Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Flavia Lanzara

Teoria degli operatori intermedi e applicazioni: risultati generali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **3** (1992), n.2, p. 79–101.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1992_9_3_2_79_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1992.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 3:79-101 (1992)

Matematica. — *Teoria degli operatori intermedi e applicazioni: risultati generali.* Nota I di FLAVIA LANZARA, presentata (*) dal Socio G. Fichera.

ABSTRACT. — *Theory and applications of intermediate operators: general results.* Problems of the following kind are considered: $(Tu, v)_H = (f, v)_S$, $f \in S$, $u \in H$, $\forall v \in H$, vector f is given, vector u is the «unknown». H is a subspace of the Hilbert space S. T is a linear operator from H to H which satisfies suitable hypotheses. By using the theory of intermediate operators methods for the calculus of the «Green operators» and of the relevant «Green functions» are given. Explicit «a priori» estimates are obtained which are as close as we wish to the optimal ones.

KEY WORDS: Intermediate operators; Green's operator; Green's function.

RIASSUNTO. — Mediante l'uso della teoria dei problemi intermedi vengono dati metodi di calcolo per gli operatori di Green e per le relative funzioni di Green di problemi del tipo: data $f \in S$, determinare $u \in H$ tale che $(Tu, v)_H = (f, v)_S$, $\forall v \in H$, dove S ed H sono spazi di Hilbert, $H \subset S$, T è un operatore lineare da H in H che verifica opportune ipotesi. Si ottengono maggiorazioni esplicite «a priori», tanto prossime a quella ottimale quanto si vuole.

Il concetto di *successione di operatori intermedi* tra due dati operatori è stato introdotto da Alessandro Weinstein nella sua celebre Memoria del 1937 [1] nella quale, per la prima volta, riesce a proporre un metodo generale per il calcolo per difetto degli autovalori di problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali, aventi un operatore di Green positivo. Tale è, ad esempio, il problema di autovalori relativo alle frequenze proprie di una piastra elastica incastrata lungo il suo bordo, caso considerato inizialmente dal Weinstein, anche dal punto di vista numerico, quando detta piastra è un quadrato.

Il metodo di Weinstein è stato successivamente sviluppato da numerosi Autori (1) ed in modo particolare da N. Aronszajn [3, 4] e da N. Bazley [5-7].

Si deve ad Aronszajn una ingegnosa costruzione di una successione di problemi intermedi che si rivela, come anch'io mostrerò in seguito, particolarmente utile nelle applicazioni. L'equivalenza rispetto al gruppo unitario del tipo di successione di problemi intermedi, quale originariamente proposto da Weinstein, e del tipo di Aronszajn è stata studiata con metodi differenti in [8] e in [9] (2).

Lo scopo principale di questa *Nota* e delle altre che ad essa seguiranno è uno studio di problemi del tipo seguente

1) $(Tu, v)_H = (f, v)_S$, $f \in S$, $u \in H$, $\forall v \in H$;
2) $(Tu, v)_H = \lambda(u, v)_S$, $u \in H$, $\forall v \in H$,

(*) Nella seduta dell'8 febbraio 1992.

(1) Per una bibliografia completa cfr. [2].

(2) Per un confronto fra i metodi di [8] e [9] cfr. [10]. Un breve resoconto (fino al 1974) della teoria dei problemi intermedi può trovarsi in [11].

dove S ed H sono spazi Hilbertiani e T un operatore lineare definito in H. Nella 1) f è il termine noto, u l'incognita; 2) è un «problema di autovalori». Le ipotesi su S, H e T saranno ben specificate in seguito. Il problema 2), nelle ipotesi che assumeremo, è stato ampiamente studiato. A tal fine basta limitarsi a richiamare le monografie e i trattati nei quali sono esposti i metodi impiegati per risolvere il problema 2) ed è contenuta una vasta bibliografia sull'argomento [2, 9, 12-17]. Tuttavia, viste le profonde connessioni esistenti tra i problemi 1) e 2), ho dovuto in questo lavoro considerare anche taluni aspetti inerenti al problema 2).

Ben maggiore originalità ritengo abbiano invece i risultati relativi al problema 1). Per tali problemi, infatti, partendo da un'idea relativa ad un caso molto particolare contenuta in [18], ho potuto dare metodi di calcolo per gli «operatori di Green» e per le relative «funzioni di Green». Circostanza, che ritengo di non trascurabile interesse e generalità, è la possibilità di dare maggiorazioni *esplicite* a priori molto strette nei procedimenti di calcolo sia di quegli operatori che di quelle funzioni. Tali maggiorazioni (che costituiscono la parte più delicata della mia ricerca) hanno un carattere di novità anche rispetto ai risultati particolari contenuti in [18], dove il problema della maggiorazione dell'errore per gli operatori e le funzioni di Green non è considerato. La costante che interviene nelle mie formule di maggiorazione sovrasta ovviamente quella ottimale, ma si può rendere tanto prossima a questa quanto si vuole.

Strumento principale per l'ottenimento dei miei risultati si è rivelata la teoria dei problemi intermedi che in questa *Nota I*, relativamente alla classe di operatori da me considerata, viene rielaborata in un contesto astratto. Nello stesso contesto vengono ottenuti i risultati generali di analisi funzionale relativi agli «operatori» ed alle «funzioni» di Green. Nelle *Note* successive i metodi di questa prima *Nota* saranno applicati a svariati problemi che interessano l'analisi matematica, la fisica matematica e l'analisi numerica. Le applicazioni numeriche a diversi problemi di non banale interesse verranno pubblicate in un lavoro a parte che apparirà su una Rivista specifica.

1. Classe $\{T\}$ e relative proprietà

Siano S e H due spazi di Hilbert astratti entrambi reali o complessi. Lo spazio S sia separabile e di dimensione non finita. Si denoti con $(u, v)_S$ il prodotto scalare in S e con $(u, v)_H$ il prodotto scalare in H. In seguito, per brevità, si scriverà (u, v) anziché $(u, v)_S$. Si supponga che sia $H \subset S$ e che l'operatore d'immersione $\Im: H \hookrightarrow S$ sia un operatore compatto. Si denoti con $\|u\|$ la norma in S e con $\|u\|_H$ la norma in H. Per la continuità dell'operatore $\Im: H \hookrightarrow S$ esiste una costante $c > 0$ tale che $\|u\| \leq c\|u\|_H$ $\forall u \in H$.

Sia T un operatore lineare e limitato definito da H in sé tale che

$$(Tu, v)_H = (u, Tv)_H, \qquad \forall u, v \in H \tag{1.1}$$

e

$$(Tu, u)_H \geq c_T\|u\|_H^2 \qquad \forall u \in H, \ \ c_T > 0. \tag{1.2}$$

Si denoti con $\{T\}$ la classe costituita da tali operatori. Dato $f \in S$, il problema

$$(Tu, v)_H = (f, v) \qquad u \in H \ \ (\forall v \in H) \tag{1.3}$$

ammette una e una sola soluzione. Infatti dall'essere $(Tu, v)_H = 0 \ \forall v \in H$ segue che $0 = (Tu, u)_H \geq c_T \|u\|_H^2$. Quindi $u \equiv 0$. Sostituendo in H il prodotto scalare $(u, v)_H$ con $(Tu, v)_H$, si ottiene un nuovo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ isomorfo al precedente. Il funzionale lineare (f, v), considerato come definito e limitato in $\mathcal{H}$, può essere rappresentato mediante questo prodotto scalare (teorema di rappresentazione di Riesz). Esiste quindi $u \in \mathrm{H}$ tale che (1.3) è soddisfatta.

Sia $u = Gf$. L'operatore lineare G verifica l'identità

(1.4) $$(TGu, v)_H = (u, v) \qquad \forall u \in S, \ \forall v \in H.$$

Ciò implica che è $Gu = 0$ solo se è $u = 0$. Inoltre G è limitato da S in $\mathcal{H}$ perché, per ogni $f \in S$, $\|Gf\|_H^2 \leq c_T^{-1}(TGf, Gf)_H = c_T^{-1}(f, Gf) \leq c_T^{-1}\|f\| \cdot \|Gf\| \leq c_T^{-1} c \|f\| \cdot \|Gf\|_H$, quindi compatto da S in S per la compattezza dell'operatore d'immersione $\mathfrak{I}: H \hookrightarrow S$. L'operatore G è simmetrico e positivo in S. Infatti, per la proprietà (1.1): $(u, Gv) = (TGu, Gv)_H = (Gu, TGv)_H = (Gu, v) \ \ \forall u, \ v \in S$ e, per la (1.2), $(u, Gu) = (TGu, Gu)_H \geq c_T \|Gu\|_H^2 > 0$ se $u \not\equiv 0$, $\forall u \in S$. Quindi G è un PCO dello spazio S. Con la sigla PCO (Positive Compact Operator) si intende un operatore di uno spazio di Hilbert in sé positivo e compatto (per il quale si suppone altresì la simmetria se lo spazio è reale) [3].

Diremo l'operatore G *operatore di Green* per il problema (1.3).

Il problema di autovalori

(1.5) $$(Tu, v)_H = \lambda(u, v), \qquad u \in H, \ (\forall v \in H)$$

essendo, per la (1.2), $\lambda \neq 0$ è equivalente a

(1.6) $$Gu = \mu u, \qquad u \in S \qquad \text{con } \mu = \lambda^{-1}.$$

La (1.4) e la (1.5), assumendo $\mu = \lambda^{-1}$, implicano la (1.6). Viceversa, se sussiste (1.6), si ha $(u, v) = (TGu, v)_H = \mu(Tu, v)_H$, cioè la (1.5) con $\lambda = \mu^{-1}$.

Ne segue che gli autovalori di (1.5) costituiscono una successione monotona non decrescente di numeri positivi: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \leq \ldots$. In questa successione ogni autovalore è ripetuto un numero di volte pari alla sua molteplicità (certamente finita).

2. Successione di operatori intermedi

Siano G_0 e G due PCO dello spazio S e supponiamo che, dette $\{\mu_{0,k}\}_{k \geq 1}$ e $\{\mu_k\}_{k \geq 1}$ le rispettive successioni degli autovalori, si abbia per ogni $k \geq 1$: $\mu_k \leq \mu_{0,k}$.

Diremo che la successione $\{G_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ è una *successione di operatori intermedi fra G e G_0* se, detta $\{\mu_{n,k}\}_{k \geq 1}$ la successione degli autovalori di G_n, si ha

(2.1) $$\mu_k \leq \mu_{n+1,k} \leq \mu_{n,k} \leq \mu_{0,k} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

[3] In questo lavoro con la dizione *operatore positivo* G intenderemo riferirci ad un operatore *strettamente positivo*, cioè tale che $(Gu, u) > 0$ per ogni $u \neq 0$. Tuttavia in qualche circostanza dovremo considerare operatori positivi ma non strettamente, cioè tali che $(Gu, u) \geq 0 \ \forall u$, potendo essere $(Gu, u) = 0$ anche per qualche $u \neq 0$. In tal caso, però, daremo esplicito avvertimento al lettore.

Se G, G_0 e la successione $\{G_n\}_n$ verificano le condizioni

$$G < G_{n+1} < G_n < G_0 \quad (2.2)$$ [4]

allora G_n è certamente una successione di operatori intermedi tra G e G_0. Date le (2.2) seguono, com'è noto, le (2.1) come conseguenza del classico principio di Mini-Max per gli autovalori (cfr. [9, p. 114]).

La (2.2) appare quindi come una condizione più restrittiva della (2.1). Sussiste tuttavia il seguente Teorema:

2.1. *Se la successione di PCO $\{G_n\}$ è intermedia tra G e G_0 esistono due PCO Γ e Γ_0 ed una successione di PCO $\{\Gamma_n\}$ tali che*

i) Γ *è unitariamente equivalente a G e Γ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) è unitariamente equivalente a G_n* [5];

ii) *Si ha $\Gamma < \Gamma_{n+1} < \Gamma_n < \Gamma_0$.*

Sia $\{v_h\}_{h\geq 1}$ un sistema ortonormale e completo in S e siano $\{u_{n,h}\}_{h\geq 1}$ e $\{u_h\}_{h\geq 1}$ le successioni complete di autovettori ortonormalizzati relative, rispettivamente, a G_n ($n = 0, 1, \dots$) e a G. Si considerino gli operatori unitari $U_n v = \sum_{h\geq 1} (v, u_{n,h})\, v_h$ e $Uv = \sum_{h\geq 1} (v, u_h)\, v_h$. Si ha $U_n^{-1} v = \sum_{h\geq 1} (v, v_h)\, u_{n,h}$, $U^{-1} v = \sum_{h\geq 1} (v, v_h)\, u_h$. Ne segue che gli operatori $\Gamma_n = U_n G_n U_n^{-1}$ e $\Gamma = UGU^{-1}$ sono unitariamente equivalenti, rispettivamente, a G_n e a G. Si ha $\Gamma_n v = \sum_{h\geq 1} \mu_{n,h} (v, v_h)\, v_h$ e $\Gamma u = \sum_{h\geq 1} \mu_h (v, v_h)\, v_h$.

