Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Luigi Ambrosio

Su alcune proprietà delle funzioni convesse

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **3** (1992), n.3, p. 195–202.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1992_9_3_3_195_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1992.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 3:195-202 (1992)

Analisi matematica. — *Su alcune proprietà delle funzioni convesse.* Nota di LUIGI AMBROSIO, presentata (*) dal Socio E. De Giorgi.

ABSTRACT. — *On some properties of convex functions*. In this paper we summarize recent results of a research concerning the singularities (non differentiability points) of convex functions. This research covers various aspects, from the estimate of the Hausdorff dimension of some kinds of singularities to the study of their propagation. We study also semicontinuity and relaxation problems related to the area of the graph of the gradient of a convex function and the existence of weak determinants of the minors of the Hessian matrix.

KEY WORDS: Convex functions; Semicontinuity; Relaxation; Propagation of singularities; Hamilton-Jacobi equations.

RIASSUNTO. — In questo lavoro riassumiamo alcuni risultati di una ricerca riguardante le singolarità (punti di non differenziabilità) delle funzioni convesse. Questa ricerca copre vari aspetti, che vanno dalla stima della dimensione di Hausdorff di certi tipi di singolarità fino allo studio della loro propagazione. Studiamo anche problemi di semicontinuità e rilassamento collegati all'area del grafico del gradiente di una funzione convessa e l'esistenza dei determinanti, in senso debole, dei minori della matrice Hessiana.

INTRODUZIONE

Lo scopo di questo lavoro è quello di esporre i risultati di una ricerca, frutto di una collaborazione con P. Cannarsa, G. Alberti, H. M. Soner, sulle singolarità (punti di non differenziabilità) delle funzioni convesse $u: \Omega \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$. I Teoremi da noi ottenuti e qui esposti restano validi, con varianti minime negli enunciati, per soluzioni semiconcave di equazioni di Hamilton-Jacobi (vedi ad esempio [13]) $H(x, u, \nabla u) = 0$, nel senso della viscosità.

Le singolarità possono essere ripartite in modo naturale in n insiemi $\Sigma^1(u), \dots, \Sigma^n(u)$, a seconda della dimensione del sottodifferenziale $\partial u(x)$ nel punto singolare x. Il principale risultato di [1] è una stima ottimale della massima dimensione di Hausdorff degli insiemi $\Sigma^k(u)$, che risulta essere $(n-k)$.

Un altro oggetto naturale di studio legato alle singolarità è il grafico del sottodifferenziale, definito da $\Gamma(u) = \{(x, p) \in \Omega \times \boldsymbol{R}^n : p \in \partial u(x)\}$. Si dimostra in [3] che l'applicazione $u \to \mathcal{H}^n(\Gamma(u))$ è semicontinua inferiormente, e può essere ottenuta rilassando il funzionale $\mathcal{H}^n(\{(x, p) \in \Omega \times \boldsymbol{R}^n : p = \nabla u(x)\})$, definito sulle funzioni convesse di classe C^2. Inoltre (vedi anche [10]) munendo l'insieme $\Gamma(u)$ di un'opportuna orientazione, è possibile definire in senso debole tutti i determinanti dei minori della matrice Hessiana di u.

Infine, è studiato in [3] il problema della propagazione della singolarità. Anche se la sola convessità non è sufficiente per garantire tale fenomeno, troviamo alcune

(*) Nella seduta del 14 marzo 1992.

condizioni, riguardanti la geometria di $\partial u(x)$ e l'insieme

$$D^* u(x) = \left\{ \lim_{h \to +\infty} \nabla u(x_h) \colon x_h \text{ non singolare}, \ x_h \to x \right\},$$

che implicano fenomeni di propagazione.

