Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Luca Pratelli

Sur la convergence en moyenne pour des vecteurs aléatoires intégrables au sens de Bochner

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **3** (1992), n.4, p. 299–306.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1992_9_3_4_299_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1992.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 3:299-306 (1992)

Calcolo delle probabilità. — *Sur la convergence en moyenne pour des vecteurs aléatoires intégrables au sens de Bochner.* Nota di Luca Pratelli, presentata (*) dal Corrisp. G. Letta.

Abstract. — *On strong convergence in L^1 for a sequence of Bochner integrable random vectors.* The problem of finding simple additional conditions, for a weakly convergent sequence in L^1, which would suffice to imply strong convergence has been widely studied in recent years. In this *Note* we study this problem for Banach valued random vectors, by replacing weak convergence with a less restrictive assumption. Moreover, all the additional conditions we consider are also *necessary* for strong convergence, and they depend *only* on marginal distributions.

Key words: Strong convergence in L^1; Strict convexity; Uniform integrability; Convergence in distribution; Bochner integrability.

Riassunto. — *Sulla convergenza in media per vettori aleatori integrabili nel senso di Bochner.* Diversi autori hanno studiato negli ultimi anni il problema consistente nel trovare semplici condizioni che, aggiunte alla convergenza debole in L^1, bastino ad implicare la convergenza forte. Nella presente *Nota*, questo problema viene studiato per una successione di vettori aleatori a valori in uno spazio di Banach. La convergenza debole viene sostituita con una condizione ancor meno restrittiva, e le condizioni supplementari imposte (tutte *necessarie* per la convergenza forte) riguardano *soltanto* le leggi dei singoli vettori aleatori in questione.

1. Hypothèses, notations, énoncé du résultat principal

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Étant donné un espace de Banach E, on appelle *vecteur aléatoire* à valeurs dans E toute application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(E, \mathcal{B}(E))$, où $\mathcal{B}(E)$ désigne la tribu borélienne de E. Si X est un vecteur aléatoire à valeurs dans E, on appelle *loi* de X la mesure image $X(P)$, c'est-à-dire la mesure de probabilité μ définie sur $\mathcal{B}(E)$ par la relation $\mu(A) = P\{X \in A\}$. En outre, on désigne par $\|X\|$ la variable aléatoire réelle $\omega \mapsto \|X(\omega)\|$.

On dit qu'une suite (X_n) de vecteurs aléatoires à valeurs dans E converge *en loi* vers le vecteur aléatoire X si la suite des lois des X_n converge étroitement (au sens de [3, Chap. III, n° 54]) vers la loi de X. De façon explicite, cela signifie que l'on a

$$\int f \circ X \, dP = \lim_n \int f \circ X_n \, dP$$

pour toute fonction réelle f continue et bornée sur E.

On suppose maintenant que les vecteurs aléatoires X_n, X sont intégrables au sens de Bochner par rapport à la mesure P (voir [4]), et on se propose d'étudier la convergence en moyenne de (X_n) vers X, c'est-à-dire la convergence de $\left(\int \|X_n - X\| \, dP\right)$ vers 0.

Pour que cette convergence ait lieu, il est évidemment *nécessaire* que la condition suivante soit remplie:

(*) Nella seduta del 12 giugno 1992.

(1.1) *Pour toute fonction réelle f, borélienne bornée sur E, la relation*

$$\lim_n \int (f \circ X)(X_n - X)\, dP = 0 \tag{1.2}$$

est vérifiée au sens de la topologie faible $\sigma(E, E')$.

On remarquera que cette condition concerne le comportement asymptotique de la loi du couple (X_n, X) (considéré comme un vecteur aléatoire à valeurs dans $E \times E$). On peut se demander s'il existe des conditions simples, *ne portant que sur la loi de X et sur la suite des lois des* X_n, à ajouter à la condition (1.1) pour la transformer en la convergence en moyenne de (X_n) vers X.

