}\, D)/3 \qquad \mathrm{tr}\, T = \mathrm{tr}\, C^d D^d + (\mathrm{tr}\, C\, \mathrm{tr}\, D)/3 \tag{8}$$

indicando con $C^d$ i termini che definiscono la componente deviatorica e con $C$ quella volumetrica.

La comparazione del risultato offerto dalle equazioni (3) con le (8) permette di constatare che la componente deviatorica delle tensioni risulta legata alla deformazione per dilatazione oltre che alla deformazione deviatorica. Inoltre, la tensione idrostatica è legata sia alla deformazione deviatorica che volumetrica.

Risulta pertanto, senza soffermarsi oltre sugli sviluppi della formulazione, che l'espressione dell'energia dovrà certamente presentare un terzo termine di accoppiamento tra la componente idrostatica e quella deviatorica, secondo l'espressione:

$$E = E_d + E_v + E_a\,. \tag{9}$$

Pertanto, con particolare riguardo all'approccio numerico che si riferisce a formulazioni energetiche, risulta necessario valutare il termine di accoppiamento succitato, rendendo non più realizzabile lo sdoppiamento così validamente fruibile per i materiali isotropi.

I materiali biologici ricadono direttamente in questo ambito di problemi, in ragione delle caratteristiche proprietà di anisotropia. Appare opportuno citare in proposito l'osso corticale [5, 6, 7].

Lo studio del comportamento meccanico del disco intervertebrale, realizzato secondo modelli iperelastici capaci di rappresentare adeguatamente l'incomprimibilità che caratterizza il materiale costitutivo [8, 9, 10], fruirebbe con profitto delle succitate partizioni dei termini dell'energia come sopraindicato, qualora il materiale non dovesse soffrire dell'anisotropia dovuta alla presenza delle fibre collagene.

Rimarrà valida l'assunzione del parametro energia globale di deformazione che, anche nel caso di materiali anisotropi, esprime in modo certo l'accoppiamento dei termini di tensione e deformazione attraverso coefficienti di anisotropia.

È necessario peraltro riscontrare le difficoltà che comunque intervengono. Infatti, i materiali biologici richiedono una particolare assunzione dei criteri di resistenza da adottare [5, 6, 11], vista la improponibilità di criteri di usuale impiego come ad esempio quello di von Mises [12], data la sua formulazione relativa a materiali isotropi, slegata dalle componenti idrostatiche e connessa al solo potenziale di distorsione.

A tale proposito appare utile ricordare la formulazione proposta da Tsai e Wu [13, 14] capace di garantire la rispondenza per materiali anisotropi, spesso ricondotta a configurazioni di anisotropia ortogonale o più semplicemente trasversale, e che appare comprendere ovviamente il criterio precedente come caso particolare. In generale, la formulazione del criterio può essere posta nella forma seguente:

$$f(T_{ij}) = 1 \tag{10}$$

essendo la funzione suddetta, nell'ambito dei materiali per i quali si assuma un comportamento isotropo in termini di deformazione, definita mediante i termini di tensione attraverso i suoi invarianti. L'espressione precedente, nell'ambito dei materiali anisotropi, con particolare riferimento alla frequente assunzione di ortotropia, può essere scritta nella forma:

$$f(T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{12}^2, T_{13}^2, T_{23}^2, \det T) = 1 \tag{11}$$

indicando con i termini ad indici eguali le tensioni normali, con termini misti le tensioni tangenziali e con $T$ il tensore delle tensioni.

La funzione suddetta viene stimata per approssimazione attraverso una sua espansione polinomiale nelle componenti di tensione, che appare essere di buona rispondenza già con l'adozione del secondo termine. In particolare, nel caso di assumere ancora un comportamento ortotropo, si otterrà:

$$\begin{aligned} T_{11}/k_{11} + T_{22}/k_{22} + T_{33}/k_{33} + T_{11}^2/h_{11}^2 + T_{22}^2/h_{22}^2 + T_{33}^2/h_{33}^2 + \\ + T_{12}^2/h_{12}^2 + T_{13}^2/h_{13}^2 + T_{23}^2/h_{23}^2 + 2r_{12}T_{11}T_{22} + 2r_{13}T_{11}T_{33} + 2r_{23}T_{22}T_{33} = 1 \end{aligned} \tag{12}$$

essendo $k_{ij}$ ed $h_{ij}$ costanti valutate in base alla risposta meccanica del materiale, debitamente considerando il diverso comportamento per sollecitazioni normali positive e negative ed $r_{ij}$ i coefficienti di interazione.