Nei prossimi paragrafi supporrò sistematicamente che $u\colon \Omega \to \boldsymbol{R}^n$ sia una funzione convessa, e farò spesso uso della misura di Hausdorff r-dimensionale in $\boldsymbol{R}^m$ (vedi [14, 18]), definita per ogni numero reale $r \in [0, m]$ ed ogni insieme $B \subset \boldsymbol{R}^m$ da

$$\mathcal{H}^r(B) = \frac{[\Gamma(1/2)]^r}{2^r \Gamma(1 + r/2)} \sup_{\delta > 0} \inf \left\{ \sum_{i \in I} \operatorname{diam}^r(B_i) \colon B \subset \bigcup_{i \in I} B_i, \ \operatorname{diam}(B_i) < \delta \right\},$$

ove $\Gamma(r) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{r-1} \, dt$ è la funzione di Eulero.

1. Stime sulle singolarità e determinanti deboli

Dato $x \in \Omega$, il sottodifferenziale di u in x è definito da

$$\partial u(x) = \{ p \in \boldsymbol{R}^n \colon u(y) \geq u(x) + \langle p, y - x \rangle \, \forall y \in \boldsymbol{R}^n \}.$$

È ben noto (vedi [6, 16]) che $\partial u(x)$ è compatto, convesso e non vuoto, e che u è differenziabile in x se e solo se $\partial u(x)$ è un singoletto.

Definizione 1. Per ogni intero $k = 0, 1, \ldots, n$ poniamo $\Sigma^k(u) = \{x \in \Omega\colon \dim(\partial u(x)) = k\}$. Definiamo anche $\Gamma(u) = \{(x, p) \in \Omega \times \boldsymbol{R}^n \colon p \in \partial u(x)\}$.

Per enunciare un risultato sulla dimensione di Hausdorff degli insiemi $\Sigma^k(u)$, diamo prima una definizione.

Definizione 2. Sia $B \subset \boldsymbol{R}^m$, e sia $r \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Diremo che B è numerabilmente $\mathcal{H}^r$-rettificabile se esiste una successione di superfici di classe C^1 ed r-dimensionali $\Gamma_h \subset \boldsymbol{R}^m$ tali che

$$\mathcal{H}^r\left(B \setminus \bigcup_{h=1}^{\infty} \Gamma_h \right) = 0.$$

In altre parole, $\mathcal{H}^r$-quasi tutto B può essere ricoperto con varietà r-dimensionali di classe C^1 (per $r = 0$, questo equivale a dire che B è numerabile).

Vale allora il

Teorema 1. *Gli insiemi $\Sigma^k(u)$ sono numerabilmente $\mathcal{H}^{n-k}$-rettificabili, ed in particolare la loro dimensione di Hausdorff non supera $(n-k)$. Inoltre, l'insieme $\Gamma(u)$ è numerabilmente $\mathcal{H}^n$-rettificabile in $\boldsymbol{R}^{2n}$ e*

$$(1) \qquad \int\limits_{\Gamma(u)} \varphi(x, p) \, d\mathcal{H}^n(x, p) \leq \int\limits_{\boldsymbol{R}^n} \max_{x \in \Omega} \varphi(x, p - x) \, dp$$

per ogni funzione continua $\varphi \geqslant 0$. *Infine,*

$$\int_{\Sigma^k(u) \cap \Omega'} \mathcal{H}^k(\partial u(x))\, d\mathcal{H}^{n-k}(x) < +\infty$$

per ogni insieme $\Omega' \subset\subset \Omega$

Osserviamo che la $(n-1)$-rettificabilità dell'insieme

$$\Omega \setminus \Sigma^0(u) = \bigcup_{i=1}^{k} \Sigma^i(u)$$

può essere dedotta dal fatto che ∇u è una funzione vettoriale a variazione localmente limitata in Ω (si veda [10] o [15]), e verificando che $\Omega \setminus \Sigma^0(u)$ coincide con l'insieme dei punti di salto di ∇u.