Une réponse à cette question est fournie par le Théorème suivant, qui constitue le résultat principal du présent article et qui généralise des résultats de [5] relatifs au cas scalaire (c'est-à-dire au cas où E coïncide avec $\boldsymbol{R}$):

(1.3) Théorème. *Étant donnés des vecteurs aléatoires* X_n, X *à valeurs dans E, intégrables au sens de Bochner, supposons que la condition* (1.1) *soit remplie. Les conditions suivantes sont alors équivalentes*:

(*a*) *La suite* (X_n) *converge en moyenne vers X.*

(*b*) *La suite* (X_n) *converge en loi vers X, et la suite* $(\|X_n\|)$ *est uniformément intégrable.*

(*c*) *Pour tout élément x de E, on a*

$$\int \|X - x\|\, dP = \lim_n \int \|X_n - x\|\, dP\,.$$

(1.4) Remarque. On sait (voir [4]) que la loi de tout vecteur aléatoire à valeurs dans E, intégrable au sens de Bochner, est portée par l'adhérence d'une partie dénombrable de E. On ne restreint donc pas la généralité si l'on suppose, comme nous le ferons systématiquement dans la suite, que l'espace E soit *séparable*.

(1.5) Remarque. Étant donnés des vecteurs aléatoires X_n, X à valeurs dans E, intégrables au sens de Bochner, désignons par μ la loi de X, et fixons un ensemble $\mathcal{H}$ de fonctions boréliennes bornées sur E.

Supposons les conditions suivantes remplies:

(α) *Toute fonction borélienne bornée sur E est limite dans* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *d'une suite uniformément bornée d'éléments de* $\mathcal{H}$.

(β) *La suite* $(\|X_n\|)$ *est uniformément intégrable.*

On voit alors aisément que, pour que la condition (1.1) soit remplie, il suffit que la relation (1.2) ait lieu pour tout élément f de $\mathcal{H}$.

En effet, étant donnée une fonction f borélienne bornée sur E, choisissons une suite uniformément bornée (f_k) d'éléments de $\mathcal{H}$, convergeant vers f dans $\mathcal{L}^1(\mu)$. On a alors, pour tout k,

$$\lim_n \int (f_k \circ X)(X_n - X)\, dP = 0\,.$$

Il suffit donc de prouver que la quantité

$$\delta_{n,k} = \left\| \int (f_k \circ X)(X_n - X)\, dP - \int (f \circ X)(X_n - X)\, dP \right\|$$

converge vers 0 (lorsque k tend vers l'infini) *de manière uniforme* par rapport à n.

Or, puisque la suite $(\|X_n - X\|)$ est uniformément intégrable, on peut trouver, pour tout $\varepsilon > 0$, une constante réelle positive c telle que l'on ait, pour tout n,

$$\int_{\{\|X_n - X\| > c\}} \|X_n - X\|\, dP < \varepsilon .$$

On a alors, en désignant par $\|f - f_k\|$ la norme uniforme de $f - f_k$,

$$\delta_{n,k} \leq \varepsilon \|f - f_k\| + c \int_{\{\|X_n - X\| \leq c\}} |f \circ X - f_k \circ X|\, dP \leq \varepsilon \|f - f_k\| + c \int |f - f_k|\, d\mu .$$

L'assertion est donc démontrée.

La même conclusion est valable si l'on remplace les hypothèses (α), (β) par les hypothèses suivantes:

(α') *Toute fonction borélienne bornée sur E est limite uniforme d'une suite d'éléments de* $\mathcal{H}$.

(β') *On a* $\sup_n \int \|X_n\|\, dP < \infty$.

2. Démonstration du résultat principal

Nous démontrerons d'abord le lemme suivant:

(2.1) Lemme. *Avec les mêmes hypothèses que dans* (1.3), *on a*

$$\int (f \circ X)\, \|X\|\, dP \leq \liminf_n \int (f \circ X)\, \|X_n\|\, dP \tag{2.2}$$

pour toute fonction f borélienne bornée positive sur E.

Démonstration. On sait (voir [4]) que la mesure $f(x)\|x\|\mu(dx)$ coïncide avec la variation de la mesure vectorielle $f(x)\, x\, \mu(dx)$. Par conséquent, le premier membre de (2.2) coïncide avec la borne supérieure des sommes de la forme

$$\sum_{i \in I} \left\| \int [(f I_{A_i}) \circ X]\, X\, dP \right\| , \tag{2.3}$$

où $(A_i)_{i \in I}$ parcourt l'ensemble des partitions finies de E constituées d'ensembles boréliens.