La formulazione proposta implica la necessità di stimare i coefficienti dell'espressione, la qual cosa si realizza mediante prove sperimentali, che permettono di valutare in particolare i coefficienti di interazione mediante prove biassiali [13, 14]. Questo aspetto, della necessaria presenza cioè della fase sperimentale, appare di fondamentale rilievo in ragione delle particolari difficoltà operative spesso riscontrate. I dati ottenuti dall'attività sperimentale, intesa a definire proprietà meccaniche di materiali biologici, danno luogo ad un'ampia distribuzione, la quale determina considerevoli difficoltà interpretative. Con riguardo ad alcuni materiali, inoltre, le prove stesse non sono addirittura disponibili.

Una possibile soluzione a problemi di questo genere viene offerta dalla meccanica computazionale. Un esempio è dato dai modelli numerici che descrivono il comportamento di materiali anisotropi attraverso la formulazione mediante elementi finiti, comunque a comportamento isotropo per materiale, ma disposti in modo da rendere l'insieme del modello non isotropo per geometria d'insieme. A tale proposito si cita lo studio di un materiale anisotropo fibrorinforzato, con distribuzione delle fibre in modo variabile in piani successivi, per il quale risulta possibile proporre un modello con accoppiamento di elementi tridimensionali descriventi il materiale di base e di elementi monodimensionali che rappresentino le fibre. Nell'ambito dei materiali biologici questo è ancora il caso del disco intervertebrale, costituito da sostanza base, rinforzata da fibre di collagene nell'anello di contenimento [8, 9]. Questa citazione viene proposta per indicare un problema reale affrontato dall'autore, che rientra direttamente nella discussione e che non troverebbe alternativa di soluzione in ragione della carenza di dati sperimentali a riguardo delle caratteristiche del materiale nella sua configurazione composta anisotropa. Verrebbero a mancare infatti i coefficienti sperimentali dianzi citati, necessari alla definizione del criterio di resistenza, non disponibili allo stato attuale della ricerca. Il problema viene quindi affrontato studiando separatamente i materiali componenti in ragione delle proprietà meccaniche definite per gli stessi e della loro forma di accoppiamento per cui non si determinano problemi in termini di congruenza. In particolare, per quanto attiene al materiale di base costituente il disco intervertebrale viene impiegato un modello iperelastico, capace di interpretare adeguatamente il comportamento non lineare per geometria e le caratteristiche di incomprimibilità. A tale proposito è possibile richiamarsi alla partizione dei termini dell'energia, come dianzi specificato, con ragguardevole vantaggio funzionale. Per quanto attiene all'anello di contenimento deve essere valutato il contributo delle fibre collagene, il cui comportamento meccanico è stato oggetto di approfondite ricerche [15-18]. Precedenti studi avevano presentato il modello di calcolo del disco intervertebrale attraverso formulazioni che interpretavano in modi diversi l'incomprimibilità del materiale, richiedendo peraltro assunzioni a priori sull'intensità della pressione intradiscale e considerando ancora la variazione della pressione stessa come termine necessario a definire la degenerazione della risposta meccanica del disco. Il modello iperelastico assunto è capace di rappresentare il comportamento del tessuto di base nello stato integro secondo le caratteristiche di incomprimibilità ed inoltre le successive fasi di degenerazione mediante i parametri che definiscono la variazione delle proprietà del materiale, senza assunzioni a priori di variabili esterne. Tale degenerazione infatti viene indotta da una perdita della componente liquida del tessuto con conseguenze dirette sulla incomprimibilità del materiale. È quindi possibile, mediante questa formulazione, interpretare compiutamente e senza interposizione di parametri esterni il comportamento del materiale base del disco, al quale vengono accoppiate con opportuna distribuzione anisotropa, nell'anello di contenimento, le fibre collagene. Risulta necessario ricordare che alla caratteristica invarianza del volume totale viene peraltro ad associarsi una significativa variazione in termini di forma tale da implicare valori finiti nel campo degli spostamenti, imponendo una caratterizzazione non lineare per geometria del problema. Nella realizzazione dell'approccio numerico, un aspetto determinante è costituito dal fatto che nella soluzione in termini di spostamenti insorgono difficoltà nel calcolo per le modeste variazioni di volume indotte anche da valori rilevanti del campo delle pressioni in atto, la qualcosa è appunto fonte di indeterminazione. L'espressione dell'energia interna per il materiale nello stato di quasi-incomprimibilità viene scritta, qualora si possa prescindere dagli effetti sul materiale indotti dal campo di temperatura presente, nella forma indicata:

$$E = \int_V (E(I_1, I_2, W_r) - m(W - W_r))\, dV \tag{13}$$

dove si sono indicati con $E$ l'energia di deformazione, con $I_1$ e $I_2$ l'invariante primo e secondo della deformazione, con $m$ il moltiplicatore di Lagrange, con $W_r$ la variabile dipendente dalla componente volumetrica della deformazione e con $W$ il volume totale. La variazione dell'energia interna potrà essere espressa nella forma:

$$\delta E_i = \int_V (W T^d \delta\varepsilon^d + (\partial E/\partial W_r + m)\,\delta W_r - Wm\,\delta\varepsilon^v - (W - W_r)\,\partial m)\, dV \tag{14}$$

indicando con $T^d$ il deviatore delle tensioni, con $\varepsilon^d$, $\varepsilon^v$ le componenti deviatorica e volumetrica delle deformazioni. La condizione da imporre consiste nell'ottenere un valore nullo della differenza $(W - W_r)$ mediante appunto il moltiplicatore $m$, la qual cosa si realizza nell'ambito dell'integrazione sul singolo elemento considerato, adottando una distribuzione lineare o dell'ordine prefissato in dipendenza della formulazione dell'elemento stesso. Nell'accezione specifica il valore del moltiplicatore è definibile come derivata parziale del valore dell'energia rispetto alla variabile associata alla componente volumetrica della deformazione $W_r$. Questa formulazione può essere adottata per ogni condizione di comprimibilità parziale, mentre nel caso di materiale incomprimibile l'energia di deformazione dipenderà dai soli invarianti primo e secondo della deformazione. Per conseguenza si otterrà:

$$E = \int_V (E(I_1, I_2) - m(W - 1))\, dV \tag{15}$$

dove il moltiplicatore avrà la funzione di imporre la condizione dell'annullarsi della differenza $(W - 1)$ indicata. Il problema così formulato impone la risoluzione di un sistema di equazioni non lineari per la risoluzione del quale si rimanda a [8, 9].

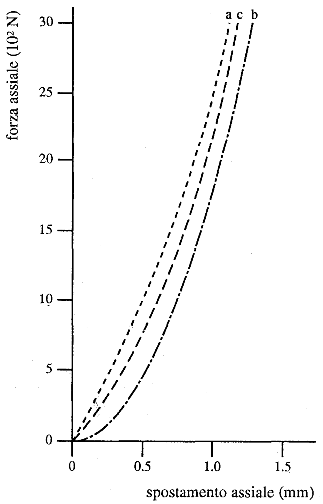


Fig. 1. – Spostamento assiale dovuto a sollecitazione assiale di compressione del giunto intervertebrale. Curva *a*, Brown *et al.* [19]; curva *b*, Markoff e Morris [20]; curva *c*, risultati del modello proposto.

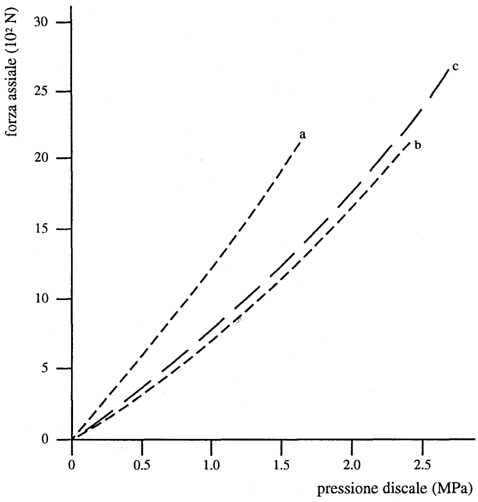


Fig. 2. – Pressione discale dovuto a sollecitazione assiale di compressione del giunto intervertebrale. Curve *a*, *b*, Nachemson [21] quali valori minimo e massimo; curva *c*, risulti del modello proposto.

L'esperienza effettuata in proposito dall'autore ha permesso di conseguire validi risultati, come si deduce dalla comparazione degli stessi con prove sperimentali meccaniche di compressione semplice su segmenti intervertebrali, secondo quanto riportato nelle figg. 1 e 2.