In [9] Fleming dimostra che $\mathcal{H}^{n-1+\varepsilon}(\Omega \setminus \Sigma^0(u)) = 0$ $\forall \varepsilon > 0$, per la funzione valore u di un problema di controllo ottimo. Il Teorema 1 è applicabile, come già si è detto, anche al caso studiato da Fleming, e fornisce risultati ottimali. Infatti, semplici esempi mostrano che l'insieme $\Sigma^k(u)$ può essere un insieme $(n-k)$-dimensionale (ad esempio, un piano).

DEFINIZIONE 3. Dato un insieme $S \subset \boldsymbol{R}^n$ ed $x \in \boldsymbol{R}^n$, definiamo

$$T(S,x) = \left\{ rp\colon r \geq 0,\ p = \lim_{h \to +\infty} \frac{x - x_h}{|x - x_h|},\ x_h \in S \setminus \{x\},\ x_h \to x \right\}.$$

Definiamo anche $\mathrm{Tan}(S,x)$ come il minimo spazio vettoriale contenente $T(S,x)$.

La dimostrazione della rettificabilità degli insiemi $\Sigma^k(u)$ si basa sul seguente criterio [1, Teorema 2.4]:

TEOREMA 2. *Se la dimensione di* $\mathrm{Tan}(S,x)$ *non supera* r *per ogni* $x \in S$, *allora* S *è numerabilmente* $\mathcal{H}^r$*-rettificabile.*

Per la dimostrazione della rettificabilità di $\Gamma(u)$, ci si riduce al caso in cui $\Omega = \boldsymbol{R}^n$ e $\langle p - q, y - x\rangle \geq |y - x|^2$ $\forall x, y \in \boldsymbol{R}^n$, $p \in \partial u(y)$, $q \in \partial u(x)$. Si osserva quindi che l'insieme $\Gamma(u)$ coincide con il grafico della funzione $\varphi(p)$ che a $p \in \boldsymbol{R}^n$ associa l'unico $x \in \boldsymbol{R}^n$ tale che $p \in \partial u(x)$. Essendo φ Lipschitziana (per l'ipotesi fatta su u), le proprietà di $\Gamma(u)$ vengono dedotte da note proprietà del grafico di funzioni Lipschitziane.

Osserviamo che per controllare l'area del grafico di una funzione vettoriale $v\colon \Omega \to \boldsymbol{R}^n$ serve in generale una stima in $W^{1,n}(\Omega, \boldsymbol{R}^n)$ (vedi anche [17]). Osserviamo anche che la funzione ∇u in genere non appartiene a $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \boldsymbol{R}^n)$. Una stima analoga alla (1) può essere dimostrata per funzioni v soddisfacenti la condizione di «monotonia» $\langle v(y) - v(x), y - x\rangle \geq 0$.

DEFINIZIONE 4. Sia k un intero compreso tra 1 ed n, siano $I, J \subset \{1, \ldots, n\}$ due insiemi di cardinalità $(n-k)$ e k rispettivamente, sia $u \in C^2(\Omega)$, ed indichiamo con $M_I^J(u)$ il k-minore della matrice Hessiana di u formato con le colonne indicizzate dal complementare di I e le righe indicizzate da J. Indichiamo anche con $\sigma(I)$ il segno della permutazione che porta la n-pla $(I, \{1, \dots, n\} \setminus I)$ in $\{1, \dots, n\}$ (gli elementi di J, I e del suo complementare sono elencati in ordine crescente). Poniamo infine $\omega_{I,J} = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{n-k}} \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k}$.

Se $u \in C^2(\Omega)$ e si munisce $\Gamma(u)$ dell'orientazione naturale, vale l'identità

$$\int_\Omega \varphi(x) \operatorname{Det}(M_I^J(u))\, dx = \sigma(I) \int_{\Gamma(u)} \varphi(x)\, \omega_{I,J}. \tag{2}$$

La (2) consente di definire, in senso debole, i determinanti dei minori della matrice Hessiana di una funzione convessa (vedi [10, 12]).