Dalla (2.1) segue ii).

Il Teorema dimostrato fa vedere che, allorché le successioni di operatori intermedi vengono impiegate in problemi invarianti rispetto all'equivalenza unitaria (come, ad esempio, sono i problemi di calcolo e approssimazione degli autovalori) le due condizioni (2.1) e (2.2) debbono considerarsi come equivalenti [6]. È anche però da osservare il carattere puramente teorico di tale Teorema, dato che la costruzione di Γ_n e Γ è basata sulla esplicita conoscenza della risoluzione spettrale di G_n e G. Si noti che, se la successione $\{G_n\}_{n\geq 0}$ verifica la (2.2), essa converge fortemente verso un operatore G' in generale distinto da G e tale che $G' \geq G$. Se accade che $G' = G$ e che la convergenza di G_n verso G non è soltanto forte ma anche uniforme, allora si ha, per ogni k, $\lim_{n\to\infty} \mu_{n,k} = \mu_k$, come segue dalla ben nota diseguaglianza $|\mu_{n,k} - \mu_k| \leq \|G_n - G\|$ $(n \geq 0)$ (cfr. [9, p. 115]).

Come si è ricordato nell'Introduzione, il concetto di successione di problemi intermedi venne introdotto da *A.* Weinstein in un contesto particolare, che, relativa-

(4) Se G e G' sono due operatori simmetrici di S, scrivendo $G < G'$ intendiamo che la forma quadratica $(G'u, u) - (Gu, u)$ è semidefinita positiva senza essere identicamente nulla.

(5) Due operatori G e Γ di S si dicono *unitariamente equivalenti* se esiste un operatore unitario U di S su sè stesso tale che $G = U^{-1}\Gamma U$ e, quindi, $\Gamma = UGU^{-1}$. È ovvio come tale definizione vada modificata se G e Γ operano su due spazi diversi.

(6) Naturalmente deve supporsi che, per ogni n e per ognuna delle diseguaglianze (2.1), esista almeno un indice k per il quale tale diseguaglianza valga in senso stretto.

mente ai PCO di S, può così esprimersi. Sia G_0 un PCO e sia V un sottospazio proprio di S. Sia Q il proiettore ortogonale di S su V. Si assuma $G = QG_0 Q$, cioè G sia la *componente* (o *parte*) *di* G_0 *rispetto a* V. L'operatore G è un PCO *non strettamente positivo* dato che per ogni vettore $w \in W = V^{\perp}$ si ha $(Gw, w) = 0$. Sia $P = I - Q$, cioè P sia il proiettore ortogonale di S su W. Indichiamo con $\{w_k\}_{k \geq 1}$ un sistema di vettori linearmente indipendenti di W, completo in W. Diciamo W_n *l'inviluppo lineare* di $w_1, \ldots, w_n$, cioè la varietà lineare di base $w_1, \ldots, w_n$ e sia P_n il proiettore ortogonale di S su W_n. Si ponga $G_n = (I - P_n)\, G_0\, (I - P_n)$. Per noti teoremi è soddisfatta la (2.1). Si ha inoltre la convergenza uniforme di G_n verso G.

Tali fatti sono la premessa teorica del metodo di calcolo per eccesso degli autovalori di $G = (I - P)\, G_0\, (I - P)$ dovuto a Weinstein. Si noti che in questo caso gli operatori intermedi G_n sono positivi ma non strettamente. È inoltre da notare che gli operatori $G_n = (I - P_n)\, G_0\, (I - P_n)$, in generale, non verificano le (2.2).

In questo caso la riduzione della condizione (2.1) alla condizione (2.2) può farsi mediante equivalenze unitarie che, a differenza di quelle considerate nella dimostrazione del Teorema 2.1, sono del tutto esplicite.

Sussiste, infatti, il seguente Teorema:

2.2. *Siano Γ un PCO e V un sottospazio di S. Sia Q il proiettore ortogonale di S su V. Sia $\Gamma^{1/2}$ la radice quadrata positiva di Γ. L'operatore $Q\Gamma Q$, considerato come operatore di V in V, e l'operatore $\Gamma^{1/2} Q \Gamma^{1/2}$, considerato come operatore da $K^{\perp}$ in $K^{\perp}$, (dove K è il nucleo dell'operatore $\Gamma^{1/2} Q \Gamma^{1/2}$), sono unitariamente equivalenti.*

Questo Teorema è sostanzialmente contenuto nei teorr. 17.I e 17.II di [9] (cfr. [9, p. 131]).

Consideriamo due operatori T_0 e T della classe $\{T\}$. Siano $\{\lambda_{0,k}\}_k$ e $\{\lambda_k\}_k$ le rispettive successioni degli autovalori e G_0 e G i rispettivi operatori di Green. Diremo che la successione $\{T_n\}_{n \geq 1}$ di operatori di $\{T\}$ è *intermedia tra* T_0 *e* T se, detta $\{G_n\}_{n \geq 1}$ la successione degli operatori di Green corrispondente a $\{T_n\}$, la $\{G_n\}$ è intermedia fra G e G_0. Ciò presuppone che debba essere

$$\lambda_{0,k} \leq \lambda_k \qquad (\forall k \geq 1). \tag{2.3}$$

I due operatori T_0 e T di $\{T\}$ siano tali che l'operatore $T - T_0$ sia strettamente positivo, cioè

$$(Tu, u)_H > (T_0 u, u)_H \qquad \forall u \neq 0. \tag{2.4}$$

La (2.4) implica il sussistere delle (2.3). Nella ipotesi (2.4) N. Aronszajn ha fornito un metodo, assai efficace nelle applicazioni, per costruire una successione di operatori intermedi tra T_0 e T.

Se $\{\psi_h\}_{h \geq 1}$ è un sistema completo di vettori linearmente indipendenti in S, si denoti con α_h la soluzione di

$$(T\alpha_h, v)_H = (\psi_h, v) \qquad \alpha_h \in H, \quad (\forall v \in H), \tag{2.5}$$

cioè $\alpha_h = G\psi_h$ (7). La $\{\alpha_h\}$ è una successione di vettori linearmente indipendenti e completa in H.

Introdotto in H il prodotto scalare $((u,v)) = (Tu,v)_H - (T_0 u, v)_H$, sia W lo spazio di Hilbert così ottenuto, che risulta essere isomorfo a H. Se W^n è il sottospazio di W generato dai vettori $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, si indichi con P_n il proiettore ortogonale di W sulla varietà lineare W^n. Se $\{b_{ij}^{(n)}\}_{i,j=1,n}$ è la matrice inversa della matrice di Gram $\{((\alpha_i, \alpha_j))\}$ $(i,j = 1, \ldots, n)$ si ha $P_n u = \sum_{i,j}^{1,n} b_{ij}^{(n)} ((u, \alpha_i))\, \alpha_j$.

Si definisce la successione di operatori intermedi

$$(2.6)_n \qquad T_n = T_0 + (T - T_0) P_n .$$

T_n è un operatore lineare, limitato e simmetrico definito da H in H. Esso appartiene alla classe $\{T\}$. Se $|||\circ|||$ denota la norma in W, dall'essere $(T_n u, u)_H = (T_0 u, u)_H + |||P_n u|||^2$, $u \in H$, segue che $(T_0 u, u)_H \leq (T_n u, u)_H \leq (T_{n+1} u, u)_H \leq (Tu, u)_H$.

Applicando il principio di Max-Min (cfr. [18, teor. III, p. 226]) a questa successione $\{T_n\}_n$ si deduce

$$(2.7) \qquad \lambda_{0,k} \leq \lambda_{n,k} \leq \lambda_{n+1,k} \leq \lambda_k \qquad (k \geq 1).$$

Segue da ciò che $\{T_n\}_n$ è una successione di operatori intermedi tra T_0 e T.

2.3. *La successione di operatori intermedi* $\{T_n\}$ *definiti da* $(2.6)_n$ *converge fortemente a* T *in* H.

La successione di proiettori P_n converge fortemente all'operatore identico I in H. Dall'essere $\|T_n u - Tu\|_H \leq \|T(P_n - I)\, u\|_H + \|T_0 (P_n - I)\, u\|_H$ $\forall u \in H$ segue la tesi.

Sussiste, inoltre, il seguente Teorema di convergenza:

2.4. *Per ogni* $k \geq 1$ *la successione di autovalori* $\{\lambda_{n,k}\}$ *converge a* λ_k. *Si scelga la corrispondente successione di autosoluzioni* $\{u_{n,k}\}$ *tale che* $(u_{n,h}, u_{n,k}) = \delta_{hk}$ $(h, k \geq 1)$. *La successione* $\{u_{n,k}\}_n$ *è compatta in* S *e ogni punto di compattezza è un'autosoluzione per il problema* (1.5) *corrispondente all'autovalore* λ_k.

La successione $\{u_{n,k}\}_n$ è limitata in H. Infatti

$$\|u_{n,k}\|_H^2 \leq c_0^{-1} (T_0 u_{n,k}, u_{n,k})_H \leq c_0^{-1} (T_n u_{n,k}, u_{n,k})_H = c_0^{-1} \lambda_{n,k} \leq c_0^{-1} \lambda_k .$$

Quindi la successione $\{u_{n,k}\}_n$ è compatta in S.

Per ogni $u \in H$:

$$c_0 \|G_n u\|_H^2 \leq (T_n G_n u, G_n u)_H = (u, G_n u) \leq \|u\| \cdot \|G_n u\| \leq c^2 \|u\|_H \cdot \|G_n u\|_H$$

da cui segue che $\|G_n\|_H \leq c_0^{-1} c^2$, avendo indicato con $\|G\|_H = \sup_{H-0} \|Gu\|_H / \|u\|_H$ la norma di un operatore dello spazio H.

(7) Circa la costruzione esplicita della successione $\{\alpha_h\}$ si veda la prossima Sezione 5.

Per ogni $u,\ v \in H$:

$(TG_n u, v)_H = (T_n G_n u, v)_H + ((T - T_n)\, G_n u, v)_H = (u, v) + (G_n u, (T - T_n)\, v)_H$.

Dall'essere $|(G_n u, (T - T_n)\, v)_H| \leq c_0^{-1} c^2 \|u\|_H \|(T - T_n)\, v\|_H$ si ha che

$$\lim_{n \to \infty} (TG_n u, v)_H = (u, v) = (TGu, v)_H .$$

Quindi la successione $\{G_n u\}_n$ converge debolmente a Gu in H munito del prodotto scalare $(Tu, v)_H$. Per la compattezza dell'operatore d'immersione $\Im: H \hookrightarrow S$ la convergenza è forte in S.

Per (2.7) $\lim_{n \to \infty} \lambda_{n,1} = \tilde{\lambda}_1 \leq \lambda_1$ e, posto $\tilde{\mu}_1 = 1/\tilde{\lambda}_1$, si ha che $\lim_{n \to \infty} \mu_{n,1} = \tilde{\mu}_1 \geq \mu_1$.

Sia $\{u_{n_i,1}\}_i$ una sottosuccessione estratta da $\{u_{n,1}\}_n$, convergente fortemente a $\tilde{u}_1$ in S.

Per ogni $v \in S$: $|(G_{n_i} u_{n_i,1} - G\tilde{u}_1, v)| \leq |(G_{n_i}(u_{n_i,1} - \tilde{u}_1), v)| + |((G_{n_i} - G)\, \tilde{u}_1, v)| = |(u_{n_i,1} - \tilde{u}_1, G_{n_i} v)| + |((G_{n_i} - G)\, \tilde{u}_1, v)| \leq \|u_{n_i,1} - \tilde{u}_1\| \cdot \|G_{n_i} v\| + \|G_{n_i} \tilde{u}_1 - G\tilde{u}_1\| \cdot \|v\|$ da cui $\lim_{i \to \infty} (G_{n_i} u_{n_i,1}, v) = (G\tilde{u}_1, v)$.

