

RENDICONTI LINCEI MATEMATICA E APPLICAZIONI

EDOARDO COSENZA, CARLO GRECO, GAETANO
MANFREDI

La valutazione teorica di spostamenti e rotazioni in fase anelastica negli elementi monodimensionali in cemento armato

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e
Applicazioni, Serie 9, Vol. 2 (1991), n.3, p. 249–258.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1991_9_2_3_249_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1991.

Meccanica dei solidi. — *La valutazione teorica di spostamenti e rotazioni in fase anelastica negli elementi monodimensionali in cemento armato.* Nota di EDOARDO COSENZA, CARLO GRECO e GAETANO MANFREDI, presentata (*) dal Socio E. GIANGRECO.

ABSTRACT. — *Theoretical evaluation of inelastic rotations and displacements in the reinforced concrete monodimensional elements.* In this paper a method of analysis to evaluate curvatures, rotations and displacements in the reinforced concrete monodimensional elements subjected to monotonic loads in the plastic range is developed. The method takes into account the slip between steel and concrete, and the effect of the tensile concrete between the cracks. The non-linear differential equations that solve the problem are presented, and a numerical solution procedure is discussed in detail. A comparison between theoretical and experimental results concludes the paper.

KEY WORDS: Reinforced concrete; Inelastic deformations; Bond.

RIASSUNTO. — Si presenta una metodologia di calcolo per valutare lo stato deformativo, in termini di curvature, rotazioni e spostamenti, negli elementi monodimensionali in cemento armato soggetti a carichi monotoni in regime anelastico. In particolare si tiene conto dello scorrimento acciaio calcestruzzo, e della collaborazione offerta dal calcestruzzo teso fra due successive lesioni. Si presenta il sistema di equazioni non-lineari che regge il problema, con le relative condizioni al contorno, e si discute in dettaglio una procedura numerica di risoluzione. Lo studio è concluso dal confronto tra previsione teorica e risultati sperimentali.

ELENCO DEI SIMBOLI. — b = base della sezione trasversale; c = copriferro; d_i = distanza dell'armatura dal baricentro della sezione; f = spostamento in mezzzeria della trave; h = altezza utile della sezione; i = generico punto di integrazione numerica; j = generica iterazione; l = luce della trave; n = numero totale di punti di integrazione; s = scorrimento acciaio-calcestruzzo; u, v = spostamento assiale e trasversale; u_c, u_s, u_{ct} = spostamento assiale di calcestruzzo compresso, acciaio e calcestruzzo teso; x, y, z = assi di riferimento; x_c = profondità dell'asse neutro; x_l = ascissa di formazione della lesione; A_c, A_s, A_{ct} = area della parte di calcestruzzo compresso, acciaio e calcestruzzo teso; $A_{ct, eff}$ = area di calcestruzzo efficace ai fini dell'aderenza; F = forza; M = momento flettente; N = sforzo normale; Δl = distanza fra due lesioni successive; Δx = passo di integrazione; $\Delta \theta$ = rotazione relativa fra gli appoggi della trave; $\epsilon_c, \epsilon_s, \epsilon_{ct}$ = deformazioni nel calcestruzzo compresso, acciaio e calcestruzzo teso; $\sigma_c, \sigma_s, \sigma_{ct}$ = tensioni del calcestruzzo compresso, acciaio e calcestruzzo teso; θ = rotazione; τ = tensione di aderenza; Φ = diametro del tendino; χ = curvatura.

INTRODUZIONE

La valutazione di spostamenti e rotazioni nelle strutture monodimensionali in cemento armato per carichi monotoni di elevata intensità si effettua a partire dalla conoscenza dell'effettiva curvatura di ciascuna sezione che, nell'ipotesi di piccoli spostamenti, è fornita dalla derivata seconda della funzione spostamento. La curvatura $\chi(x)$ alla generica ascissa x della trave si calcola definendo il diagramma delle defor-

(*) Nella seduta del 15 dicembre 1990.

mazioni specifiche della sezione e conseguentemente l'attendibilità del risultato che si ottiene dall'analisi numerica dipende dalla affidabilità del modello introdotto per definire lo stato deformativo della sezione.

Nei tradizionali procedimenti di calcolo l'analisi delle sezioni viene generalmente condotta nelle ipotesi che: 1) le sezioni trasversali si conservino piane a deformazioni avvenute; 2) vi sia perfetta aderenza tra acciaio e calcestruzzo; 3) il calcestruzzo non sia in grado di reagire a trazione. L'ipotesi 1) risulta comprovata sino al raggiungimento delle condizioni di crisi da numerosi risultati sperimentali [7], e verrà mantenuta anche nel seguito. In [4] viene rimossa l'ipotesi 2), ma viene trascurata la deformazione del calcestruzzo teso; nel presente studio vengono invece completamente rimosse entrambe le ipotesi 2) e 3), ovvero oltre a considerare gli scorrimenti tra acciaio e calcestruzzo, si mette in conto la deformazione ed il relativo stato tensionale nel calcestruzzo teso.

Il modello strutturale che si ottiene risulta, dal punto di vista computazionale, molto più complesso di quello tradizionale; la validità della metodologia adottata è confermata da confronti con risultati sperimentali.

IL MODELLO DI CALCOLO

Nel seguito si introduce e discute il modello deformativo preso in considerazione che vuole tener conto dei principali fenomeni meccanici che caratterizzano il comportamento degli elementi in cemento armato.

