Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Aldo Maceri

Sul problema di contatto tra piastre

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **3** (1992), n.1, p. 61–68.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1992_9_3_1_61_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1992.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 3:61-68 (1992)

Meccanica dei solidi. — *Sul problema di contatto tra piastre.* Nota (*) di ALDO MACERI, presentata dal Socio E. Giangreco.

ABSTRACT. — *On the contact problem between elastic plates.* We analyze the contact problem between two parallel thin linearly elastic plates under transverse loads. The initial distance between the two equal plates (both are clamped at the boundary) is equal to δ. The contact between the deformed plates is assumed to be elastic. The equilibrium problem is formulated in variational form via virtual work or, equivalently, in terms of minimum of the total energy. We use the mathematical framework of the theory of variational inequalities and we give different equivalent formulations of the non linear elastic problem introduced above. Finally, we obtain existence and uniqueness results.

KEY WORDS: Unilateral problems; Plates; Contact problems.

RIASSUNTO. — Si studia il problema di contatto tra due piastre sottili linearmente elastiche, incastrate al bordo, poste inizialmente a distanza δ e trasversalmente caricate. Si fa l'ipotesi che il contatto tra le due piastre, a deformazione avvenuta, sia privo di attrito. Il problema dell'equilibrio elastico è formulato per via variazionale in termini di lavori virtuali o, equivalentemente, di minimo del funzionale dell'energia. Il quadro analitico di riferimento è quello della teoria delle disequazioni variazionali nell'ambito dell'Analisi funzionale. Si discutono formulazioni equivalenti del problema proposto e si perviene a risultati di esistenza e unicità della soluzione.

1. INTRODUZIONE

Si studia il problema di determinare la configurazione deformata di due piastre linearmente elastiche i cui piani, paralleli, distino di $\delta > 0$.

La prima piastra occupa nel suo piano medio la regione limitata e connessa Ω. Il riferimento $Ox_1 x_2 x_3$ è cartesiano ortogonale e antiorario, con gli assi x_1, x_2 contenuti nel piano medio della piastra; si orienta l'asse x_3 in modo che i punti della seconda piastra, che ha egual forma in pianta, abbiano coordinate x_1, x_2, δ. Le piastre sono incastrate rigidamente al bordo.

Sulla prima [risp. seconda] piastra sono applicate forze concentrate $F_{11}, \ldots, F_{1m}$ [risp. $F_{21}, \ldots, F_{2m}$] nei punti $y_1, \ldots, y_m$ di Ω e forze (essenzialmente limitate) q_{10} [risp. q_{20}] distribuite su Ω.

I carichi (trasversali) applicati e gli spostamenti v sono positivi nel verso di x_3.

I momenti di piastra sono denotati con M, nel modo appresso precisato; il simbolo ν_1 [risp. ν_2] denota il modulo di Poisson della prima [risp. seconda] piastra; il simbolo D_1 [risp. D_2] denota la rigidità flessionale della prima [risp. seconda] piastra.

Il problema di contatto viene formulato per via energetica e ne sono date formulazioni variazionali e distribuzionali equivalenti. Di tali problemi è dimostrata l'esistenza e l'unicità della soluzione.

(*) Pervenuta all'Accademia il 23 ottobre 1991.

2. Formulazione del problema

Siano $\forall i \in \{1,2\}$ $\nu_i \in]0, 1/2[$, $D_i \in]0, \infty[$. Sia $\Omega \in \mathcal{R}^{(0),1}$ [5], $m \in N$ e $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$ $y_j \in \Omega$, $(F_{1j}, F_{2j}) \in \mathbf{R}^2$. Per ogni $i \in \{1,2\}$ sia $q_{i0} \in L^\infty(\Omega)$. Poniamo $\forall i \in \{1,2\}$ e $\forall v_i \in H^2(\Omega)$ $M_{v_i x_1} = -D_i(\partial^2 v_i/\partial x_1^2 + \nu_i \partial^2 v_i/\partial x_2^2)$, $M_{v_i x_2} = -D_i(\partial^2 v_i/\partial x_2^2 + \nu_i \partial^2 v_i/\partial x_1^2)$, $M_{v_i x_1 x_2} = -D_i(1-\nu_i)\,\partial^2 v_i/\partial x_1 \partial x_2$.