Dall'equazione $G_{n_i} u_{n_i,1} - \mu_{n_i,1} u_{n_i,1} = 0$ si deduce che $G\tilde{u}_1 - \tilde{\mu}_1 \tilde{u}_1 = 0$, con $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_1) = 1$. Quindi $\tilde{u}_1$ e $\tilde{\mu}_1$ sono, rispettivamente, autosoluzione e autovalore per G. Deve necessariamente essere $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, altrimenti G avrebbe un autovalore maggiore di μ_1.

Si supponga che il Teorema valga per $k = 1, \ldots, h - 1$ $(h \geq 2)$. Sia $\{n_i\}_i$ una successione crescente di interi positivi tali che $\lim_{i \to \infty} u_{n_i,k} = u_k$, $(k = 1, \ldots, h - 1)$ e $\lim_{i \to \infty} u_{n_i,h} = \tilde{u}_h$, fortemente in S. Si ha che

$$(u_k, \tilde{u}_h) = 0 \qquad k = 1, \ldots, h - 1 \quad \text{e} \quad (\tilde{u}_h, \tilde{u}_h) = 1. \tag{2.8}$$

Ripetendo lo stesso ragionamento fatto per $k = 1$, si ha che $G\tilde{u}_h - \tilde{\mu}_h \tilde{u}_h = 0$. Deve essere $\tilde{\mu}_h = \mu_h$ altrimenti G avrebbe un autovalore maggiore di μ_h nel sottospazio di S definito da (2.8).

3. Calcolo rigoroso degli autovalori del problema (1.5)

Parlando di «calcolo rigoroso» di un numero reale incognito λ intendiamo la possibilità di costruire *esplicitamente* due successioni di numeri reali convergenti a λ le quali, rispettivamente, approssimano λ per difetto e per eccesso.

I risultati contenuti in questa Sezione sono già acquisiti nella letteratura specifica ([8]). Riassumerli in questo lavoro è stato dettato, oltre che da un desiderio di completezza, visto l'uso approfondito che dovremo farne in seguito, soprattutto dalla necessità di uniformare le ipotesi e le notazioni, impiegate in altre trattazioni, con la nostra.

Per il calcolo delle approssimazioni per eccesso degli autovalori del problema (1.5) sussiste il Teorema

3.1. *Sia* $\{v_h\}_{h \geq 1}$ *un sistema completo di vettori linearmente indipendenti di* H. *Siano*

([8]) Cfr. la bibliografia citata nell'Introduzione.

$\lambda_1^{(\nu)} \leq \ldots \leq \lambda_\nu^{(\nu)}$ *le radici dell'equazione* $\det\{(Tv_i, v_j)_H - \lambda(v_i, v_j)\} = 0$, $(i, j = 1, \ldots, \nu)$. *Risulta* $\lambda_k^{(\nu)} \geq \lambda_k^{(\nu+1)}$ *e* $\lim_{\nu\to\infty} \lambda_k^{(\nu)} = \lambda_k$ $(k = 1, \ldots, \nu)$.

Se $\{u_k\}$ è il sistema completo di autosoluzioni di (1.5) in H, si può assumere tale sistema ortonormale in $\mathcal{H}$, cioè $(Tu_h, u_k)_H = \delta_{hk}$ $(h, k \geq 1)$. Per ogni $v \in \mathcal{H}$ si ha $Gv = \sum_{k=1}^{\infty} (Tv, u_k)_H Gu_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (Tv, u_k)_H u_k$.

Quindi G è un PCO dello spazio $\mathcal{H}$. Se $\mu_1^{(\nu)} \geq \mu_2^{(\nu)} \ldots \geq \mu_\nu^{(\nu)}$ sono le radici dell'equazione $\det\{(TGv_i, v_j)_H - \mu(Tv_i, v_j)_H\} = 0$, $(i, j = 1, \ldots, \nu)$, risulta $\mu_k^{(\nu)} \leq \mu_k^{(\nu+1)}$ e $\lim_{\nu\to\infty} \mu_k^{(\nu)} = \mu_k$ (cfr. [9, teor. 15.XIII, p. 117]). Dato che $\lambda_k^{(\nu)} = (\mu_k^{(\nu)})^{-1}$ segue la tesi. Per il calcolo delle approssimazioni per difetto degli autovalori di (1.5) si fa uso del metodo degli invarianti ortogonali. Sia G un PCO $\in \mathcal{T}^m$ (cfr. [9, p. 146]) cioè l'operatore G^m ha traccia di Hilbert-Schmidt finita, per qualche m positivo. Fissato $s \geq 0$ e noto l'invariante ortogonale $\mathfrak{I}_s^m(G)$ [9, lecture 18, p. 139], se $\lambda_1^{(\nu)} \leq \lambda_2^{(\nu)} \leq \ldots \leq \lambda_\nu^{(\nu)}$ sono le approssimazioni per eccesso dei primi ν autovalori di (1.5), per $k \leq \nu$ (9):

$$\sigma_k^{(\nu)} = \left\{ \frac{\mathfrak{I}_s^m(G) - \sum\limits_{h_1 < h_2 < \ldots < h_s}^{1, \ldots, \nu} (\lambda_{h_1}^{(\nu)} \lambda_{h_2}^{(\nu)} \ldots \lambda_{h_s}^{(\nu)})^{-m}}{\sum\limits_{h_1 < h_2 < \ldots < h_{s-1}}^{1, \ldots, \nu} {}^{(k)} (\lambda_{h_1}^{(\nu)} \lambda_{h_2}^{(\nu)} \ldots \lambda_{h_{s-1}}^{(\nu)})^{-m}} + (\lambda_k^{(\nu)})^{-m} \right\}^{1/m} \quad s \geq 0, \quad m \geq 1, \tag{3.1}$$

fornisce le approssimazioni per difetto dei primi ν autovalori del problema iniziale.

Risulta, infatti, $\sigma_k^{(\nu)} \leq \sigma_k^{(\nu+1)} \leq \lambda_k$ e $\lim_{\nu\to\infty} \sigma_k^{(\nu)} = \lambda_k$ $(k = 1, \ldots, \nu)$ (cfr. [9, teor. 19.I, pp. 152-153]).

La (3.1) fornisce la successione $\{\sigma_k^{(\nu)}\}_{k=1,\nu}$ se si conosce esplicitamente l'invariante ortogonale $\mathfrak{I}_s^m(G)$.

Sia A un insieme astratto nel quale è definita una misura μ, nel senso che μ è definita per tutti gli insiemi B di un σ-anello $\{B\}$, i quali sono contenuti in A. Sia inoltre $\mu(B) \geq 0$, $\forall B \in \{B\}$. Supponiamo che μ sia *separabile*. Con ciò intendiamo che essa sia ottenuta per «prolungamento» da una funzione non negativa, completamente additiva, definita su un semi-anello $\{I\}$ che genera $\{B\}$ (cfr. [19, pp. 267-280]), i cui insiemi costituiscono una famiglia numerabile. Supponiamo $A \in \{B\}$ e di misura finita. Con $L^2(A, \mu)$ si indica, com'è noto, lo spazio delle funzioni $u(x)$, reali o complesse, definite in A, μ-misurabili e tali che $\int_A |u(x)|^2 d\mu_x$ sia finito. Lo spazio $L^2(A, \mu)$, supposto complesso, ha la struttura di uno spazio di Hilbert separabile rispetto al prodotto scalare $(u, v) = \int_A u(x)\, \overline{v(x)}\, d\mu_x$ (cfr. [19, p. 470]).

È possibile ottenere una *realizzazione* dello spazio di Hilbert S su $L^2(A, \mu)$. A tal fine si consideri un operatore unitario U di S su $L^2(A, \mu)$, talché $L^2(A, \mu)$, dal punto di

(9) Scrivendo $\sum\limits_{h_1 < h_2 < \ldots < h_{s-1}}^{1, \ldots, \nu} {}^{(k)}$ s'intede la sommatoria estesa ad ogni disposizione crescente di classe $s - 1$ degli interi $1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, \nu$.

vista della teoria degli spazi di Hilbert, può identificarsi con S, rappresentando il generico vettore u di S con la funzione $u(x) = U(u)$ [10].

È noto che (cfr. [9, p. 156]) dato un PCO $G \in \mathcal{T}^m$, G^m ammette la rappresentazione integrale del tipo $G^m u = \int_A g^{(m)}(x,y)\, u(y)\, d\mu_y$, $u \in L^2(A,\mu)$, con $g^{(m)}(x,y) = \int_A g^{(m/2)}(x,t)\, g^{(m/2)}(t,y)\, d\mu_t$ e $g^{(m/2)}(x,y)$ nucleo hermitiano appartenente a $L^2(A \times A, \mu \times \mu)$. Se è nota la rappresentazione integrale di G^m cioè se si conosce il nucleo $g^{(m)}(x,y)$ possono costruirsi tutti gli invarianti ortogonali $\mathfrak{I}_s^m(G)$ di G. Fissato $s \geq 0$, si consideri la funzione $f(x_1, \dots, x_s) = \det\{g^{(m)}(x_i, x_j)\}_{i,j=1,s}$ che appartiene a $L^1(\underset{1}{A} \times \dots \times \underset{s}{A}, \underset{1}{\mu} \times \dots \times \underset{s}{\mu})$. $\mathfrak{I}_s^m(G)$ ammette la seguente rappresentazione integrale:

$$\mathfrak{I}_s^m(G) = (1/s!) \int_A \dots \int_A f(x_1, \dots, x_s)\, d\mu_{x_1} \dots d\mu_{x_s}.$$

Inserendo questa espressione in (3.1) si ottiene esplicitamente il termine $\sigma_k^{(\nu)}$ della successione che approssima per difetto l'autovalore λ_k.

Il problema del calcolo degli autovalori di (1.5) è risolto completamente se l'operatore G appartiene alla classe $\mathcal{T}^m$, per qualche m positivo ed è nota la sua rappresentazione integrale. In generale, pur sapendo dell'esistenza di tale operatore $G \in \mathcal{T}^m$ non si è in grado di calcolare $\mathfrak{I}_s^m(G)$. È però possibile, per un'ampia classe di problemi, approssimare per eccesso $\mathfrak{I}_s^m(G)$ e quindi costruire le approssimazioni per difetto dei λ_k, come segue dal Teorema:

3.2. *Se $\{G_n\}$ è una successione di PCO non crescente e convergente uniformemente a G, posto*

$$\sigma_k^{(\nu,n)} = \left\{ \frac{\mathfrak{I}_s^m(G_n) - \sum\limits_{h_1 < h_2 < \dots < h_s}^{1,\dots,\nu} (\lambda_{h_1}^{(\nu)} \lambda_{h_2}^{(\nu)} \dots \lambda_{h_s}^{(\nu)})^{-m}}{\sum\limits_{h_1 < h_2 < \dots < h_{s-1}}^{1,\dots,\nu\;(k)} (\lambda_{h_1}^{(\nu)} \lambda_{h_2}^{(\nu)} \dots \lambda_{h_{s-1}}^{(\nu)})^{-m}} + (\lambda_k^{(\nu)})^{-m} \right\}^{1/m},$$

risulta, per $k \leq \nu$ e $n \geq 0$, $\sigma_k^{(\nu,n)} \leq \lambda_k$. Inoltre se $\nu \leq \nu'$ e $n \leq n'$ si ha $\sigma_k^{(\nu,n)} \leq \sigma_k^{(\nu',n')}$.

([9, teor. 19.III, p. 160] ed il lavoro di sintesi [12, pp. 65-66]).

Il seguente Teorema dimostra che è posssibile assumere le approssimazioni per difetto $\sigma_k^{(\nu,n)}$ prossime a piacere all'autovalore λ_k:

3.3. *Fissato $\varepsilon > 0$ esistono $\nu_\varepsilon > 1$ e $n_\varepsilon > 1$ tali che, per ogni $n > n_\varepsilon$ e $\nu > \nu_\varepsilon$, risulti $\lambda_k - \sigma_k^{(\nu,n)} < \varepsilon$.*

([8, teor. X, p. 234]).