Fixons une telle partition $(A_i)_{i \in I}$, et montrons que la somme (2.3) est majorée par le deuxième membre de (2.2).

Pour tout indice i, l'hypothèse (1.1) entraîne l'égalité

$$\int [(f I_{A_i}) \circ X]\, X\, dP = \lim_n \int [(f I_{A_i}) \circ X]\, X_n\, dP ,$$

où la limite est prise au sens de la topologie $\sigma(E, E')$.

On en déduit, par passage aux normes,

$$\left\| \int [(fI_{A_i}) \circ X] \, X \, dP \right\| \leq \liminf_n \left\| \int [(fI_{A_i}) \circ X] \, X_n \, dP \right\| \leq \liminf_n \int [(fI_{A_i}) \circ X] \, \|X_n\| \, dP .$$

Si maintenant on somme ces inégalités, on trouve

$$\sum_{i \in I} \left\| \int [(fI_{A_i}) \circ X] \, X \, dP \right\| \leq \sum_{i \in I} \liminf_n \int [(fI_{A_i}) \circ X] \, \|X_n\| \, dP \leq$$

$$\leq \liminf_n \sum_{i \in I} \int [(fI_{A_i}) \circ X] \, \|X_n\| \, dP \leq \liminf_n \int (f \circ X) \, \|X_n\| \, dP .$$

L'assertion est donc démontrée.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le Théorème (1.3).

L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ est évidente. Pour prouver l'implication $(b) \Rightarrow (c)$, il suffit de remarquer que, si la condition (b) est remplie, alors la suite $(\|X_n - x\|)$ est uniformément intégrable et converge en loi vers $\|X - x\|$.

Prouvons l'implication $(c) \Rightarrow (a)$. Supposons donc la condition (c) remplie. Pour tout élément x de E et tout ensemble borélien A, le lemme précédent (appliqué aux vecteurs aléatoires $X_n - x$, $X - x$ et à la fonction indicatrice de l'ensemble $A - x$) fournit l'inégalité

$$\int (I_A \circ X) \, \|X - x\| \, dP \leq \liminf_n \int (I_A \circ X) \, \|X_n - x\| \, dP . \tag{2.4}$$

En écrivant la même inégalité avec A^c à la place de A, et en utilisant l'hypothèse (c), on trouve l'égalité

$$\int (I_A \circ X) \, \|X - x\| \, dP = \lim_n \int (I_A \circ X) \, \|X_n - x\| \, dP . \tag{2.5}$$

On sait d'autre part que la mesure bornée $\|x\| \mu(dx)$ est tendue (voir [2, Th. 1.4]). Il existe donc, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, un ensemble compact K tel qu'en posant $A_0 = K^c$ on ait

$$\int (I_{A_0} \circ X) \, \|X\| \, dP = \lim_n \int (I_{A_0} \circ X) \, \|X_n\| \, dP \leq \varepsilon ,$$

et par conséquent, grâce à l'inégalité $\|X_n - X\| \leq \|X_n\| + \|X\|$,

$$\limsup_n \int (I_{A_0} \circ X) \, \|X_n - X\| \, dP \leq 2\varepsilon . \tag{2.6}$$

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq m}$ une partition finie de K constituée d'ensembles boréliens de diamètre inférieur à ε. En outre, pour tout indice i compris entre 1 et m, soit x_i un élément de A_i. En majorant $\|X_n - X\|$ par $\|X_n - x_i\| + \|X - x_i\|$, et en utilisant la relation (2.5), on trouve

$$\limsup_n \int (I_{A_i} \circ X) \, \|X_n - X\| \, dP \leq 2 \int (I_{A_i} \circ X) \, \|X - x_i\| \, dP \leq 2\varepsilon \mu(A_i) .$$

Si maintenant on somme ces inégalités (avec $1 \leq i \leq m$), ainsi que l'inégalité (2.6), on trouve

$$\limsup_n \int \|X_n - X\| dP \leq 2\varepsilon\mu(K) + 2\varepsilon \leq 4\varepsilon ,$$

d'où la conclusion.

3. Résultats liés à la convexité stricte

Nous commencerons par démontrer une proposition concernant le cas particulier d'une suite de variables aléatoires réelles positives.