Poniamo

$$K = \{(v_1, v_2) \in (H_0^2(\Omega))^2 : v_1(x) \leq v_2(x) + \delta \ \ \forall x \in \overline{\Omega}\} \ \text{ e},$$

$$\langle q_i, v\rangle = \int_\Omega q_{i0}\, v\, dx + \sum_{j=1}^m F_{ij} v(y_j) \qquad \forall i \in \{1,2\}, \ \ \forall v \in H^2(\Omega).$$

Evidentemente K è un sottoinsieme non vuoto, chiuso e convesso di $(H_0^2(\Omega))^2$ munito della norma di $(H^2(\Omega))^2$.

Del pari ovvio è che $\forall i \in \{1,2\}$ $q_i \in H^{-1}(\Omega)$.

Poniamo $\forall v = (v_1, v_2) \in K$ $\Omega_v = \{x \in \Omega : v_1(x) < v_2(x) + \delta\}$ e rileviamo che Ω_v è un aperto di $\mathbf{R}^2$.

Poniamo ancora $\forall (v_1, v_2) \in (H^2(\Omega))^2$

$$J(v_1, v_2) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(-M_{v_1 x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + 2M_{v_1 x_1 x_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} - M_{v_1 x_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) dx -$$

$$- \langle q_1, v_1\rangle + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(-M_{v_2 x_1} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + 2M_{v_2 x_1 x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} - M_{v_2 x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) dx - \langle q_2, v_2\rangle .$$

Poniamo infine $\forall u = (u_1, u_2) \in K$ $K_u = \{(w_1, w_2) \in (H_0^2(\Omega))^2 : \exists \varepsilon \in]0, +\infty[$ e $\exists (v_1, v_2) \in K$: $w_1 = \varepsilon(v_1 - u_1)$ e $w_2 = \varepsilon(v_2 - u_2)\}$.

Evidentemente $\forall (v_1, v_2) \in (H_0^2(\Omega))^2$

$$J(v_1, v_2) = \frac{1}{2} D_1 \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right)^2 dx - \langle q_1, v_1\rangle + \frac{1}{2} D_2 \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right)^2 dx - \langle q_2, v_2\rangle$$

e, posto $\forall (v_1, v_2) \in (H_0^2(\Omega))^2$ $J_1(v_1, v_2) = J(v_1, v_2) + \langle q_1, v_1\rangle + \langle q_2, v_2\rangle$, risulta

(1) $\exists c \in]0, +\infty[: \forall (v_1, v_2) \in (H^2(\Omega))^2$

$$J_1(v_1, v_2) \geq c \int_\Omega \left(\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right) dx +$$

$$+ c \int_\Omega \left(\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right) dx .$$

Procedendo come in [8, 4] si prova che J è convesso e differenziabile secondo

Gateaux in $(H^2(\Omega))^2$ e che risulta

(2) $\quad \forall (u_1, u_2), (v_1, v_2) \in (H_0^2(\Omega))^2$

$$J'((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = \int_\Omega \left(-M_{u_1 x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + 2M_{u_1 x_1 x_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} - M_{u_1 x_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) dx -$$

$$- \langle q_1, v_1 \rangle + \int_\Omega \left(-M_{u_2 x_1} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + 2M_{u_2 x_1 x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} - M_{u_2 x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) dx - \langle q_2, v_2 \rangle .$$

Ciò premesso, il problema di contatto tra piastre elastiche di egual forma in pianta poste a distanza iniziale δ ed incastrate al bordo viene formulato come problema di minimo per il funzionale dell'energia, nel modo che segue

(P$_1$) $\qquad (u_1, u_2) \in K\colon J(u_1, u_2) \leq J(v_1, v_2) \qquad \forall (v_1, v_2) \in K.$

3. Esistenza e unicità della soluzione

Allo scopo di stabilire risultati di esistenza e unicità della soluzione del problema (P$_1$), dimostriamo anzitutto un teorema preliminare.