[10] Se $\{v_h\}_h$ è un sistema ortogonale e completo in S e $\{w_h(x)\}_h$ è un analogo sistema in $L^2(A,\mu)$, può porsi $U(u) = \sum\limits_{h=1}^{\infty} (u, v_h)\, w_h(x)$.

4. Approssimazione uniforme dell'operatore di Green G del problema (1.3)

Vogliamo ora mostrare come, supposto noto l'operatore di Green G_0 corrispondente al problema

$$(4.1)_0 \qquad (T_0 u, v)_H = (f, v) \qquad u \in H, \quad (\forall v \in H),$$

(che A. Weinstein, in un diverso contesto, chiama *problema base*), si costruisca la successione degli operatori di Green relativi agli operatori intermedi $(2.6)_n$. D'ora in avanti supporremo S reale. Saranno ovvie le modifiche da apportare se S è complesso.

Data $f \in S$, si consideri il problema

$$(4.1)_n \qquad (T_n u, v)_H = (f, v) \qquad u \in H, \quad (\forall v \in H).$$

Sostituendo $(2.6)_n$ e l'espressione di P_n in $(4.1)_n$ si ottiene

$$\left(T_0\left(u - \sum_{i,j}^{1,n} b_{ij}^{(n)}((u, \alpha_i))\,\alpha_j\right), v\right)_H = \left(f - \sum_{i,j}^{1,n} b_{ij}^{(n)}((u, \alpha_i))\,\psi_j, v\right), \qquad \forall v \in H.$$

Per $(4.1)_0$ quest'ultima equazione è equivalente a

$$u - \sum_{i,j}^{1,n} b_{ij}^{(n)}((u, \alpha_i))\,\alpha_j = G_0 f - \sum_{i,j}^{1,n} b_{ij}^{(n)}((u, \alpha_i))\,G_0 \psi_j .$$

Posto

$$(4.2) \qquad c_j^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}^{(n)}((u, \alpha_i)) \qquad (j = 1, \dots, n)$$

si ottiene $u = G_0 f - \sum_{j=1}^{n} c_j^{(n)} G_0 \psi_j + \sum_{j=1}^{n} c_j^{(n)} \alpha_j$, che, inserita in (4.2), diventa:

$$(4.3) \qquad \sum_{i=1}^{n} b_{ij}^{(n)} \left\{((G_0 f, \alpha_i)) - \sum_{h=1}^{n} c_h^{(n)}((G_0 \psi_h, \alpha_i))\right\} = 0 \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Essendo $\{b_{ij}^{(n)}\}_{i,j=1,n}$ non singolare, la (4.3) equivale a

$$\sum_{h=1}^{n} c_h^{(n)}((G_0 \psi_h, \alpha_i)) = ((G_0 f, \alpha_i)), \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Posto $\varphi_h = G_0 \psi_h - \alpha_h$ si ha

$$((G_0 \psi_h, \alpha_i)) = (TG_0 \psi_h, \alpha_i)_H - (T_0 G_0 \psi_h, \alpha_i)_H =$$
$$= (T\alpha_i, G_0 \psi_h)_H - (\psi_h, \alpha_i) = (T\alpha_i, G_0 \psi_h)_H - (T\alpha_h, \alpha_i)_H = (T\alpha_i, \varphi_h)_H = (\psi_i, \varphi_h);$$
$$((G_0 f, \alpha_i)) = (TG_0 f, \alpha_i)_H - (T_0 G_0 f, \alpha_i)_H = (T\alpha_i, G_0 f)_H - (f, \alpha_i) =$$
$$= (\psi_i, G_0 f) - (f, \alpha_i) = (f, \varphi_i).$$

La matrice $\{(\psi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1,n}$ è simmetrica perché $(\psi_i, \varphi_j) = (\psi_i, G_0 \psi_j) - (T\alpha_i, \alpha_j)_H$ $(i, j = 1, \dots, n)$.

Inoltre questa matrice è non singolare. Se, per assurdo, il sistema $\sum_{j=1}^{n} (\psi_i, \varphi_j) \Lambda_j = 0$ $(i = 1, \dots, n)$ ammettesse un'autosoluzione $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$, $\Lambda_1^2 + \dots + \Lambda_n^2 > 0$, posto $u_0 = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i (\alpha_i - G_0 \psi_i)$, si avrebbe $P_n u_0 = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i \alpha_i \neq 0$ quindi $u_0 \neq 0$. D'altra parte, per come è stato definito il vettore u_0, si avrebbe $(T_n u_0, v)_H = 0 \ \forall v \in H$, e questo è impossibile perché il problema $(4.1)_n$ non ammette autosoluzioni.

Sia $\{\sigma_{ij}^{(n)}\}_{i,j=1,n}$ la matrice inversa di $\{(\psi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1,n}$. La soluzione del problema $(4.1)_n$ è data da

$$(4.4)_n \qquad u = G_n f = G_0 f - \sum_{h,k}^{1,n} \sigma_{hk}^{(n)} (f, \varphi_h) \varphi_k .$$

Si può dare alla soluzione di $(4.1)_n$ una diversa forma. A tal fine supporremo che α_h $(h = 1 \dots)$ appartenga sia al codominio di G che a quello di G_0. È noto l'operatore di Green G_0 del problema base $(4.1)_0$. Sia $G_1 f$ la soluzione di $(4.1)_1$ che – se $((\alpha_1, \alpha_1)) = 1$ – si riscrive

$$(4.1)_1' \qquad (T_0 u, v)_H = (f, v) - ((u, \alpha_1))((T - T_0)\alpha_1, v)_H .$$

Sia $r_1 \in S$ tale che $(T_0 \alpha_1, v)_H = (r_1, v)$, $(\forall v \in H)$ cioè $\alpha_1 = G_0 r_1$. Posto $\varkappa_1 = \psi_1 - r_1$, si ha $((u, \alpha_1)) = (Tu, \alpha_1)_H - (T_0 u, \alpha_1)_H = (u, \psi_1) - (u, r_1) = (u, \varkappa_1)$ e la $(4.1)_1'$ diventa $(T_0 u, v)_H = (f - (\varkappa_1, u)\varkappa_1, v)$, $u \in H$, $(\forall v \in H)$ che, per $(4.1)_0$, è equivalente alle equazioni $u = G_0 f - c_1 G_0 \varkappa_1$, $c_1 = (\varkappa_1, u)$.

Inserendo, nella seconda di esse, l'espressione di u data dalla prima si ottiene $c_1 = (f, G_0 \varkappa_1)/(1 + (G_0 \varkappa_1, \varkappa_1))$. Pertanto la soluzione di $(4.1)_1$ è data da: $u = G_1 f = G_0 f - ((f, G_0 \varkappa_1)/(1 + (G_0 \varkappa_1, \varkappa_1))) G_0 \varkappa_1$.

Si supponga di conoscere $G_n f$ $(n > 0)$ cioè la soluzione di $(4.1)_n$. Possiamo supporre, senza ledere alla generalità, che il vettore α_{n+1} di W^{n+1} sia tale che

$$(4.5)_n \qquad ((\alpha_{n+1}, \alpha_h)) = 0 \quad (h = 1, \dots, n); \qquad ((\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1})) = 1 .$$

L'operatore T_{n+1} si riscrive come

$$(4.6) \qquad T_{n+1} u = T_n u + (T - T_0)(P_{n+1} - P_n) u .$$

$P_{n+1} - P_n$ è il proiettore ortogonale di W sulla varietà lineare generata da α_{n+1}, cioè, per ogni $u \in W$, $(P_{n+1} - P_n) u = ((u, \alpha_{n+1}))\alpha_{n+1}$.

Per (4.6) il vettore $u = G_{n+1} f$ è la soluzione di

$$(4.1)_{n+1}' \qquad (T_n u, v)_H = (f, v) - ((u, \alpha_{n+1}))((\alpha_{n+1}, v)) .$$

Sia $r_{n+1} \in S$ tale che $(T_0 \alpha_{n+1}, v)_H = (r_{n+1}, v)$ cioè $\alpha_{n+1} = G_0 r_{n+1}$. Se $\varkappa_{n+1} = \psi_{n+1} - r_{n+1}$, risulta $((u, \alpha_{n+1})) = (Tu, \alpha_{n+1})_H - (T_0 u, \alpha_{n+1})_H = (u, \varkappa_{n+1})$. Il problema $(4.1)_{n+1}'$ diventa $(T_n u, v)_H = (f - (u, \varkappa_{n+1})\varkappa_{n+1}, v)$, $u \in H$, $(\forall v \in H)$, che è equivalente a $u = G_n f - c_{n+1} G_n \varkappa_{n+1}$, $c_{n+1} = (u, \varkappa_{n+1})$, $u \in H$.

Inserendo nella seconda di queste equazioni l'espressione di u data dalla prima si trova $c_{n+1} = (f, G_n \varkappa_{n+1})/(1 + (G_n \varkappa_{n+1}, \varkappa_{n+1}))$, talché la soluzione di $(4.1)_{n+1}$, supposto noto l'operatore G_n, è data da

$$(4.7)_{n+1} \qquad G_{n+1} f = G_n f - ((f, G_n \varkappa_{n+1})/(1 + (G_n \varkappa_{n+1}, \varkappa_{n+1}))) G_n \varkappa_{n+1} .$$

Per l'unicità della soluzione di $(4.1)_n$, le due definizioni di G_n fornite da $(4.4)_n$ e da $(4.7)_n$ coincidono. Ciò risulta anche dalla seguente analisi, che desideriamo portare avanti per meglio descrivere la struttura analitica dell'operatore G_n. Si denoti con $\{\mathcal{G}_n\}_{n \geq 0}$ la successione di operatori definita da $(4.4)_n$ e sia $\{G_n\}_{n \geq 0}$ quella data da

$(4.7)_n$. Si ha che $\mathcal{G}_0 = G_0$ e, scegliendo α_1 tale che $((\alpha_1, \alpha_1)) = 1$, dall'essere $\varphi_1 = G_0 \varkappa_1$ si ottiene

$$\mathcal{G}_1 f = G_0 f - ((f, \varphi_1)/(\psi_1, \varphi_1))\, \varphi_1 = G_0 f - ((f, G_0 \varkappa_1)/(1 + (\varkappa_1, G_0 \varkappa_1)))\, G_0 \varkappa_1 = G_1 f.$$

Sia $\mathcal{G}_h = G_h$ $(h = 1, n)$. Se si sceglie $\alpha_{n+1} \perp W^n$ e $((\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1})) = 1$, allora

$$(4.8) \qquad b_{ij}^{(n+1)} = b_{ij}^{(n)} \quad (i, j = 1, n); \qquad b_{i,n+1}^{(n+1)} = 0 \quad (i = 1, n); \qquad b_{n+1,n+1}^{(n+1)} = 1.$$

Moltiplicando scalarmente per α_i $(i = 1, n+1)$, in W, il secondo e il terzo membro di $(4.4)_{n+1}$ e tenendo conto di

$$(4.9) \qquad ((\varphi_i, \alpha_j)) = (\psi_i, \varphi_j) - ((\alpha_i, \alpha_j)) \qquad (i, j = 1, \ldots, n+1)$$

si ottiene

$$(4.10) \qquad ((\mathcal{G}_{n+1} f, \alpha_i)) = \sum_{h,k}^{1,n+1} \sigma_{hk}^{(n+1)} (f, \varphi_h)((\alpha_k, \alpha_i)) \qquad (i = 1, \ldots, n+1).$$

Posto

$$d_k^{(n+1)} = \sum_{h=1}^{n+1} \sigma_{hk}^{(n+1)} (f, \varphi_h) \qquad (k = 1, \ldots, n+1),$$

la $(4.4)_{n+1}$ si può scrivere

$$(4.11) \qquad \mathcal{G}_{n+1} f = \mathcal{G}_n f - \sum_{k=1}^{n} (d_k^{(n+1)} - d_k^{(n)})\, \varphi_k - d_{n+1}^{(n+1)}\, \varphi_{n+1}.$$