Teorema 3. *Sia $K(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle funzioni convesse in Ω, munito della topologia $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, e sia $\mathcal{M}(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle misure di Radon in Ω, munito della topologia debole* (indotta dalla dualità con le funzioni continue a supporto compatto). Allora, l'applicazione μ: $K(\Omega) \cap C^2(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$ definita da*

$$\mu(u)(B) = \int_B \operatorname{Det}(M_I^J(u))\, dx$$

è estendibile con continuità a tutto $K(\Omega)$. Inoltre, per ogni $u \in K(\Omega)$ esiste un n-vettore unitario $\xi_u(x, y)$ tale che

$$\mu(u)(B) = \int_{(B \times \mathbf{R}^n) \cap \Gamma(u)} \langle \xi_u(x, y), \omega_{I,J} \rangle \, d\mathcal{H}^n(x, y)$$

per ogni insieme di Borel $B \subset\subset \Omega$.

2. Il rilassato dell'area del grafico del gradiente

Per ogni funzione convessa u: $\Omega \to \mathbf{R}$ e di classe C^2, poniamo

$$F(u, \Omega) = \int_\Omega \psi(\nabla^2 u)\, dx = \mathcal{H}^n(\{(x, p) \in \Omega \times \mathbf{R}^n : p = \nabla u(x)\}),$$

essendo ψ l'integrando dell'area:

$$\psi(A) = \sqrt{1 + \sum_{B \subset A} \det^2(B)}$$

(la somma è fatta su tutti i minori quadrati di A). È naturale chiedersi se l'applicazione $u \to F(u, \Omega)$ è semicontinua inferiormente nella topologia $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, e quale può essere la sua massima estensione semicontinua $\overline{F}$ (detta anche funzionale rilassato) alle funzioni convesse non regolari.

Il seguente Teorema fornisce una risposta soddisfacente a queste domande. Prima di enunciarlo, ricordiamo la definizione di $\overline{F}$:

$$\overline{F}(u, \Omega) = \inf \left\{ \liminf_{h \to +\infty} F(u_h, \Omega) : u_h \to u \text{ in } L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \right\}.$$

Teorema 4. *Sia Ω un aperto limitato di classe C^3. Si ha $\overline{F}(u, \Omega) = \mathcal{H}^n(\Gamma(u))$ per ogni funzione convessa e Lipschitziana u: $\Omega \to \mathbf{R}$.*

Con ragionamenti analoghi a quelli del Teorema 3 si può dimostrare che l'applicazione $u \to \mathcal{H}^n(\Gamma(u))$ è semicontinua inferiormente, ed in particolare $\overline{F}(u, \Omega) \geq \mathcal{H}^n(\Gamma(u))$. Per dimostrare l'uguaglianza è allora necessario trovare una successione u_h di funzioni convesse di classe C^2 tali che $u_h \to u$ e

$$\lim_{h \to +\infty} F(u_h, \Omega) = \mathcal{H}^n(\Gamma(u)).$$

Tale successione è costruita approssimando u con le trasformate di Yosida u_ε. Come mostra il seguente Teorema, il grosso pregio delle funzioni u_ε è dovuto al fatto che $\Gamma(u_\varepsilon)$ si ottiene deformando $\Gamma(u)$ con una deformazione lineare tendente all'identità al tendere di ε a 0. Le funzioni u_ε sono di classe $C^{1,1}$, e possono a loro volta essere approssimate da funzioni C^2 aumentando di poco l'area dei grafici dei gradienti.

TEOREMA 5. *Sia $u: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ una funzione strettamente convessa e Lipschiziana, e definiamo per ogni $\varepsilon > 0$ la funzione $u_\varepsilon(x) = \min\{u(y) + |y - x|^2/2\varepsilon : y \in \boldsymbol{R}^n\}$. Allora, $u_\varepsilon \in C^{1,1}(\boldsymbol{R}^n)$ la costante di Lipschitz di ∇u_ε non supera $1/\varepsilon$, e $\|u_\varepsilon - u\|_\infty \leq L^2 \varepsilon$, dove L è la costante di Lipschitz di u.*