Teorema 1. Le proposizioni seguenti sono equivalenti

1) (u_1, u_2) è soluzione del problema (P$_1$).

2) (u_1, u_2) è soluzione della disequazione variazionale

(P$_2$) $\quad (u_1, u_2) \in K\colon$

$$\int_\Omega \left(-M_{u_1 x_1} \frac{\partial^2 (v_1 - u_1)}{\partial x_1^2} + 2M_{u_1 x_1 x_2} \frac{\partial^2 (v_1 - u_1)}{\partial x_1 \partial x_2} - \right.$$

$$\left. -M_{u_1 x_2} \frac{\partial^2 (v_1 - u_1)}{\partial x_2^2} \right) dx - \langle q_1, v_1 - u_1 \rangle + \int_\Omega \left(-M_{u_2 x_1} \frac{\partial^2 (v_2 - u_2)}{\partial x_1^2} + \right.$$

$$\left. +2M_{u_2 x_1 x_2} \frac{\partial^2 (v_2 - u_2)}{\partial x_1 \partial x_2} - M_{u_2 x_2} \frac{\partial^2 (v_2 - u_2)}{\partial x_2^2} \right) dx - \langle q_2, v_2 - u_2 \rangle \geq 0 \qquad \forall (v_1, v_2) \in K.$$

Dimostrazione. 1)$\Rightarrow$2). Siano (u_1, u_2) soluzione del problema (P$_1$) e $(v_1, v_2) \in K$. Ovviamente $\forall t \in]0,1[\quad (1-t)(u_1, u_2) + t(v_1, v_2) \in K$; pertanto $J(u_1, u_2) \leq J((1-t) \cdot (u_1, u_2) + t(v_1, v_2))$. Ne segue $\big(J((1-t)(u_1, u_2) + t(v_1, v_2)) - J(u_1, u_2)\big)/t \geq 0$ e di qui, essendo J differenziabile secondo Gateaux in $(H^2(\Omega))^2$, $J'((u_1, u_2), (v_1, v_2) - (u_1, u_2)) \geq 0$.

2)$\Rightarrow$1). Siano (u_1, u_2) soluzione del problema (P$_2$) e $(v_1, v_2) \in K$. Per la convessità di J, $\forall t \in]0,1[$ risulta $J((u_1, u_2) + t((v_1, v_2) - (u_1, u_2))) \leq J(u_1, u_2) + t(J(v_1, v_2) - J(u_1, u_2))$; pertanto $\big(J((u_1, u_2) + t((v_1, v_2) - (u_1, u_2))) - J(u_1, u_2)\big)/t \leq J(v_1, v_2) - J(u_1, u_2)$ e ciò implica che $0 \leq J'((u_1, u_2), (v_1, v_2) - (u_1, u_2)) \leq J(v_1, v_2) - J(u_1, u_2)$. $\square$

Circa l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema (P_1) si ha quanto segue.

TEOREMA 2. Il problema (P_1) ammette una e una sola soluzione.

DIMOSTRAZIONE. Basta, per il Teorema 1, provare che il problema (P_2) ammette soluzione unica.

Poniamo dunque $\forall (v_1, v_2) \in (H^2(\Omega))^2$ $\langle q, v\rangle = \langle q_1, v_1\rangle + \langle q_2, v_2\rangle$ e osserviamo che il problema (P_2) si scrive

$$u \in K: \; J_1'(u, v-u) \geqslant \langle q, v-u\rangle \quad \forall v \in K. \tag{3}$$

Ciò premesso, proviamo che $J_1'(u,v)$ è coercitiva su $(H_0^2(\Omega))^2$. Procedendo per assurdo, ammettiamo che la proprietà $\exists c > 0$: $\forall v \in (H_0^2(\Omega))^2$ $J_1'(v,v) \geqslant c\|v\|_{(H^2(\Omega))^2}$ sia falsa. Pertanto $\forall n \in N$ $\exists v_n = (v_{1n}, v_{2n}) \in (H_0^2(\Omega))^2$: $J_1'(v_n, v_n) < \|v_n\|^2_{(H^2(\Omega))^2}/n$. Posto $\forall n \in N$ $w_n = (v_{1n}/\|v_n\|_{(H^2(\Omega))^2},\; v_{2n}/\|v_n\|_{(H^2(\Omega))^2})$, si ha