Dal sistema (4.10) si ricava

$$d_k^{(n+1)} = \sum_{h=1}^{n+1} ((\mathcal{G}_{n+1} f, \alpha_h))\, b_{hk}^{(n+1)} \qquad (k = 1, \ldots, n+1),$$

che, per (4.8), diventa

$$d_k^{(n+1)} = \sum_{h=1}^{n} ((\mathcal{G}_{n+1} f, \alpha_h))\, b_{hk}^{(n)} \qquad (k = 1, \ldots, n), \qquad d_{n+1}^{(n+1)} = ((\mathcal{G}_{n+1} f, \alpha_{n+1})).$$

Inserendo (4.11) nell'espressione appena determinata di $d_k^{(n+1)}$ $(k = 1, \ldots, n)$ si trova

$$d_k^{(n+1)} = \sum_{h=1}^{n} ((\mathcal{G}_n f, \alpha_h))\, b_{hk}^{(n)} - \sum_{j=1}^{n} (d_j^{(n+1)} - d_j^{(n)}) \sum_{h=1}^{n} ((\varphi_j, \alpha_h))\, b_{hk}^{(n)} -$$
$$- d_{n+1}^{(n+1)} \sum_{h=1}^{n} ((\varphi_{n+1}, \alpha_h))\, b_{hk}^{(n)}, \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

che, tenendo conto di (4.9) e $(4.5)_n$ equivale a:

$$\sum_{h=1}^{n} b_{hk}^{(n)} \left\{ \sum_{j=1}^{n} (d_j^{(n+1)} - d_j^{(n)})\, (\varphi_j, \psi_h) + d_{n+1}^{(n+1)} (\varphi_{n+1}, \psi_h) \right\} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Essendo $\det\{b_{hk}^{(n)}\} \neq 0$ si ottiene il seguente sistema di n equazioni in n incognite

$$\sum_{j=1}^{n} (d_j^{(n+1)} - d_j^{(n)})\, (\varphi_j, \psi_h) = - d_{n+1}^{(n+1)} (\varphi_{n+1}, \psi_h) \qquad (h = 1, \ldots, n),$$

la cui soluzione è data da

$$d_j^{(n+1)} - d_j^{(n)} = -d_{n+1}^{(n+1)} \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij}^{(n)} (\varphi_{n+1}, \psi_i) \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

La (4.11) si riscrive, quindi,

$$\mathcal{G}_{n+1} f = \mathcal{G}_n f - d_{n+1}^{(n+1)} \left[\varphi_{n+1} - \sum_{i,j}^{1,n} \sigma_{ij}^{(n)} (\varphi_{n+1}, \psi_i) \, \varphi_j \right].$$

Dato che, per costruzione, $\varphi_{n+1} = \mathcal{G}_0 x_{n+1}$ e $(\varphi_{n+1}, \psi_i) = (x_{n+1}, \varphi_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ si trova

(4.12) $$\mathcal{G}_{n+1} f = \mathcal{G}_n f - d_{n+1}^{(n+1)} \, \mathcal{G}_n x_{n+1},$$

che, inserita in $d_{n+1}^{(n+1)} = ((\mathcal{G}_{n+1} f, \alpha_{n+1}))$, determina

$$d_{n+1}^{(n+1)} = (((\mathcal{G}_n f, \alpha_{n+1}))/(1 + ((\mathcal{G}_n x_{n+1}, \alpha_{n+1})))) = (f, \mathcal{G}_n x_{n+1})/(1 + (\mathcal{G}_n x_{n+1}, x_{n+1})).$$

Sostituendo questa espressione di $d_{n+1}^{(n+1)}$ nella (4.12) si ritrova la $(4.7)_{n+1}$ quindi $\mathcal{G}_{n+1} = G_{n+1}$.

4.1. *Gli operatori definiti da* $(4.4)_k$ *o* $(4.7)_k$ $(k = 1, \ldots, n+1)$ *costituiscono una successione monotona decrescente dello spazio* S:

(4.13) $$G_{n+1} < G_n < \ldots < G_1 < G_0.$$

Si scelga α_1 tale che $((\alpha_1, \alpha_1)) = 1$. Da $(4.7)_1$:

$$(f, G_1 f) = (f, G_0 f) - ((f, G_0 x_1)^2/(1 + (G_0 x_1, x_1))) \le (f, G_0 f),$$

cioè $G_1 < G_0$.

Si supponga che sia $G_n < G_{n-1} < \ldots < G_1 < G_0$. Da $(4.7)_{n+1}$ – assumendo α_{n+1} verificante le $(4.5)_n$ – si trova

$$(f, G_{n+1} f) = (f, G_n f) - (f, G_n x_{n+1})^2/(1 + (G_n x_{n+1}, x_{n+1})) \le (f, G_n f)$$

cioè la monotonia dei $\{G_k\}$ $(k = 1, \ldots, n+1)$ in S.

Sussiste il seguente fondamentale teorema di convergenza per la successione di operatori G_n:

4.2. *La successione di operatori* $\{G_n\}_{n \ge 0}$, *dello spazio* S, *converge uniformemente all'operatore* G.

Si supponga che esista una successione crescente di interi positivi $\{m_s\}_{s \ge 1}$ tale che $\lim_{s \to \infty} \|G_{m_s} - G\| > 0$. Per ogni $u \in S$: $G_n u = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{n,k} (u, u_{n,k}) \, u_{n,k}$.

Sia $\{n_i\}_{i \ge 1}$ una successione crescente di interi positivi contenuta in $\{m_s\}_{s \ge 1}$ tale che, per ogni k, $\{u_{n_i,k}\}_{i \ge 1}$ converga fortemente a u_k in S cioè $\lim_{i \to \infty} \|u_{n_i,k} - u_k\| = 0$ $(k \ge 1)$. Risulta $Gu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (u, u_k) \, u_k$.

Assegnato $\varepsilon > 0$, sia $m_\varepsilon > 1$ tale che $\mu_{0,m_\varepsilon} < \varepsilon/5$. Si scelga, inoltre, un intero i_ε tale che, per $i > i_\varepsilon$:

$$\sum_{k=1}^{m_\varepsilon - 1} |\mu_{n_i,k} - \mu_k| < \frac{\varepsilon}{5} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{m_\varepsilon - 1} \mu_k \|u_{n_i,k} - u_k\| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Per ogni $u \in S$, $\|u\| = 1$, e $i > i_\varepsilon$:

$$\|G_{n_i} u - Gu\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{n_i,k}(u, u_{n_i,k}) u_{n_i,k} - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (u, u_k) u_k \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{k=1}^{m_\varepsilon - 1} (\mu_{n_i,k}(u, u_{n_i,k}) u_{n_i,k} - \mu_k (u, u_{n_i,k}) u_{n_i,k}) \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{k=1}^{m_\varepsilon - 1} (\mu_k (u, u_{n_i,k}) u_{n_i,k} - \mu_k (u, u_k) u_{n_i,k}) \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{k=1}^{m_\varepsilon - 1} (\mu_k (u, u_k) u_{n_i,k} - \mu_k (u, u_k) u_k) \right\| + \left\{ \sum_{k=m_\varepsilon}^{\infty} \mu_{n_i,k}^2 (u, u_{n_i,k})^2 \right\}^{1/2} +$$

$$+ \left\{ \sum_{k=m_\varepsilon}^{\infty} \mu_k^2 (u, u_k)^2 \right\}^{1/2} \leq \sum_{k=1}^{m_\varepsilon - 1} |\mu_{n_i,k} - \mu_k| \, |(u, u_{n_i,k})| + \sum_{k=1}^{m_\varepsilon - 1} \mu_k |(u, u_{n_i,k} - u_k)| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_\varepsilon - 1} \mu_k |(u, u_k)| \, \|u_{n_i,k} - u_k\| + \mu_{0,m_\varepsilon} \left\{ \sum_{k=m_\varepsilon}^{\infty} (u, u_{n_i,k})^2 \right\}^{1/2} +$$

$$+ \mu_{0,m_\varepsilon} \left\{ \sum_{k=m_\varepsilon}^{\infty} (u, u_k)^2 \right\}^{1/2} \leq \sum_{k=1}^{m_\varepsilon - 1} |\mu_{n_i,k} - \mu_k| + 2 \sum_{k=1}^{m_\varepsilon - 1} \mu_k \|u_{n_i,k} - u_k\| + 2\mu_{0,m_\varepsilon} < \varepsilon$$

che, per l'arbitrarietà di u, implica $\|G_{n_i} - G\| \leq \varepsilon \ \forall i \geq i_\varepsilon$ contro l'ipotesi.

Come conseguenza dei Teoremi 4.1 e 4.2 si ha il Teorema

4.3. *La successione di PCO* $\{G_n\}_n$ *definita da* $(4.4)_n$ *o da* $(4.7)_n$ *approssima uniformemente «per eccesso» l'operatore* G *cioè*

$$G < G_{n+1} < G_n < G_0 \tag{4.14}$$

e

$$\lim_{n \to \infty} \|G_n - G\| = 0.$$

Sia $\{w_h\}$ $(h \geq 1)$ un sistema completo in S di vettori linearmente indipendenti e sia Q_n il proiettore ortogonale di S sulla varietà di dimensione finita Ω_n generata da $(w_1, \ldots, w_n)$. Si può considerare – per ogni n – l'inversa della matrice $\{(w_h, w_k)\}$ $(h, k = 1, \ldots, n)$ che si denota con $\{\beta_{h,k}^{(n)}\}$ $(h, k = 1, \ldots, n)$. Risulta, per ogni $u \in S$,

$$Q_n u = \sum_{h,k}^{1,n} \beta_{h,k}^{(n)} (u, w_h) w_k.$$

Si consideri l'operatore compatto e positivo di S: $G^{1/2} Q_n G^{1/2}$, dove $G^{1/2}$ denota la radice quadrata positiva dell'operatore G. Per ogni $u \in S$ si ha che

$$G^{1/2} Q_n G^{1/2} u = \sum_{i,j}^{1,n} \beta_{ij}^{(n)} (u, G^{1/2} w_i) G^{1/2} w_j. \tag{4.15}$$

4.4. *La successione di PCO (positivi ma non strettamente)* $\{G^{1/2} Q_n G^{1/2}\}_{n \geq 0}$ *con-*

verge uniformemente non decrescendo, nello spazio S, all'operatore G:

$$G^{1/2} Q_n G^{1/2} < G^{1/2} Q_{n+1} G^{1/2} < G \tag{4.16}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \|G^{1/2} Q_n G^{1/2} - G\| = 0 .$$

Infatti, per ogni $f \in S$,

$$(f, G^{1/2} Q_n G^{1/2} f) = (G^{1/2} f, Q_n G^{1/2} f) = \|Q_n G^{1/2} f\|^2 \leq \|Q_{n+1} G^{1/2} f\|^2 =$$

$$= (f, G^{1/2} Q_{n+1} G^{1/2} f) \leq \|G^{1/2} f\|^2 = (f, Gf) .$$

L'operatore $G - G^{1/2} Q_n G^{1/2} = G^{1/2}(I - Q_n) G^{1/2}$ – ristretto al complemento ortogonale del suo nucleo – è unitariamente equivalente a $(I - Q_n) G(I - Q_n)$, considerato in $\Omega_n^{\perp}$ (cfr. Teor. 2.2). Per la completezza del sistema $\{w_h\}$ $(h \geq 1)$, la successione di proiettori Q_n converge fortemente all'operatore identico I in S cioè $\lim_{n\to\infty} \|u - Q_n u\| = 0$, $\forall u \in S$. La successione $(I - Q_n) G(I - Q_n)$ $(n \geq 1)$ converge uniformemente a zero in S (cfr. [9, teor. 15.X, p. 116]), quindi, per l'equivalenza unitaria, $\lim_{n\to\infty} \|G^{1/2}(I - Q_n) G^{1/2}\| = \lim_{n\to\infty} \|(I - Q_n) G(I - Q_n)\| = 0$.

Assegnato il sistema $\{w_h\}_{h\geq 1}$ in S, per costruire l'operatore approssimante $G^{1/2} Q_n G^{1/2}$ si fa uso del sistema di vettori $\{G^{1/2} w_h\}_{h\geq 1}$, che, però, non si è in grado di determinare esplicitamente perché non si conosce l'operatore $G^{1/2}$. Per esprimere $G^{1/2} Q_n G^{1/2}$ mediante vettori noti si può procedere nel seguente modo. Si scelga un sistema di vettori $\{v_h\}_{h\geq 1}$, linearmente indipendenti, completo in S. Sia

$$\omega_h = G v_h \qquad (h \geq 1) . \tag{4.17}$$

Si può assumere (ma non è necessario) $v_h = \psi_h$ $(h \geq 1)$, nel qual caso $\omega_h = \alpha_h$ $(h \geq 1)$. La $\{\omega_h\}_{h\geq 1}$ (come la $\{\alpha_h\}_{h\geq 1}$) è una successione di vettori linearmente indipendenti, completa in H. Circa la determinazione effettiva degli ω_h si veda (così come per gli α_h) la successiva Sezione 5.