Vengono riportati i risultati ottenuti nel calcolo dello spostamento assiale medio della vertebra a livello del piatto vertebrale sotto carico di compressione assiale (fig. 1) in comparazione con i dati sperimentali di differenti autori [19, 20]. Inoltre sono presentati i risultati ottenuti a riguardo della pressione nel disco intervertebrale (fig. 2) ancora a confronto con risultati sperimentali [21]. Il tipo di carico considerato e i parametri impiegati per la comparazione sono scelti in ragione della disponibilità in letteratura di dati sperimentali a riguardo. Viene a confermarsi la validità dell'approccio proposto che permette quindi di superare le citate difficoltà e di pervenire ad una analisi completa del materiale biologico anisotropo.

## Bibliografia


[1] C. S. Desai - H. J. Siriwardane, *Constitutive laws for engineering materials.* Prentice Hall, 1984.

[2] R. F. S. Hearmon, *An introduction to anisotropic elasticity.* Oxford University Press, 1961.

[3] S. G. Lekhnitskii, *Theory of elasticity of an anisotropic body.* Holden-Day, 1963.

[4] S. C. Cowin, *Deviatoric and hydrostatic mode interaction in hard and soft tissues.* J. Biomechanics, vol. 23, n. 1, 1990, 11-14.

[5] S. C. Cowin, *On the strength anisotropy of bone and wood.* J. Applied Mechanics, vol. 46, n. 4, Dec. 1979, 832-838.
[6] A. N. Natali - E. A. Meroi, *A review of the biomechanical properties of bone as a material.* J. Biomed. Eng., vol. 11, July 1989, 266-276.
[7] S. C. Cowin - M. M. Mehrabadi, *Identification of the elastic simmetry of bone and other materials.* J. Biomechanics, vol. 22, 1989, 503-515.
[8] A. N. Natali - E. A. Meroi, *Non linear analysis of intervertebral disc under dynamic load.* J. Biomech. Eng., ASME, vol. 112, Aug. 1990, 358-363.
[9] A. N. Natali, *Hyperelastic and almost incompressible material model as an approach to intervertebral disk analysis.* J. Biomed. Eng., vol. 13, March 1991, 163-169.
[10] A. Shirazi-Adl - S. C. Shrivastava, *Large deformation finite element treatment of changes in volume of fluid filled cavities enclosed in a structure.* Computers & Structures, vol. 34, n. 2, 1990, 225-230.
[11] D. T. Reilly - A. H. Burstein, *The elasticity and ultimate properties of bone tissue.* J. Biomechanics, vol. 8, 1975, 393-405.
[12] R. von Mises, *Mechanic der Plastichen Formandering von Kristallen.* Z. Angenew. Math. Mech., vol. 8, 1928, 161-185.
[13] S. W. Tsai - E. W. Wu, *A general theory of strength of anisotropic materials.* J. Composite Materials, vol. 5, 1971, 58-80.
[14] E. W. Wu, *Optimal experimental measurements of anisotropic failure tensors.* J. Composite Materials, vol. 6, 1972, 472-489.
[15] L. C. Haut - R. W. Little, *A constitutive equation for collagen fibers.* J. Biomechanics, vol. 5, 1972, 423-430.
[16] L. C. Haut, *Age dependent influence of strain rate on the tensile failure of rat-tail tendon.* J. Biomech. Eng., vol. 105, 1983, 296-299.
[17] R. Sanjeevi, *A viscoelastic model of the mechanical properties of biological materials.* J. Biomechanics, vol. 15, 1982, 107-109.
[18] R. Sanjeevi - N. Somanathan - D. Ramaswamy, *A viscoelastic model for collagen fibers.* J. Biomechanics, vol. 15, 1982, 182-183.
[19] I. Brown - R. J. Hansen - A. J. Yorra, *Some mechanical tests on lumbosacral spine with particular reference to the intervertebral disc.* J. Bone Joint Surg., vol. 39A, 1957, 1135-1164.
[20] K. L. Markoff - J. M. Morris, *The structural components of intervertebral disc – a study of their contribution to the ability of the disc to withstand compressive forces.* J. Bone Joint Surg., vol. 4-5, 1974, 675-687.
[21] A. Nachemson, *Lumbar intradiscal pressure.* Acta Ortop. Scand. (suppl.), vol. 43, 1960, 1-104.

Università degli Studi di Padova
Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni
Via F. Marzolo, 9 - 35131 Padova