$$\forall n \in N \quad \|w_n\|_{(H^2(\Omega))^2} = 1, \quad \|w_{1n}\|_{H^2(\Omega)} \leqslant 1, \quad \|w_{2n}\|_{H^2(\Omega)} \leqslant 1, \tag{4}$$

$$\forall n \in N \quad 0 \leqslant J_1'(w_n, w_n) = 2J_1(w_n) < 1/n. \tag{5}$$

Poniamo $\forall (v_1, v_2) \in (H_0^2(\Omega))^2$

$$\Phi_1(v_1) = D_1 \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right)^2 dx, \qquad \Phi_2(v_2) = D_2 \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}\right)^2 dx;$$

naturalmente Φ_1 e Φ_2 sono convessi su $H_0^2(\Omega)$, ivi differenziabili secondo Gateaux e risulta $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in H_0^2(\Omega)$

$$\Phi_1'(u_1, v_1) = D_1 \int_\Omega \left(-M_{u_1 x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + 2M_{u_1 x_1 x_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} - M_{u_1 x_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right) dx,$$

$$\Phi_2'(u_2, v_2) = D_2 \int_\Omega \left(-M_{u_2 x_1} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + 2M_{u_2 x_1 x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} - M_{u_2 x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}\right) dx.$$

Parimenti ovvio è che le applicazioni $\Phi_1'(u_1, \cdot)$, $\Phi_2'(u_2, \cdot)$, sono, $\forall u_1, u_2 \in H_0^2(\Omega)$, lineari e continue su $H_0^2(\Omega)$. Pertanto Φ_1 e Φ_2 sono debolmente semicontinui inferiormente su $H_0^2(\Omega)$. Conseguentemente per ogni successione di elementi di $H_0^2(\Omega)$ convergente debolmente verso φ in $H^2(\Omega)$ risulta

$$\Phi_1(\varphi) \leqslant \lim_{n \to +\infty}{}' \, \Phi_1(\varphi_n), \qquad \Phi_2(\varphi) \leqslant \lim_{n \to +\infty}{}' \, \Phi_2(\varphi_n). \tag{6}$$

Dalle (4) segue che esiste una successione estratta della $\{w_{1w}\}$ [risp. $\{w_{2n}\}$], che denotiamo con lo stesso simbolo, convergente debolmente in $H^2(\Omega)$ e fortemente in $H^1(\Omega)$ verso un elemento w_1 [risp. w_2] di $H_0^2(\Omega)$. Risulta per la (5) $\forall n \in N$ $0 \leqslant 2\Phi_1(w_{1n}) < 1/n$, $0 \leqslant 2\Phi_2(w_{2n}) < 1/n$ sicché

$$\lim_{n \to +\infty} \Phi_1(w_{1n}) = \lim_{n \to +\infty} \Phi_2(w_{2n}) = 0; \tag{7}$$

ne consegue, per le (6), $\Phi_1(w_1)=0$, $\Phi_2(w_2)=0$ e di qui, per le (1)

$$\int_\Omega \left(\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2^2} \right)^2 \right) dx = 0,$$

$$\int_\Omega \left(\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} \right)^2 \right) dx = 0.$$

Pertanto $\partial^2 w_1/\partial x_1^2 = \partial^2 w_1/\partial x_1 \partial x_2 = \partial^2 w_1/\partial x_2^2 = \partial^2 w_2/\partial x_1^2 = \partial^2 w_2/\partial x_1 \partial x_2 = \partial^2 w_2/\partial x_2^2 = 0$ q.o. su Ω e ciò implica, essendo Ω connesso, che w_1 e w_2 sono polinomi su $\mathbf{R}^2$ al più di primo grado.

D'altro canto w_1 e w_2, in quanto limiti forti in $H^1(\Omega)$ di successioni di elementi di $H_0^1(\Omega)$, appartengono a $H_0^1(\Omega)$.