Si ponga

$$w_h = G^{1/2} v_h \qquad (h \geq 1) . \tag{4.18}$$

È facile vedere che $\{w_h\}_{h\geq 1}$ è una successione di vettori linearmente indipendenti, completa in S.

La successione $\{w_h\}_{h\geq 1}$ non sarebbe esplicitamente nota ma con questa scelta dei vettori $\{w_h\}$ si ha che $(w_i, w_j) = (G^{1/2} v_i, G^{1/2} v_j) = (v_i, G v_j) = (T\omega_i, \omega_j)_H$, e la matrice $\{\beta_{ij}^{(n)}\}$ altro non è che la matrice inversa di $\{(T\omega_i, \omega_j)_H\}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

L'operatore $G^{1/2} Q_n G^{1/2}$ si può, quindi, esprimere, ricordando (4.15), mediante i vettori noti $\{\omega_i\}_{i\geq 1}$: $G^{1/2} Q_n G^{1/2} u = \sum_{i,j}^{1,n} \beta_{ij}^{(n)} (u, \omega_i)\, \omega_j$.

Si sono costruite due successioni di PCO $\{G^{1/2} Q_n G^{1/2}\}$ e $\{G_n\}$ che rispettivamente – per i Teoremi 4.3 e 4.4 – *approssimano uniformemente «per difetto» e «per eccesso» l'operatore di Green G*, cioè $0 < G^{1/2} Q_n G^{1/2} < G^{1/2} Q_{n+1} G^{1/2} < G < G_{n+1} < G_n$ e $\lim_{n\to\infty} \|G^{1/2} Q_n G^{1/2} - G\| = \lim_{n\to\infty} \|G_n - G\| = 0$.

Siamo ora in grado di fornire una maggiorazione esplicita dell'errore che si commette quando si sostituisce l'operatore di Green G del problema (1.3) con gli operatori delle successioni $\{G_n\}$ e $\{G^{1/2} Q_n G^{1/2}\}$.

4.5. *Fissato* $n \geq 1$, *risulta*

$$(4.19)_1 \qquad \|G_n - G\| \leq \|G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2}\|;$$

$$(4.19)_2 \qquad \|G - G^{1/2} Q_n G^{1/2}\| \leq \|G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2}\|;$$

$$(4.19)_3 \qquad \lim_{n \to \infty} \|G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2}\| = 0.$$

Per (4.14) e (4.16) segue che, in S

$$(4.20) \qquad \begin{aligned} &0 < G_n - G < G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2};\\ &0 < G - G^{1/2} Q_n G^{1/2} < G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2}. \end{aligned}$$

Sia $\nu_{n,1} \geq \nu_{n,2} \geq \ldots \geq \nu_{n,h} \geq \ldots$ la successione di autovalori di $G_n - G$, $s_{n,1} \geq s_{n,2} \geq \ldots \geq s_{n,h} \geq \ldots$ la successione di autovalori di $G - G^{1/2} Q_n G^{1/2}$ e $\iota_{n,1} \geq \iota_{n,2} \geq \ldots \geq \iota_{n,h} \geq \ldots$ quella corrispondente a $G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2}$.

Per il classico teorema di Mini-Max e per (4.20) risulta

$$(4.21) \qquad 0 < \nu_{n,h} \leq \iota_{n,h}, \qquad 0 < s_{n,h} \leq \iota_{n,h} \qquad (h \geq 1).$$

Per la caratterizzazione variazionale del primo autovalore di un PCO si ha che $\nu_{n,1} = \|G_n - G\|$; $s_{n,1} = \|G - G^{1/2} Q_n G^{1/2}\|$ e $\iota_{n,1} = \|G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2}\|$ che, per (4.21), implica $(4.19)_1$ e $(4.19)_2$.

Si può scrivere $G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2} = (G_n - G) + G^{1/2}(I - Q_n) G^{1/2}$. Quindi $\|G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2}\| \leq \|G_n - G\| + \|G^{1/2}(I - Q_n) G^{1/2}\|$. Per la convergenza uniforme delle due successioni $\{G_n\}_n$ e $\{G^{1/2} Q_n G^{1/2}\}_n$ in S segue che

$$(4.22) \qquad \lim_{n \to \infty} \iota_{n,1} = \lim_{n \to \infty} \|G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2}\| = 0.$$

L'operatore

$$(G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2}) f = G_0 f - \sum_{h,k}^{1,n} \sigma_{hk}^{(n)} (f, \varphi_h) \varphi_k - \sum_{i,j}^{1,n} \beta_{ij}^{(n)} (f, \omega_i) \omega_j$$

è un PCO dello spazio S. È possibile calcolare un'approssimazione per eccesso del primo autovalore $\iota_{n,1}$ con la precisione prefissata (cfr. Sezione 3), se $G_0 \in \mathcal{J}^m$, per qualche m positivo. Dall'essere $G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2} < G_n < G_0$, risultano finiti gli invarianti ortogonali $\mathfrak{I}_s^m(G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2})$, $s \geq 0$. Sussiste, quindi, il Teorema:

4.6. *Sia* $G_0 \in \mathcal{J}^m$. *Fissato* $n \geq 1$, $r \geq 1$ *e considerato un sistema* $\{v_i\}$ *di vettori linearmente indipendenti, completo in S, siano* $\Lambda_{n,1}^{(r)} \geq \Lambda_{n,2}^{(r)} \geq \ldots \geq \Lambda_{n,r}^{(r)}$ *le radici dell'equazione* $\det\{a_{ij}^{(n)} - \Lambda b_{ij}\} = 0$ $(i, j = 1, \ldots, r)$, *dove*

$$a_{ij}^{(n)} = (G_0 v_i, v_j) - \sum_{h,k}^{1,n} \sigma_{hk}^{(n)} (v_i, \varphi_h)(\varphi_k, v_j) - \sum_{h,k}^{1,n} \beta_{hk}^{(n)} (v_i, \omega_h)(\omega_k, v_j)$$

e $b_{ij} = (v_i, v_j)$, $(i, j = 1, \ldots, r)$. *Posto*

$$(4.23) \qquad c_{n,r}^{(m)} = \left(\mathfrak{I}_1^m (G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2}) - \sum_{h=2}^{r} (\Lambda_{n,h}^{(r)})^m \right)^{1/m},$$

risulta:

$$\|G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2}\| \leq c_{n,r+1}^{(m)} \leq c_{n,r}^{(m)} \tag{4.24}$$

e

$$\lim_{r \to \infty} c_{n,r}^{(m)} = \|G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2}\|. \tag{4.25}$$

Le radici $\{\Lambda_{n,h}^{(r)}\}_{h=1,r}$ dell'equazione det $\{a_{ij}^{(n)} - \Lambda b_{ij}\} = 0$ $(i,j = 1, r)$ forniscono delle approssimazioni per difetto degli autovalori di $G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2}$ cioè $\Lambda_{n,h}^{(r)} \leq \iota_{n,h}$ $h = 1, \dots, r$. Inoltre la successione $\{\Lambda_{n,h}^{(r)}\}_{r \geq 1}$ converge non decrescendo a $\iota_{n,h}$, $h = 1, \dots, r$ [9, teor. 15.III, p. 117]. Applicando il metodo degli invarianti ortogonali per il calcolo delle approssimazioni per eccesso degli autovalori del PCO $G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2}$ si ottiene, per il primo autovalore:

$$\iota_{n,1} \leq \left(\mathfrak{I}_1^m (G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2}) - \sum_{h=2}^{r} (\Lambda_{n,h}^{(r)})^m \right)^{1/m}.$$

La successione $\{c_{n,r}^{(m)}\}_r$ – definita da (4.23) – converge non crescendo a $\iota_{n,1} = \|G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2}\|$, cioè (4.24) e (4.25) [9, teor. 19.I, p. 152].

Conseguenza dei Teoremi 4.5 e 4.6 è il fondamentale Teorema:

4.7. *Sia* $G_0 \in \mathfrak{J}^m$. *Fissato* $n \geq 1$, $r \geq 1$, *per ogni* $f \in S$:

$$\|G_n f - G f\| \leq c_{n,r}^{(m)} \|f\|; \qquad \|G f - G^{1/2} Q_n G^{1/2} f\| \leq c_{n,r}^{(m)} \|f\|,$$

con $c_{n,r}^{(m)}$ *definita da* (4.23).

Inoltre $\lim_{n \to \infty} c_{n,r}^{(m)} = 0$, *per ogni* $r \geq 1$.

5 Osservazione sulla costruzione dei sistemi di vettori $\{\alpha_h\}$ e $\{\omega_h\}$ verificanti le (2.5) e le (4.17)

Basta ovviamente riferirsi soltanto alla determinazione delle α_h.

In molti problemi può essere semplice determinare $\{\alpha_h\} \subset H$ e $\{\psi_h\} \subset S$ $(h \geq 1)$ tali da soddisfare (2.5). Se ciò non fosse possibile, come può accadere in talune applicazioni, assegnato un sistema completo $\{\psi_h\}_{h \geq 1}$ di vettori linearmente indipendenti nello spazio S, è possibile determinare, in modo approssimato, i vettori $\{\alpha_h\}_{h \geq 1} \subset H$ tali che $(T\alpha_h, v)_H = (\psi_h, v)$ $(\forall v \in H)$, ma in maniera da soddisfare alle esigenze di un calcolo numerico rigoroso. Sia dato un sistema $\{v_h\}$ $(h \geq 1)$ ortonormale e completo nello spazio $\mathcal{H}$, isomorfo come spazio di Hilbert a H, cioè tale che $(Tv_h, v_k)_H = \delta_{hk}$ $(h, k \geq 1)$ ([11]).

Risulta, per ogni $\Psi \in S$

$$\sum_{h=1}^{\infty} |(\Psi, v_h)|^2 < +\infty. \tag{5.1}$$

([11]) Andando incontro a maggiori complicazioni formali potrebbe scegliersi un sistema $\{v_h\}_h$ anche non ortonormale.

Se si considera lo sviluppo in serie di Fourier di $G\Psi$, considerato come elemento di $\mathcal{H}$: $G\Psi = \sum_{h=1}^{\infty} (TG\Psi, v_h)_H v_h$, risulta $\sum_{h=1}^{\infty} |(TG\Psi, v_h)_H|^2 < +\infty$ e – dall'essere $(TG\Psi, v_h)_H = (\Psi, v_h)$ $(h \geq 1)$ – segue la (5.1).

Posto $c_{hk} = (\psi_h, v_k)$ $(h, k \geq 1)$, per (5.1)

$$\sum_{h=1}^{\infty} c_{hk}^2 < +\infty \qquad (k \geq 1). \tag{5.2}$$

Data l'arbitrarietà della scelta dei sistemi dei vettori $\{\psi_h\}$ $(h \geq 1)$ in S e $\{v_h\}$ $(h \geq 1)$ in H, appare ragionevole supporre di saper maggiorare il resto della serie (5.2), cioè fissato comunque un indice $\nu > 0$ di conoscere $\varepsilon(\nu) > 0$ tale che $\sum_{h=\nu+1}^{\infty} c_{hk}^2 < \varepsilon(\nu)$ $(k \geq 1)$ e $\lim_{\nu \to \infty} \varepsilon(\nu) = 0$.

Si cerca $\{\alpha_h\}_{h \geq 1}$ in H tale che $(T\alpha_h, v_k)_H = c_{hk}$ $(h \geq 1, k \geq 1)$.

Per (5.2) la soluzione di questo sistema di infinite equazioni è data dalla serie di Fourier $\alpha_h = \sum_{k=1}^{\nu} c_{hk} v_k + \sum_{k>\nu} c_{hk} v_k = \alpha_h^{(\nu)} + \varepsilon_h^{(\nu)}$.