(3.1) Proposition. *Soient X_n, X des variables aléatoires réelles positives intégrables, telles que l'on ait*

$$\int_{\{X \in A\}} X dP \leq \liminf_n \int_{\{X \in A\}} X_n dP \tag{3.2}$$

pour tout ensemble borélien A de $\mathbf{R}$. Alors:

(*a*) *Pour tout nombre réel t et tout ensemble borélien A de $\mathbf{R}$, on a*

$$\int_{\{X \in A\}} (X - t)^+ dP \leq \liminf_n \int_{\{X \in A\}} (X_n - t)^+ dP . \tag{3.3}$$

(*b*) *Pour que la suite (X_n) converge en moyenne vers X, il faut et il suffit qu'il existe un homéomorphisme strictement convexe F de $\mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}_+$ tel que l'on ait*

$$\limsup_n \int F \circ X_n dP \leq \int F \circ X dP < \infty . \tag{3.4}$$

Démonstration. L'assertion (*a*) est immédiate: on a en effet

$$\int_{\{X \in A\}} (X - t)^+ dP = \int_{\{X \in A, X > t\}} (X - t) dP \leq$$

$$\leq \liminf_n \int_{\{X \in A, X > t\}} (X_n - t) dP \leq \liminf_n \int_{\{X \in A\}} (X_n - t)^+ dP .$$

Pour prouver l'assertion (*b*), supposons d'abord que la suite (X_n) converge en moyenne vers X. Elle est alors uniformément intégrable, de sorte qu'il existe (voir [5, Lemme (1.2)]) un homéomorphisme strictement convexe F de $\mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}_+$ tel que la suite $(F \circ X_n)$ soit uniformément intégrable: cette suite converge alors en moyenne vers $F \circ X$, de sorte que la relation (3.4) est remplie.

Réciproquement, supposons qu'il existe un homéomorphisme strictement convexe F de $\mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}_+$ vérifiant (3.4). On peut mettre F sous la forme

$$F(x) = \int \lambda(dt)(x - t)^+ ,$$

avec λ mesure Borel positive sur $\boldsymbol{R}_+$, admettant $\boldsymbol{R}_+$ comme support. On a alors, en vertu de (a),

$$\int F \circ X \, dP = \int \lambda(dt) \int (X - t)^+ \, dP \leq \int \lambda(dt) \liminf_n \int (X_n - t)^+ \, dP \leq$$
$$\leq \liminf_n \int \lambda(dt) \int (X_n - t)^+ \, dP = \liminf_n \int F \circ X_n \, dP \leq \int F \circ X \, dP < \infty \,.$$

Il en résulte que la fonction (positive et lipschitzienne)

$$t \mapsto \liminf_n \int (X_n - t)^+ \, dP - \int (X - t)^+ \, dP$$

est négligeable pour la mesure λ, donc identiquement nulle sur $\boldsymbol{R}_+$. Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que la relation

$$\lim_n \int (X_n - t)^+ \, dP = \int (X - t)^+ \, dP$$

ait lieu pour tout t appartenant à un ensemble dénombrable partout dense dans $\boldsymbol{R}_+$. La même relation est alors vraie pour tout nombre réel t. Par conséquent, la suite (X_n) converge en moyenne vers X (voir [5, (3.2)]).

(3.5) Corollaire. *Avec les mêmes hypothèses que dans* (1.3), *les conditions suivantes sont équivalentes*:

(*a*) *La suite* $(\|X_n\|)$ *converge en moyenne vers* $\|X\|$.

(*b*) *Il existe un homéomorphisme strictement convexe F de $\boldsymbol{R}_+$ sur $\boldsymbol{R}_+$ tel que l'on ait*

$$\limsup_n \int F \circ \|X_n\| \, dP \leq \int F \circ \|X\| \, dP < \infty \,. \tag{3.6}$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que les variables aléatoires réelles positives $\|X_n\|$, $\|X\|$ vérifient, grâce à (2.1), les hypothèses du Lemme précédent.

(3.7) Corollaire. *Avec les mêmes hypothèses que dans* (1.3), *fixons un élément t de* $[0, 1]$, *et posons* $Y_n = tX_n + (1 - t)X$.