Conseguentemente

$$w_1 = w_2 = 0. \tag{8}$$

Dalle (7) e (1) si trae

$$\lim_{n\to+\infty} \partial^2 w_{1n}/\partial x_1^2 = \lim_{n\to+\infty} \partial^2 w_{1n}/\partial x_1 \partial x_2 = \lim_{n\to+\infty} \partial^2 w_{1n}/\partial x_2^2 = \lim_{n\to+\infty} \partial^2 w_{2n}/\partial x_1^2 =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \partial^2 w_{2n}/\partial x_1 \partial x_2 = \lim_{n\to+\infty} \partial^2 w_{2n}/\partial x_2^2 = 0 \quad \text{fortemente in } L^2(\Omega);$$

di qui e dal fatto che, per la (8)

$$\lim_{n\to+\infty} w_{1n} = \lim_{n\to+\infty} w_{2n} = 0 \quad \text{fortemente in } H^1(\Omega),$$

segue

$$\lim_{n\to+\infty} w_{1n} = \lim_{n\to+\infty} w_{2n} = 0 \quad \text{fortemente in } H^2(\Omega),$$

sicché $\lim_{n\to+\infty} \|w_n\|_{(H^2(\Omega))^2} = 0$ e ciò, per la (4), è assurdo.

Resta così provata la coercitività di $J_1'(u,v)$ su $(H_0^2(\Omega))^2$. Osserviamo ora che $(H_0^2(\Omega))^2$ è uno spazio di Hilbert reale, che $J_1'(u,v)$ è una forma bilineare continua su $(H_0^2(\Omega))^2$, che q è un operatore lineare su $(H_0^2(\Omega))^2$. Conseguentemente [3], essendo K un sottoinsieme di $H_0^2(\Omega)$ non vuoto, chiuso e convesso, la disequazione variazionale (3), e con essa il problema (P_1), ammette soluzione unica. □

A completamento dello studio del problema (P_1), diamo infine il seguente risultato.

Teorema 3. Le proposizioni seguenti sono equivalenti

1) (u_1, u_2) è soluzione del problema (P_1).

2) (u_1, u_2) è soluzione della disequazione variazionale

$$u \in K: \ J'(u,v) \geqslant 0 \quad \forall v \in \overline{K_u}. \tag{P$_3$}$$

Dimostrazione. 1) ⇒ 2). Sia $u = (u_1, u_2) \in K$ la soluzione del problema (P_1) e sia

$v = (v_1, v_2) \in \overline{K_u}$, sicché esistono una successione $\{(v_{1n}, v_{2n})\}$ di elementi di K_u tale che

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\lim_{n \to +\infty} v_{1n} = v_1 \quad \text{fortemente in } H^2(\Omega), \\ &\lim_{n \to +\infty} v_{2n} = v_2 \quad \text{fortemente in } H^2(\Omega); \end{aligned}$$

una successione $\{\varepsilon_n\}$ di reali positivi e una successione $\{(w_{1n}, w_{2n})\}$ di elementi di K tali che $\forall n \in \mathbf{N}$ $v_{1n} = \varepsilon_n (w_{1n} - u_1)$, $v_{2n} = \varepsilon_n (w_{2n} - u_2)$.

Per il Teorema 1 u è soluzione del problema (P_2); conseguentemente

$$J'((u_1, u_2), (v_{1n}, v_{2n})) = J'((u_1, u_2), \varepsilon_n((w_{1n}, w_{2n}) - (u_1, u_2))) =$$
$$= \varepsilon_n J'((u_1, u_2), (w_{1n}, w_{2n}) - (u_1, u_2)) \geqslant 0.$$

Di qui e dalle (9) si trae $J'(u, v) \geqslant 0$.

2) $\Rightarrow$ 1) Siano $u = (u_1, u_2)$ soluzione del problema (P_3), v un elemento di K. Ovviamente $v - u \in \overline{K_u}$; pertanto $J'(u, v - u) \geqslant 0$ $\forall v \in K$.