Si può scrivere $\varphi_h = G_0 \psi_h - \alpha_h^{(\nu)} - \varepsilon_h^{(\nu)} = \varphi_h^{(\nu)} - \varepsilon_h^{(\nu)}$.

Con questa scelta dei sistemi di vettori $\{\alpha_h\}$ e $\{\psi_h\}$ $(h \geq 1)$, si possono calcolare gli elementi della matrice inversa di $M = \{(\psi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1,n}$ con qualsiasi precisione richiesta [21]. Infatti si può scrivere $(\varphi_h, \psi_k) = (\varphi_h^{(\nu)}, \psi_k) - \sum_{i>\nu} c_{hi} c_{ki}$ $(h, k = 1, \ldots, n)$.

Posto $q_{hk}^{(\nu)} = (\varphi_h^{(\nu)}, \psi_k)$ e $\varepsilon_{hk}^{(\nu)} = -\sum_{i>\nu} c_{hi} c_{ki}$ $(h, k = 1, \ldots, n)$, risulta $(\varphi_h, \psi_k) = q_{hk}^{(\nu)} + \varepsilon_{hk}^{(\nu)}$ $(h, k = 1, \ldots, n)$, con $|\varepsilon_{hk}^{(\nu)}| = \left|\sum_{i>\nu} c_{hi} c_{ki}\right| \leq \left(\sum_{i>\nu} c_{hi}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i>\nu} c_{ki}^2\right)^{1/2} < \varepsilon(\nu)$.

La matrice M si è decomposta nella somma di una matrice $Q^{(\nu)} = ((q_{hk}^{(\nu)}))_{h,k=1,n}$ e di una matrice $H^{(\nu)} = ((\varepsilon_{hk}^{(\nu)}))_{h,k=1,n}$, i cui termini «errore» possono essere scelti piccoli a piacere. Essendo $\det M \neq 0$, si può scegliere ν tale che $\det Q^{(\nu)} \neq 0$. Si denoti con $|H^{(\nu)}|$ la norma di Frobenius della matrice $H^{(\nu)}$ cioè $|H^{(\nu)}| = \left(\sum_{i,j}^{1,n} (\varepsilon_{ij}^{(\nu)})^2\right)^{1/2}$.

Esiste $\eta(\nu) > 0$ tale che $|Q^{(\nu)^{-1}}|\,|H^{(\nu)}| < \eta(\nu)$, con $\lim_{\nu \to \infty} \eta(\nu) = 0$. Si può scegliere $\nu > 0$ tale che $\eta(\nu) < 1$.

Si ha $(Q^{(\nu)} + H^{(\nu)})^{-1} = (Q^{(\nu)}(I + Q^{(\nu)^{-1}} H^{(\nu)}))^{-1} = (I + Q^{(\nu)^{-1}} H^{(\nu)})^{-1} Q^{(\nu)^{-1}}$ e, dall'essere $|Q^{(\nu)^{-1}} H^{(\nu)}| \leq |Q^{(\nu)^{-1}}|\,|H^{(\nu)}| < \eta(\nu) < 1$,

$$(Q^{(\nu)} + H^{(\nu)})^{-1} = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h (Q^{(\nu)^{-1}} H^{(\nu)})^h Q^{(\nu)^{-1}} = Q^{(\nu)^{-1}} + \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h (Q^{(\nu)^{-1}} H^{(\nu)})^h Q^{(\nu)^{-1}}.$$

Siano $\sigma_{ij}^{(n,\nu)}$ gli elementi di $Q^{(\nu)^{-1}}$. Si ha

$$|\sigma_{ij}^{(n)} - \sigma_{ij}^{(n,\nu)}| \leq |(Q^{(\nu)} + H^{(\nu)})^{-1} - Q^{(\nu)^{-1}}| \leq \sum_{h=1}^{\infty} |Q^{(\nu)^{-1}} H^{(\nu)}|^h \cdot$$

$$\cdot |Q^{(\nu)^{-1}}| = |Q^{(\nu)^{-1}} H^{(\nu)}|\,|Q^{(\nu)^{-1}}| / (1 - |Q^{(\nu)^{-1}} H^{(\nu)}|) < [\eta(\nu)/(1 - \eta(\nu))]\,|Q^{(\nu)^{-1}}|.$$

Dato che $\eta(\nu)$ può essere scelto piccolo a piacere, segue che si possono approssimare gli elementi di M^{-1} con gli elementi di $Q^{(\nu)^{-1}}$ con la precisione voluta.

6. Calcolo della funzione di Green e formula di maggiorazione

Si supponga, come è lecito, che lo spazio S sia lo spazio di Hilbert $L^2(A,\mu)$ considerato nella Sezione 3.

Il prodotto scalare in $L^2(A,\mu)$, supposto reale, è quindi definito da

$$(u,v) = \int_A u(x)\, v(x)\, d\mu_x . \tag{6.1}$$

Si supponga che l'operatore di Green G_0 del problema base – considerato da $L^2(A,\mu)$ in sé stesso – sia un PCO che appartiene alla classe $\mathcal{T}^2$ cioè G_0^2 abbia la traccia di Hilbert-Schmidt finita. L'operatore G_0 ammette, quindi, una rappresentazione integrale del tipo

$$G_0 u = \int_A g_0(x,y)\, u(y)\, d\mu_y , \qquad u \in L^2(A,\mu), \tag{6.2}$$

con nucleo $g_0(x,y) \in L^2(A \times A, \mu \times \mu)$.

La funzione $g_0(x,y)$ dicesi *funzione di Green* del problema $(4.1)_0$.

Dall'essere $0 < G^{1/2} Q_n G^{1/2} < G < G_n < G_0$, quindi $\sum_{k \geq 1} \mu_k^2 \leq \sum_{k \geq 1} \mu_{n,k}^2 < +\infty$, segue che $G^{1/2} Q_n G^{1/2}, G$ e $G_n \in \mathcal{T}^2$. Come operatori dello spazio $L^2(A,\mu)$ ammettono anch'essi una rappresentazione integrale. Risulta

$$G^{1/2} Q_n G^{1/2} u = \int_A \hat{g}_n(x,y)\, u(y)\, d\mu_y , \tag{6.3}$$

dove $\hat{g}_n(x,y) = \sum_{i,j}^{1,n} \beta_{ij}^{(n)} (G^{1/2} w_i)_x (G^{1/2} w_j)_y$ è un nucleo che appartiene a $L^2(A \times A, \mu \times \times \mu)$;

$$G_n u = \int_A g_n(x,y)\, u(y)\, d\mu_y , \qquad u \in L^2(A,\mu), \tag{6.4}$$

dove, per $(4.4)_n$, (6.1) e (6.2),

$$g_n(x,y) = g_0(x,y) - \sum_{h,k}^{1,n} \sigma_{hk}^{(n)} \varphi_h(x)\, \varphi_k(y) \tag{6.5}$$

è un nucleo di $L^2(A \times A, \mu \times \mu)$ e

$$G u = \int_A g(x,y)\, u(y)\, d\mu_y , \qquad u \in L^2(A,\mu) \tag{6.6}$$

con $g(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k u_k(x)\, u_k(y) \in L^2(A \times A, \mu \times \mu)$, dove $\{u_k(x)\}_k$ è la successione di autofunzioni ortonormalizzate di G in $L^2(A,\mu)$. Le funzioni $g_n(x,y)$ e $g(x,y)$ sono, rispettivamente, le *funzioni di Green* dei problemi $(4.1)_n$ e (1.3).

Sia $H(A,\mu)$ la realizzazione dello spazio H in $L^2(A,\mu)$ mediante l'operatore unitario U che realizza S su $L^2(A,\mu)$ (cfr. Sezione 3).

Il seguente fondamentale Teorema dimostra la convergenza in $L^2(A\times A,\mu\times\mu)$ delle due successioni $\{g_n(x,y)\}_{n\geq 0}$ e $\{\hat{g}_n(x,y)\}_{n\geq 0}$ verso $g(x,y)$ e permette di maggiorare esplicitamente l'errore di approssimazione.

Avvertiamo che con $\{\omega_h(x)\}_{h\geq 1}$ indicheremo il sistema di funzioni corrispondente in $H(A,\mu)$ al sistema di vettori $\{\omega_h\}_{h\geq 1}$ di H, introdotto nella Sezione 4.

6.1. *Fissato* $n\geq 1$ *risulta*:

$$(6.7)_1 \qquad \int_A d\mu_x \int_A d\mu_y\, |g_n(x,y)-g(x,y)|^2 \leq \int_A d\mu_x \int_A d\mu_y\, |g_n(x,y)-\hat{g}_n(x,y)|^2\,;$$

$$(6.7)_2 \qquad \int_A d\mu_x \int_A d\mu_y\, |g(x,y)-\hat{g}_n(x,y)|^2 \leq \int_A d\mu_x \int_A d\mu_y\, |g_n(x,y)-\hat{g}_n(x,y)|^2\,;$$

$$(6.8) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_A d\mu_x \int_A d\mu_y\, |g_n(x,y)-\hat{g}_n(x,y)|^2 = 0\,.$$

Detta $\{\beta_{ij}^{(n)}\}$ *l'inversa della matrice* $\{(T\omega_i,\omega_j)_H\}$ $(i,j=1,\dots,n)$, *si ha*:

$$(6.9) \qquad \|g_n-\hat{g}_n\|^2 = \int_A d\mu_x \int_A d\mu_y\, \Big|g_0(x,y) - \sum_{i,j}^{1,n} \sigma_{ij}^{(n)}\varphi_i(x)\,\varphi_j(y) - \sum_{i,j}^{1,n}\beta_{ij}^{(n)}\omega_i(x)\,\omega_j(y)\Big|^2\,.$$

Dall'essere, per ogni $u\in L^2(A,\mu)$, $\|(G_n-G)\,u\|^2 \leq 2(\|G_n u\|^2+\|Gu\|^2)$ e $\|(G-G^{1/2}Q_n G^{1/2})\,u\|^2 \leq 2(\|Gu\|^2+\|G^{1/2}Q_nG^{1/2}u\|^2)$ si ha che $(G_n-G)^2 < 2(G_n^2+G^2)$ e $(G-G^{1/2}Q_nG^{1/2})^2 \leq 2(G^2+(G^{1/2}Q_nG^{1/2}u)^2)$.

L'operatore $G^{1/2}Q_nG^{1/2}$ è unitariamente equivalente all'operatore Q_nGQ_n, i cui autovalori $\mu_k^{(n)}$ $(k=1,\dots,n)$ forniscono dei difetti per gli autovalori di G (cfr. [9, teor.15.XIII, p. 117]), cioè $0<\mu_k^{(n)}\leq\mu_k$ $(k=1,\dots,n)$.

Se $r_{n,1}^2\geq r_{n,2}^2\geq\dots\geq r_{n,h}^2\geq\dots$ sono gli autovalori di $(G_n^2+G^2)$ e $\pi_{n,1}^2\geq\pi_{n,2}^2\geq\dots\geq\pi_{n,h}^2\geq\dots$ quelli di $G^2+(G^{1/2}Q_nG^{1/2}u)^2$, per il teorema di Weyl (cfr. [20, p. 445], [2, p. 163]) si deduce che, per ogni coppia di interi positivi i e j: $v_{n,i+j-1}^2 \leq 2r_{n,i+j-1}^2 \leq 2(\mu_{n,i}^2+\mu_j^2) \leq 2(\mu_{0,i}^2+\mu_j^2)$, da cui $v_{n,2h-1}^2 \leq 2(\mu_{0,h}^2+\mu_h^2) = q_{2h-1}^2$, $v_{n,2h}^2 \leq 2(\mu_{0,h+1}^2+\mu_h^2) = q_{2h}^2$ $(h\geq 1)$ e $s_{n,i+j-1}^2 \leq 2\pi_{n,i+j-1}^2 \leq 2(\mu_i^2 + (\mu_j^{(n)})^2) \leq 2(\mu_i^2+\mu_j^2)$, da cui $s_{n,2h-1}^2\leq 4\mu_h^2$, $s_{n,2h}^2\leq 2(\mu_{h+1}^2+\mu_h^2)$ $(h\geq 1)$.