Inoltre, l'applicazione $\Phi_\varepsilon: \boldsymbol{R}^{2n} \to \boldsymbol{R}^{2n}$ definita da $\Phi_\varepsilon(x, p) = (x + \varepsilon p, p)$ è una bigezione tra $\Gamma(u)$ e $\Gamma(u_\varepsilon)$

La convessità gioca nei Teoremi 4 e 5 un ruolo fondamentale. Infatti, vi sono degli esempi (vedi [7]) che suggeriscono che il rilassato dell'area del grafico di funzioni vettoriali (non necessariamente gradienti di funzioni convesse) ha una struttura molto complessa, e non è neanche additivo come funzione dell'aperto Ω di integrazione.

Volendo ritornare ad una rappresentazione «cartesiana» di $\overline{F}(u, \Omega)$, è utile studiare le misure $\mu_k(B) = \mathcal{H}^n([(B \cap \Sigma^k(u)) \times \boldsymbol{R}^n] \cap \Gamma(u))$ che permettono di rappresentare $\overline{F}(u, \Omega)$ con la formula

$$\overline{F}(u, \Omega) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i(\Omega).$$

Essendo $\Sigma^n(u)$ numerabile, non è difficile rendersi conto che

$$\mu_n(B) = \sum_{x \in \Sigma^n(u) \cap B} \mathcal{H}^n(\partial u(x)).$$

La rappresentazione di μ_k con $k < n$ sembra essere un problema molto più difficile. Per $k \in \{1, \ldots, n\}$ si possono dimostrare le diseguaglianze [8, 3.2.22]

$$\mu_k(B) \geq \int_{\Sigma^k(u) \cap B} \mathcal{H}^k(\partial u(x))\, d\mathcal{H}^{n-k}(x), \tag{3}$$

mentre per $k = 0$ si dimostra che

$$\mu_0(B) \geq \int_B \psi(\nabla^2 u)\, dx + |D^s \nabla u|(B). \tag{4}$$

Nella (4) $\nabla^2 u$ indica la densità della parte assolutamente continua della derivata distribuzionale $D\nabla u$ di ∇u, mentre $D^s \nabla u$ indica la sua parte singolare.

La disuguaglianza (3) può essere stretta, e lo si può verificare direttamente per funzioni u tali che $\Sigma^k(u)$ è una varietà $(n-k)$-dimensionale non piatta. Inoltre, si possono costruire esempi più complicati di funzioni per le quali la misura μ_k non è assolutamente continua rispetto a $\mathcal{H}^{n-k}$. Si prenda ad esempio $k = 1$, $n = 2$, e si consideri la funzione di Cantor-Vitali $v(x)$: $[0, 1] \to [0, 1]$ la cui derivata Dv è concentrata sull'insieme di Cantor C. Sia u: $]0, 1[\times]0, 1[\to \mathbf{R}$ definita da

$$u(x, y) = \left| y - \int_0^x v(t)\, dt \right| .$$

L'insieme $\Gamma = \Sigma^1(u)$ è una curva di classe C^1 la cui normale non è mai orizzontale. In particolare, la misura $\nu(J) = \mathcal{H}^1((J \times \mathbf{R}) \cap \Gamma)$ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue. Non è difficile verificare che, invece, la misura $\nu'(J) = \mu_1((J \times \times \mathbf{R}) \cap \Gamma)$ ha densità non nulla rispetto a Dv. In particolare, μ_1 non è assolutamente continua rispetto alla restrizione di $\mathcal{H}^1$ a Γ.

Vi sono quindi ragioni per credere che gli insiemi $\Sigma^k(u)$ siano dotati di curvatura, oltre che di spazio tangente, in un senso approssimato, e che le misure μ_k siano legate a tale curvatura.

È inoltre naturale chiedersi se gli insiemi $\Sigma^k(u)$ si possano ricoprire con varietà di classe C^2 anziché di classe C^1. A tutt'oggi questo problema è ancora aperto (vedi anche [4]).