Di qui e dal Teorema 1 segue la tesi. $\square$

Osservazione. Rileviamo che se (u_1, u_2) è la soluzione del problema (P_1), allora (u_1, u_2) è soluzione del problema ai limiti distribuzionale [1]

(P_4) $\quad (u_1, u_2) \in (H^2(\Omega))^2$:

$$\begin{cases} -\partial^2 M_{u_1 x_1}/\partial x_1^2 + 2\partial^2 M_{u_1 x_1 x_2}/\partial x_1 \partial x_2 - \partial^2 M_{u_1 x_2}/\partial x_2^2 - \\ \qquad -\partial^2 M_{u_2 x_1}/\partial x_1^2 + 2\partial^2 M_{u_2 x_1 x_2}/\partial x_1 \partial x_2 - \partial^2 M_{u_2 x_2}/\partial x_2^2 = q_1 + q_2 \quad \text{su } \Omega, \\ -\partial^2 M_{u_1 x_1}/\partial x_1^2 + 2\partial^2 M_{u_1 x_1 x_2}/\partial x_1 \partial x_2 - \partial^2 M_{u_1 x_2}/\partial x_2^2 - q_1 \leqslant 0 \quad \text{su } \Omega, \\ -\partial^2 M_{u_2 x_1}/\partial x_1^2 + 2\partial^2 M_{u_2 x_1 x_2}/\partial x_1 \partial x_2 - \partial^2 M_{u_2 x_2}/\partial x_2^2 - q_2 \geqslant 0 \quad \text{su } \Omega, \\ -\partial^2 M_{u_1 x_1}/\partial x_1^2 + 2\partial^2 M_{u_1 x_1 x_2}/\partial x_1 \partial x_2 - \partial^2 M_{u_1 x_2}/\partial x_2^2 - q_1 = 0 \quad \text{su } \Omega_u, \\ -\partial^2 M_{u_2 x_1}/\partial x_1^2 + 2\partial^2 M_{u_2 x_1 x_2}/\partial x_1 \partial x_2 - \partial^2 M_{u_2 x_2}/\partial x_2^2 - q_2 = 0 \quad \text{su } \Omega_u, \\ u_1 \leqslant u_2 + \delta \quad \text{su } \overline{\Omega}, \\ u_1 = 0 \quad s\text{-q.o. su } \partial\Omega, \\ u_2 = 0 \quad s\text{-q.o. su } \partial\Omega, \\ \partial u_1/\partial n = 0 \quad s\text{-q.o. su } \partial\Omega, \\ \partial u_2/\partial n = 0 \quad s\text{-q.o. su } \partial\Omega. \end{cases}$$

[1] Col simbolo $d\bullet/dn$ si denota la derivata di $\bullet$ secondo la direzione ed il verso della normale esterna a $\partial\Omega$; col simbolo s la misura curvilinea su $\partial\Omega$ [5].

Sia infatti (u_1, u_2) la soluzione del problema (P_1). Circa la prima condizione richiesta nel problema (P_4), rileviamo che $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, risultando $(u_1+\varphi, u_2+\varphi) \in K$, $(u_1-\varphi, u_2-\varphi) \in K$, si ha

$$\int_\Omega \left(-M_{u_1 x_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + 2M_{u_1 x_1 x_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} - M_{u_1 x_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}\right) dx - \int_\Omega q_{10}\, \varphi\, dx -$$
$$- \sum_{j=1}^{m} F_{1j}\, \varphi(y_j) + \int_\Omega \left(-M_{u_2 x_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + 2M_{u_2 x_1 x_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} - M_{u_2 x_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}\right) dx -$$
$$- \int_\Omega q_{20}\, \varphi\, dx - \sum_{j=1}^{m} F_{2j}\, \varphi(y_j) = 0.$$

Pertanto

$$-\partial^2 M_{u_1 x_1}/\partial x_1^2 + 2\partial^2 M_{u_1 x_1 x_2}/\partial x_1 \partial x_2 - \partial^2 M_{u_1 x_2}/\partial x_2^2 -$$
$$-\partial^2 M_{u_2 x_1}/\partial x_1^2 + 2\partial^2 M_{u_2 x_1 x_2}/\partial x_1 \partial x_2 - \partial^2 M_{u_2 x_2}/\partial x_2^2 = q_1 + q_2 \qquad \text{su } \Omega.$$