Dato che G_n e $G\in\mathscr{T}^2$, si ha $\sum_{h=1}^{\infty} v_{n,h}^2 \leq \sum_{h=1}^{\infty} q_h^2 < +\infty$ e $\sum_{h=1}^{\infty} s_{n,h}^2 < \infty$, quindi, ricordando (4.21),

$$\int_A d\mu_x \int_A d\mu_y\, |g_n(x,y)-g(x,y)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} v_{n,k}^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} t_{n,k}^2 = \int_A d\mu_x \int_A d\mu_y\, |g_n(x,y)-\hat{g}_n(x,y)|^2$$

e

$$\int_A d\mu_x \int_A d\mu_y\, |g(x,y)-\hat{g}_n(x,y)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k}^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} t_{n,k}^2 = \int_A d\mu_x \int_A d\mu_y\, |g_n(x,y)-\hat{g}_n(x,y)|^2$$

cioè le $(6.7)_1$ e $(6.7)_2$.

Rimane da dimostrare l'ultima parte del Teorema.

Per (4.22) e per la monotonia degli autovalori

$$\lim_{n\to\infty} \iota^2_{n,k} = 0 \qquad (k \geq 2). \tag{6.10}$$

Dall'essere, per ogni $u \in L^2(A,\mu)$, $\|(G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2}) u\|^2 \leq 2[\|G_n u\|^2 + \|G^{1/2} Q_n G^{1/2} u\|^2]$ si ha che $(G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2})^2 \leq 2[(G_n)^2 + (G^{1/2} Q_n G^{1/2})^2]$.

Siano $\varkappa^2_{n,1} \geq \varkappa^2_{n,2} \geq \ldots \geq \varkappa^2_{n,h} \geq \ldots$ gli autovalori di $(G_n)^2 + (G^{1/2} Q_n G^{1/2})^2$.

Per i teoremi di Weyl ([20, p. 445], [2, p. 163]), per ogni coppia di indici i, j, risulta $\iota^2_{n,i+j-1} \leq 2\varkappa^2_{n,i+j-1} \leq 2(\mu^2_{n,i} + (\mu_j^{(n)})^2)$. Quindi

$$\iota^2_{n,2h-1} \leq 2(\mu^2_{n,h} + (\mu_h^{(n)})^2) \leq 2(\mu^2_{0,h} + \mu_h^2) = p^2_{2h-1};$$

$$\iota^2_{n,2h} \leq 2(\mu^2_{n,h+1} + (\mu_h^{(n)})^2) \leq 2(\mu^2_{0,h+1} + \mu_h^2) = p^2_{2h}.$$

La serie $\sum_{h\geq 1} p_h^2 < +\infty$. Scelto $\varepsilon > 0$ esiste $m(\varepsilon)$ tale che $\sum_{h>m(\varepsilon)} p_h^2 < \varepsilon/2$. Inoltre, per (6.10), esisterà un indice $n(\varepsilon)$ tale che – per ogni $n > n(\varepsilon)$ – $\sum_{h=1}^{m(\varepsilon)} \iota^2_{n,h} < \varepsilon/2$. Quindi, per ogni $n > n(\varepsilon)$

$$\|g_n - \hat{g}_n\|^2 = \sum_{h=1}^{\infty} \iota^2_{n,h} \leq \sum_{h=1}^{m(\varepsilon)} \iota^2_{n,h} + \sum_{h>m(\varepsilon)} p_h^2 < \varepsilon.$$

Il nucleo $\hat{g}_n(x,y)$ dell'operatore $G^{1/2} Q_n G^{1/2}$ si può esprimere mediante le funzioni note $\{\omega_i\}_{i\geq 1}$:

$$\hat{g}_n(x,y) = \sum_{i,j}^{1,n} \beta_{ij}^{(n)} \omega_i(x)\, \omega_j(y),$$

ottenendo, quindi, per (6.5), la rappresentazione:

$$\|g_n - \hat{g}_n\|^2 = \int_A d\mu_x \int_A d\mu_y \left| g_0(x,y) - \sum_{i,j}^{1,n} \sigma_{ij}^{(n)} \varphi_i(x)\, \varphi_j(y) - \sum_{i,j}^{1,n} \beta_{ij}^{(n)} \omega_i(x)\, \omega_j(y) \right|^2.$$

Dall'essere $\sum_{k\geq 1} \iota^2_{n,k} < +\infty$ segue che $G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2} \in \mathcal{T}^2$ e ammette una rappresentazione integrale con nucleo $g_n(x,y) - \hat{g}_n(x,y)$. Riveste qualche interesse scrivere esplicitamente l'espressione dell'invariante ortogonale $\mathfrak{I}_1^m(G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2})$, che interviene nella (4.23), nel caso $m = 2$ e $m = 3$.

Posto

$$g_0^{(2)}(x,y) = \int_A g_0(x,t)\, g_0(t,y)\, d\mu_t; \quad g_0^{(3)}(x,y) = \int_A g_0(x,t)\, g_0^{(2)}(t,y)\, d\mu_t$$

si ha:

$$\mathfrak{I}_1^2(G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2}) = \int_A g_0^{(2)}(x,x)\, d\mu_x - 2\sum_{i,j}^{1,n} \sigma_{ij}^{(n)} (\varphi_i, G_0 \varphi_j) -$$

$$-2\sum_{i,j}^{1,n} \beta_{ij}^{(n)} (\omega_i, G_0 \omega_j) + 2\sum_{i,j,h,k}^{1,n} \sigma_{ij}^{(n)} \beta_{hk}^{(n)} (\varphi_j, \omega_h)(\omega_k, \varphi_i) +$$

$$+ \sum_{i,j,h,k}^{1,n} \sigma_{ij}^{(n)} \sigma_{hk}^{(n)} (\varphi_j, \varphi_h)(\varphi_k, \varphi_i) + \sum_{i,j,h,k}^{1,n} \beta_{ij}^{(n)} \beta_{hk}^{(n)} (\omega_j, \omega_h)(\omega_k, \omega_i);$$

$$\Im_1^3(G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2}) = \int_A g_0^{(3)}(x,x)\, d\mu_x - 3\sum_{i,j}^{1,n} \sigma_{ij}^{(n)}(\varphi_i, G_0^2 \varphi_j) -$$
$$-3\sum_{i,j}^{1,n} \beta_{ij}^{(n)}(\omega_i, G_0^2 \omega_j) + 3\sum_{i,j,h,k}^{1,n} \sigma_{ij}^{(n)}\sigma_{hk}^{(n)}(\varphi_j, \varphi_h)(\varphi_k, G_0\varphi_i) +$$
$$+6\sum_{i,j,h,k}^{1,n} \sigma_{ij}^{(n)}\beta_{hk}^{(n)}(\varphi_j, \omega_h)(\omega_k, G_0\varphi_i) + 3\sum_{i,j,h,k}^{1,n} \beta_{ij}^{(n)}\beta_{hk}^{(n)}(\omega_j, \omega_h)(\omega_k, G_0\omega_i) -$$
$$-3\sum_{i,j,h,k,r,s}^{1,n} \sigma_{ij}^{(n)}\sigma_{hk}^{(n)}\beta_{rs}^{(n)}(\varphi_j, \varphi_h)(\varphi_k, \omega_r)(\omega_s, \varphi_i) - 3\sum_{i,j,h,k,r,s}^{1,n} \beta_{ij}^{(n)}\beta_{hk}^{(n)}\sigma_{rs}^{(n)} \cdot$$
$$\cdot(\omega_j, \omega_h)(\omega_k, \varphi_r)(\varphi_s, \omega_i) - \sum_{i,j,h,k,r,s}^{1,n} \sigma_{ij}^{(n)}\sigma_{hk}^{(n)}\sigma_{rs}^{(n)}(\varphi_j, \varphi_h)(\varphi_k, \varphi_r)(\varphi_s, \varphi_i) -$$
$$-\sum_{i,j,h,k,r,s}^{1,n} \beta_{ij}^{(n)}\beta_{hk}^{(n)}\beta_{rs}^{(n)}(\omega_j, \omega_h)(\omega_k, \omega_r)(\omega_s, \omega_i).$$

Il Teorema 6.1 permette di costruire concretamente la funzione di Green $g(x,y)$ del problema (1.3). Infatti, per $(6.7)_1$, $(6.7)_2$ e (6.8):

$$\begin{cases} g(x,y) = g_0(x,y) - \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i,j}^{1,n} \sigma_{ij}^{(n)} \varphi_i(x)\,\varphi_j(y), & x,y \in A, \\ g(x,y) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i,j}^{1,n} \beta_{ij}^{(n)} \omega_i(x)\,\omega_j(y), & x,y \in A, \end{cases} \tag{6.11}$$

dove il limite è da intendersi in $L^2(A \times A, \mu \times \mu)$. Si è inoltre indicato come si maggiora l'errore di approssimazione se, senza passare al limite, ci si arresta ai termini di indice n delle espressioni che compaiono nei secondi membri della (6.11).

Bibliografia

[1] A. Weinstein, *Études des spectres des équations aux derivées partielles de la théorie des plaques élastiques.* Memor. Sci. Math., vol. 88, Paris 1937.

[2] A. Weinstein - W. Stenger, *Methods of Intermediate Problems for Eigenvalues.* Academic Press, New York-London 1972.

[3] N. Aronszajn, *The Rayleigh-Ritz and A. Weinstein Methods for Approximation of Eigenvalues. I. Operators in a Hilbert Space. II. Differential Operators.* Proc. Nat. Acad. Sci., USA, vol. 34, 1948, 474-480, 594-601.

[4] N. Aronszajn, *Approximation Methods for Eigenvalues of Completely Continuous Symmetric Operators.* Proc. Symp. Spectral Theory and Differential Problems, Stillwater, Oklahoma 1951, 179-202.

[5] N. Bazley, *Lower bounds for eigenvalues with application to the helium atom.* Proc. Nat. Acad. Sci., USA, vol. 45, 1959, 850-853.

[6] N. Bazley, *Lower bounds for eigenvalues with application to the helium atom.* Phys. Rev., 129, 1960, 144-149.

[7] N. Bazley, *Lower bounds for eigenvalues.* J. Math. Mech., 10, 1961, 289-308.

[8] S. T. Kuroda, *On a generalization of the Weinstein-Aronszajn formula and the infinite determinant.* Sci. Papers College Gen. Educ. Univ. Tokio, vol. 11, 1961, 1-12.

[9] G. Fichera, *Linear Elliptic Differential Systems and Eigenvalue Problems.* Lecture notes in mathematics, vol. 8, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1965.
[10] W. Stenger, *On Fichera's transformation in the method of intermediate problems.* Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 48, fasc. 3, 1970, 302-305.
[11] W. Stenger, *Intermediate Problems for Eigenvalues.* Int. J. of Quantum Chemistry, vol. 8, 1974, 623-625.
[12] G. Fichera - M. A. Sneider, *Abstract and Numerical Aspects of the Problems Concerning the Computation of Eigenfrequencies of Continuous Systems.* Trends in Appl. of Pure Math. to Mech., Pitman Publ., 1976, 63-89.
[13] R. Gilbert - G. Newton, *Analytic Methods in Mathematical Physics.* Gordon & Breach, New York-London 1968.
[14] S. G. Mikhlin, *Variazionie metodi v Mathematischgeskoî Physike.* Phys.-Math. Lit., Moscow 1970.
[15] H. F. Weinberger, *Variational Methods for Eigenvalue Approximation.* Regional Conference Series in Appl. Math., 15, SIAM, Philadelphia 1974.
[16] G. Fichera, *Numerical and Quantitative Analysis.* Pitman Publ. Ltd., London-San Francisco-Melbourne 1978.
[17] G. Fichera, *Abstract and Numerical Aspects of Eigenvalue Theory.* Lecture Notes, Univ. Alberta, Edmonton, Canada 1973.
[18] G. Fichera, *The Neumann Eigenvalue Problem.* Applicable Analysis, Gordon and Breach Science Publ. Ltd., vol. 3, 1973, 213-240.
[19] G. Fichera, *Lezioni sulle trasformazioni lineari.* Ist. Mat., Univ. Trieste, ed. Veschi, Trieste 1954.
[20] W. Weyl, *Das asymptotische Verteilunggesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Holraumstrahlung).* Math. Ann., 71, 1911, 441-479.
[21] G. Fichera, *Upper bounds for orthogonal invariants of some positive linear operators.* Rend. Ist. Mat. Trieste, vol. I, fasc. I, 1969, 1-8.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Roma «La Sapienza
Piazzale A. Moro, 2 - 00185 Roma