Anche la diseguaglianza (4) può essere stretta, in quanto μ_0 può non essere assolutamente continua rispetto a $\mathcal{H}^n + |D\nabla u|$. Si prenda ad esempio la funzione u: $]0, 1[\times \times]0, 1[\to \mathbf{R}$ definita da

$$u(x, y) = \int_0^x v(t)\, dt + \int_0^y v(t)\, dt .$$

Si può allora verificare che $\mu_0 \geq Dv \times Dv$, mentre $|D\nabla u| = Dv \times \mathcal{H}^1 + \mathcal{H}^1 \times Dv$. La misura $Dv \times Dv$ è concentrata sull'insieme $C \times C$ che è trascurabile rispetto a $|D\nabla u|$.

3. Propagazione delle singolarità

Le singolarità delle funzioni convesse, di qualunque ordine esse siano, possono essere isolate. Si prenda ad esempio la funzione $u(x_1, \ldots, x_n) = ((x_1^2 + \ldots + x_k^2) + + (x_{k+1}^4 + \ldots + x_n^4))^{1/2}$. Non è difficile verificare che u è convessa in $\mathbf{R}^n$ e differenziabile in $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$. Inoltre, $0 \in \Sigma^k(u)$ in quanto $\partial u(0) = [-1, 1]^k \times \{0\}^{n-k}$.

Definizione 5. Per ogni $x \in \Omega$ poniamo

$$D^* u(x) = \left\{ \lim_{h \to +\infty} \nabla u(x_h) : x_h \in \Sigma^0(u),\ x_h \to x \right\}.$$

Dato un intero $k \in \{0, \ldots, n\}$, poniamo anche

$$\Gamma^k(u) = \bigcup_{i=k}^{n} \Sigma^i(u).$$

È noto che $D^* u(x) \subset \partial u(x)$ e che $\overline{\mathrm{co}}\,(D^* u(x)) = \partial u(x)$. Il seguente Teorema dà una condizione sufficiente per la propagazione dei punti di non differenziabilità.

TEOREMA 6. *Supponiamo che* $x \notin \Sigma^n(u)$ *e* $\partial u(x) \setminus D^* u(x)$ *sia non vuoto. Allora,* x *non è un punto isolato di* $\Gamma^1(u)$ *e* $T(\Gamma^1(u), x) \supset [\partial u(x)]^\perp$.

L'ipotesi del Teorema 6 è automaticamente verificata, ad esempio, per le soluzioni di viscosità dell'equazione $H(x, u, \nabla u) = 0$ nell'ipotesi in cui l'insieme di livello $R(x) = \{p: H(x, u(x), p) = 0\}$ sia strettamente convesso. In tal caso, infatti, essendo l'equazione soddisfatta nel senso puntuale in $\Sigma^0(u)$, si ha che $D^* u(x)$ è contenuto in $R(x)$ e quindi non può contenere parti lineari. In [2] vi sono enunciati più precisi, che consentono di trattare il caso in cui vi sia stretta convessità in certe variabili, ma non in altre, come può avvenire ad esempio per equazioni del tipo $u_t + H(x, u, \nabla u) = 0$.

Il Teorema 6 dà un risultato ottimale nel caso in cui $x \in \Sigma^1(u)$. D'altro canto, se $x \in \Sigma^k(u)$ con $k > 1$, si vorrebbero condizioni che garantiscano che x non è un punto isolato di $\Gamma^k(u)$. Alcuni esempi mostrano che per avere ciò è necessario rafforzare le ipotesi del Teorema 6.

Dato un intero $j \geq 1$, definiamo

$$I_j(\partial u(x)) = \bigcup \{\overline{\mathrm{co}}(A): \mathcal{H}^0(A) \leq j, A \subset D^* u(x)\}.$$

È evidente che $I_1(\partial u(x)) = D^* u(x)$; il teorema di Carathéodory implica che $I_j(\partial u(x)) = \partial u(x)$, $\forall j \geq k + 1$, se $x \in \Sigma^k(u)$. Il Teorema 6 può essere generalizzato nel modo seguente.