Circa la seconda condizione richiesta nel problema (P_4), basta osservare che $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che $\varphi \geq 0$, risultando $(u_1 - \varphi, u_2) \in K$, si ha

$$-\left(\int_\Omega \left(-M_{u_1 x_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + 2M_{u_1 x_1 x_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} - M_{u_1 x_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}\right) dx - \int_\Omega q_{10}\, \varphi\, dx - \sum_{j=1}^{m} F_{1j}\, \varphi(y_j)\right) \geq 0$$

sicché $-\partial^2 M_{u_1 x_1}/\partial x_1^2 + 2\partial^2 M_{u_1 x_1 x_2}/\partial x_1 \partial x_2 - \partial^2 M_{u_1 x_2}/\partial x_2^2 \leq q_1$ su Ω.

Con ragionamento analogo si prova la terza condizione richiesta nel problema (P_4). Circa la quarta condizione richiesta nel problema (P_4), sia $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_u)$.

Se $\varphi = 0$, risulta

$$\int_\Omega \left(-M_{u_1 x_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + 2M_{u_1 x_1 x_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} - M_{u_1 x_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}\right) dx - \int_\Omega q_{10}\, \varphi\, dx - \sum_{j=1}^{m} F_{1j}\, \varphi(y_j) = 0.$$

Se $\varphi \neq 0$, sia $\varepsilon \in]0, (\min_{x \in \operatorname{supp}\varphi} (u_2(x) + \delta - u_1(x)))/\max_{\overline{\Omega}} |\varphi|[$.

Poichè $\forall x \in \operatorname{supp}\varphi$ risulta $\pm\, \varepsilon\varphi(x) \leq \varepsilon|\varphi(x)| \leq \varepsilon \max_{\overline{\Omega}} |\varphi| < \min_{x \in \operatorname{supp}\varphi} (u_2(x) + \delta - u_1(x)) \leq u_2(x) + \delta - u_1(x)$ e $\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \operatorname{supp}\varphi$ risulta $\pm\, \varepsilon\varphi(x) \leq u_2(x) + \delta - u_1(x)$, si ha $(u_1 - \varepsilon\varphi, u_2) \in K$, $(u_1 + \varepsilon\varphi, u_2) \in K$.

Se ne trae

$$\int_\Omega \left(-M_{u_1 x_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + 2M_{u_1 x_1 x_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} - M_{u_1 x_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}\right) dx - \int_\Omega q_{10}\, \varphi\, dx - \sum_{j=1}^{m} F_{1j}\, \varphi(y_j) = 0.$$

Pertanto $-\partial^2 M_{u_1 x_1}/\partial x_1^2 + 2\partial^2 M_{u_1 x_1 x_2}/\partial x_1 \partial x_2 - \partial^2 M_{u_1 x_2}/\partial x_2^2 = q_1$ su $\Omega \setminus \Omega_u$.

Con ragionamento analogo si prova la quinta condizione richiesta nel problema (P_4). La sesta, la settima, l'ottava, la nona e la decima condizione richieste nel problema (P_4) sono ovviamente soddisfatte.

Bibliografia

[1] R. A. Adams, *Sobolev spaces.* Academic Press, 1975.

[2] S. Agmon, *Lectures on elliptic boundary value problems.* Van Nostrand, 1965.

[3] J. L. Lions - G. Stampacchia, *Variational inequalities.* Comm. pure appl. math., 20, 1967, 493-519.

[4] A. Maceri, *La piastra incastrata in presenza di ostacoli.* Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 57, 1979, 1-7.

[5] J. Necas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.* Masson, 1967.

[6] W. Rudin, *Analisi reale e complessa.* Boringhieri, 1974.

[7] L. Schwartz, *Théorie des distributions.* Hermann, 1973.

[8] R. Toscano - A. Maceri, *Questioni di contatto tra travi elastiche.* La ricerca, 1, 1979, 1-8.

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università degli Studi di Roma «La Sapienza»
Via A. Gramsci, 53 - 00197 Roma