Si la suite $(\|X_n\|)$ *converge en moyenne vers* $\|X\|$, *il en est de même de la suite* $(\|Y_n\|)$.

Démonstration. Il est clair que les vecteurs aléatoires Y_n, X vérifient les hypothèses de (1.3). Il suffit donc de remarquer que si un homéomorphisme strictement convexe F de $\boldsymbol{R}_+$ sur $\boldsymbol{R}_+$ vérifie la ralation (3.6), il vérifie *a fortiori* la relation analogue avec Y_n à la place de X_n.

(3.8) Corollaire. *Avec les mêmes hypothèses que dans* (1.3), *supposons en plus que l'espace E soit uniformément convexe, ou, de façon plus générale, qu' il possède la propriété suivante: pour tout élément x de E, et toute suite (x_n) d'éléments de E, les relations*

$$\lim_n \|x_n\| = \|x\| \,, \qquad \lim_n \|(x_n + x)/2\| = \|x\|$$

entraînent $\lim_n \|x_n - x\| = 0$.

Chacune des conditions (a), (b) *de* (3.5) *est alors équivalente à la convergence en moyenne de* (X_n) *vers* X.

DÉMONSTRATION. Supposons que la suite $(\|X_n\|)$ converge en moyenne vers $\|X\|$. Il en est alors de même de la suite $(\|Y_n\|)$, où $Y_n = (X_n + X)/2$ (voir (3.7)). Quitte à passer à des sous-suites, on peut supposer que les deux suites $(\|X_n\|)$, $(\|Y_n\|)$ convergent vers $\|X\|$ *presque partout*. La suite $(\|X_n - X\|)$ converge alors vers 0 presque partout (donc en moyenne), et ceci prouve la convergence en moyenne de (X_n) vers X.

La conclusion du corollaire précédent n'est plus valable si l'on supprime l'hypothèse de convexité uniforme. Supposons en effet qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de E, avec $\|x_n\| = 1$ qui converge faiblement, mais non fortement, vers un élément x de E, avec $\|x\| = 1$. (Une telle suite existe notamment dans le cas où E est l'espace des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$, muni de la norme uniforme). On voit alors que, si l'on pose $X_n(\omega) = x_n$ et $X(\omega) = x$ pour tout ω, les hypothèses de (1.3), ainsi que les conditions (a), (b) de (3.5) sont satisfaites, sans que la suite (X_n) converge en moyenne vers X.

Une autre caractérisation de la convergence en moyenne de (X_n) vers X (valable sans aucune restriction sur l'espace E) est fournie par le théorème suivant:

(3.9) THÉORÈME. *Avec les mêmes hypothèses que dans* (1.3), *désignons par* $\mathcal{F}$ *la classe constituée par les fonctions réelles* F, *définies dans* E, *de la forme*

$$F(y) = \int (\|y - x\| - t)^+ \, d\nu(x, t)\,, \tag{3.10}$$

avec ν *mesure de Borel positive sur* $E \times \boldsymbol{R}_+$ *admettant* $E \times \boldsymbol{R}_+$ *comme support.*

Les conditions suivantes sont alors équivalentes:

(a) *La suite* (X_n) *converge en moyenne vers* X.

(b) *Il existe une fonction* F, *appartenant à la classe* $\mathcal{F}$, *telle que l'on ait*

$$\limsup_n \int F \circ X_n \, dP \leq \int F \circ X \, dP < \infty\,. \tag{3.11}$$

DÉMONSTRATION. $(a) \Rightarrow (b)$: Supposons que la suite (X_n) converge en moyenne vers X. La suite $(\|X_n\|)$ est alors uniformément intégrable. On peut donc construire (voir [5, (1.2)]) un homéomorphisme strictement convexe g de $\boldsymbol{R}_+$ sur $\boldsymbol{R}_+$ de telle manière que la suite $(g \circ \|X_n\|)$ soit uniformément intégrable (et converge donc en moyenne vers $g \circ \|X\|$). Fixons un ensemble dénombrable $\{x_k : k \geq 1\}$ partout dense dans E, et posons $g_k(y) = (1 + g(\|x_k\|))^{-1} g(\|y - x_k\|/2)$. On a alors, pour tout k,

$$g_k(y) \leq g(\|y\|) + 1\,, \qquad \lim_n \int g_k \circ X_n \, dP = \int g_k \circ X \, dP\,.$$

Par conséquent, la fonction $F = \sum_{k \geq 1} 2^{-k} g_k$ appartient à la classe $\mathcal{F}$ et vérifie la relation

$$\lim_n \int F \circ X_n \, dP = \int F \circ X \, dP \leq \int g \circ \|X\| \, dP + 1 < \infty\,.$$

$(b) \Rightarrow (a)$: Soit F une fonction de la classe $\mathcal{F}$ vérifiant la relation (3.11). Représentons F sous la forme (3.10).