Teorema 7. *Sia* $x \in \Sigma^k(u) \setminus \Sigma^n(u)$, *e sia* $m \in \{1, \ldots, k\}$ *il massimo degli interi* j *tali che* $\partial u(x) \setminus I_j(\partial u(x)) \neq \emptyset$. *Allora* x *non è un punto isolato di* $\Gamma^m(u)$, $T(\Gamma^m(u), x) \supset [\partial u(x)]^\perp$, *e*

$$\liminf_{\rho \to 0^+} \frac{\mathcal{H}^{n-k}(\Gamma^m(u) \cap B_\rho(x))}{\rho^{n-k}} \geq \frac{[\Gamma(1/2)]^{n-k}}{\Gamma(1 + (n-k)/2)}.$$

La propagazione della singolarità di ordine massimo ($k = m$) avviene ad esempio se $D^* u(x)$ è contenuto in un insieme strettamente convesso e $\partial u(x)$ è un poliedro. Infatti, in tal caso $D^* u(x)$ coincide con l'insieme dei vertici di $\partial u(x)$ e $I_k(\partial u(x))$ è il bordo (relativo) di $\partial u(x)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. ALBERTI - L. AMBROSIO - P. CANNARSA, *On the singularities of convex functions.* Preprint Scuola Normale Superiore, n. 119, 1991, in corso di stampa su: Manuscripta Mathematica.

[2] L. AMBROSIO - P. CANNARSA - H. M. SONER, *On the propagation of singularities of solutions to Hamilton-Jacobi-Bellman equations.* 1992, in corso di stampa.

[3] G. ALBERTI - L. AMBROSIO, *Weak determinants and monotone functions.* 1992, in corso di stampa.

[4] G. ANZELLOTTI - R. SERAPIONI, *C^k-rectifiable sets.* Preprint Università di Trento, 1991.

[5] P. CANNARSA - H. M. SONER, *On the singularities of the viscosity solutions to Hamilton-Jacobi-Bellman equations.* Indiana Univ. Math. J., 36, 1987, 501-524.

[6] F. H. CLARKE, *Optimization and Nonsmooth Analysis.* Wiley & Sons, New York 1983.

[7] E. DE GIORGI, *Geometric Measure Theory and Calculus of Variations.* Proceedings of the Conference on *New Developments in PDE and Applications to Mathematical Physics* (Ferrara, 14-18 ottobre 1991), Plenum Press, in corso di stampa.

[8] H. Federer, *Geometric Measure Theory.* Springer Verlag, Berlin 1969.

[9] W. H. Fleming, *The Cauchy problem for a nonlinear first order partial differential equation.* J. Differential Equations, 5, 1969, 515-530.

[10] J. H. G. Fu, *Monge Ampere functions I.* Preprint CMA, Australian National University, 1988.

[11] J. H. G. Fu, *Monge Ampere functions II.* Preprint CMA, Australian National University, 1988.

[12] M. Giaquinta - G. Modica - J. Soucek, *Cartesian currents, weak diffeomorphisms and existence theorems in non-linear elasticity.* Arch. Rational Mech. Anal., 106, 1989, 97-159.

[13] P. L. Lions, *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations.* Pitman, Boston 1982.

[14] F. Morgan, *Geometric Measure Theory - A beginner's guide.* Academic Press, Boston 1988.

[15] Y. G. Reshetnyak, *Generalized derivative and differentiability almost everywhere.* Math. USSR Sbornik, 4, 1968, 293-302.

[16] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis.* Princeton University Press, Princeton 1970.

[17] C. Sbordone - T. Iwaniec, *On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses.* Preprint del Dipartimento di Matematica di Napoli, 1991.

[18] L. Simon, *Lectures on Geometric Measure Theory.* Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, Canberra 1983.

Dipartimento di Matematica
II Università degli Studi di Roma - Tor Vergata
Via O. Raimondo - 00173 Roma