Pour tout élément x de E, et tout ensemble borélien A de E, le Lemme (2.1) fournit l'inégalité (2.4). Par conséquent, en appliquant la Proposition (3.1) aux variables aléatoires réelles positives $\|X_n - x\|$, $\|X - x\|$, on trouve, pour tout nombre réel t,

$$\int (\|X - x\| - t)^+ \, dP \leq \liminf_n \int (\|X_n - x\| - t)^+ \, dP .$$

Il en résulte:

$$\int F \circ X dP = \int d\nu(x, t) \int (\|X - x\| - t)^+ \, dP \leq \int d\nu(x, t) \liminf_n \int (\|X_n - x\| - t)^+ \, dP \leq$$
$$\leq \liminf_n \int d\nu(x, t) \int (\|X_n - x\| - t)^+ \, dP \leq \liminf_n \int F \circ X_n \, dP \leq \int F \circ X dP < \infty .$$

Cela montre que la fonction (positive et lipschitzienne)

$$(x, t) \mapsto \liminf_n \int (\|X_n - x\| - t)^+ \, dP - \int (\|X - x\| - t)^+ \, dP$$

est négligeable pour la mesure ν, donc identiquement nulle sur $E \times \boldsymbol{R}_+$. Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que la relation

$$\lim_n \int (\|X_n - x\| - t)^+ \, dP = \int (\|X - x)\| - t)^+ dP$$

soit vraie pour tout élément (x, t) d'un ensemble (dénombrable) partout dense dans $E \times \boldsymbol{R}_+$. Cette même relation est alors vraie pour tout élément (x, t) de $E \times \boldsymbol{R}_+$. En prenant $t = 0$, on voit notamment que la condition (c) du Théorème (1.3) est remplie, de sorte que la suite (X_n) converge en moyenne vers X.

(3.12) Remarque. Si, dans la définition de $\mathcal{F}$, on remplace les mots «admettant $E \times \boldsymbol{R}_+$ comme support» par les mots «admettant $E \times \{0\}$ comme support», le théorème précédent est encore vrai. En revanche, un contre-exemple dû à A. Visintin [8] montre que, même dans le cas où E est un espace de Hilbert, le théorème précédent n'est plus valable si, pour la fonction F, on remplace la condition d'appartenance à la classe $\mathcal{F}$ par la simple condition de positivité et de convexité stricte.

Bibliographie

[1] E. J. Balder, *On weak convergence implying strong convergence in L^1-spaces.* Bull. Austral. Math. Soc., 33, 1986, 363-368.

[2] P. Bilingsley, *Convergence of probability measures.* New York 1968.

[3] C. Dellacherie - P. A. Meyer, *Probabilités et potentiel.* Chap. I-IV, Paris 1975.

[4] J. Diestel - J. Uhl, *Vector measures.* Math. Surveys, 15, AMS, 1978.

[5] L. Pratelli, *Sur une caractérisation de la convergence dans L^1. Application aux quasimartingales.* Sémin. Prob., à paraître.

[6] T. Rzezuchowski, *Impact of dentability on weak convergence in L^1.* Boll. UMI, (7) 6-A, 1992, 71-80.

[7] M. Valadier, *Différents cas où, grâce à une propriété d'extrémalité, une suite de fonctions intégrables faiblement convergente converge fortement.* Exposé n. 5, 1989, Sémin. d'Analyse Convexe, Montpellier.

[8] A. Visintin, *Strong convergence results related to strict convexity.* Comm. Partial Diff. Equations, 9(5), 1984, 439-466.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Pisa
Via Buonarroti, 2 - 56127 Pisa