In particolare, con riferimento alla fig. 1, il calcolo strutturale nella generica sezione compresa tra due successive lesioni nel calcestruzzo teso viene effettuato considerando che calcestruzzo compresso ed acciaio teso si deformino nel rispetto della ipotesi di conservazione delle sezioni piane [7]. Si suppone poi, sulla base di ricerche sperimentali riportate nella letteratura tecnica in argomento [1, 5, 8], che la trazione si trasferisce dall'acciaio al calcestruzzo limitatamente ad un'area efficace nell'intorno dell'armatura metallica; per semplicità, nel modello esaminato si è ipotizzato che in tale area la deformazione sia costante. Tale semplificazione, che comporta vantaggi computazionali rilevanti, non modifica in maniera significativa i risultati come hanno mostrato i test numerici svolti assumendo andamenti della deformazione del calcestruzzo teso più sofisticati. Si ammette infine che calcestruzzo teso ed acciaio subiscano uno scorrimento relativo s .

Il problema risulta pertanto definito dai seguenti parametri deformativi:

$$(1a) \quad \varepsilon_c(x) = du_c/dx;$$

$$(1b) \quad \varepsilon_s(x) = du_s/dx;$$

$$(1c) \quad \varepsilon_{ct}(x) = du_{ct}/dx;$$

$$(1d) \quad s(x) = u_s(x) - u_{ct}(x);$$

essendo $\varepsilon_c(x)$ la deformazione del calcestruzzo al lembo maggiormente compresso.

A tali equazioni si associano i legami costitutivi, in generale non lineari e con rami discendenti, tensione-deformazione nel calcestruzzo compresso, nell'acciaio e nel cal-

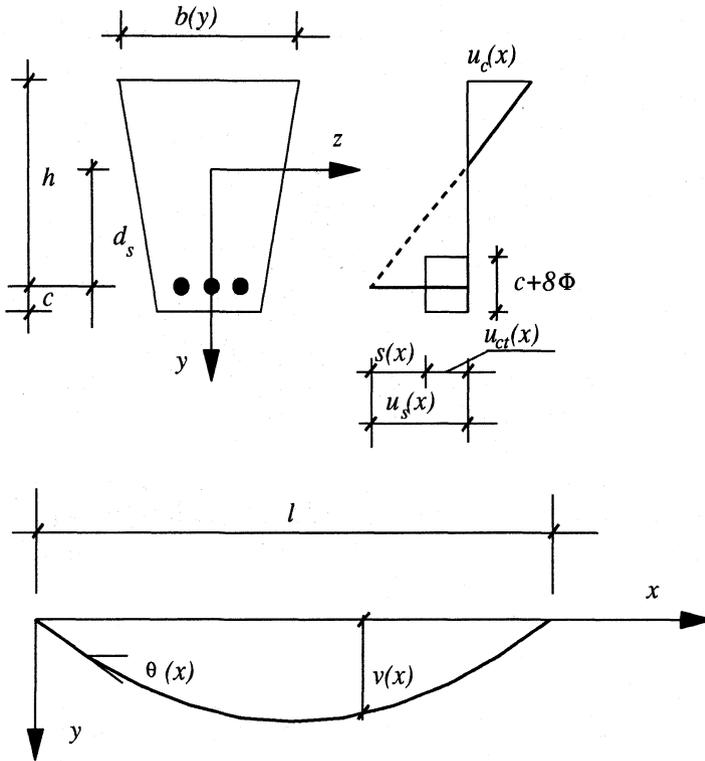


Fig. 1. - Sezione trasversale e modello deformativo dell'elemento monodimensionale in cemento armato.

cestruzzo teso, e tensione di aderenza-scorrimento fra acciaio e calcestruzzo:

$$\begin{aligned}
 (2a) \quad \sigma_c &= \sigma_c(\varepsilon_c); & (2b) \quad \sigma_s &= \sigma_s(\varepsilon_s); \\
 (2c) \quad \sigma_{ct} &= \sigma_{ct}(\varepsilon_{ct}); & (2d) \quad \tau &= \tau(s, x).
 \end{aligned}$$

Molto complessa si presenta la determinazione del legame di aderenza; recenti risultati sperimentali [3] hanno mostrato con chiarezza che il legame τ - s viene a dipendere anche dalla distanza dalla lesione, poiché l'effetto benefico dovuto al confinamento dato dal calcestruzzo che avvolge il tondino diminuisce in vicinanza della lesione; in altri termini il valore della τ dipende non solo da s , ma anche da x . L'andamento considerato nel seguito, basato su attente analisi sperimentali, è riportato schematicamente in fig. 2, nella quale il passaggio fra le diverse curve è graduale ed analiticamente definito nei lavori [2, 3].

Il problema è formalmente risolto dal seguente sistema di equazioni differenziali:

i) equilibrio alla traslazione della sezione trasversale:

$$(3a) \quad \int_{A_c} \sigma_c(x, y) b(y) dy - \int_{A_{ct}} \sigma_{ct}(x) b(y) dy - A_s \sigma_s(x) = N(x);$$

ii) equilibrio alla rotazione intorno all'asse geometrico della sezione trasversale:

$$(3b) \quad - \int_{A_c} \sigma_c(x, y) y b(y) dy + \int_{A_{ct}} \sigma_{ct}(x) y b(y) dy + A_s \sigma_s(x) d_s = M(x);$$

iii) equilibrio alla traslazione del tondino:

$$(3c) \quad d\sigma_s/dx - 4\tau(x)/\Phi = 0.$$

La quarta equazione si ottiene esplicitando la definizione di scorrimento in termini di deformazioni, ovvero derivando la (1d):

$$(3d) \quad ds/dx = \varepsilon_s(x) - \varepsilon_{ct}(x).$$

Si osservi che la deformazione $\varepsilon_c(x, y)$ nella generica fibra di calcestruzzo a distanza y dal baricentro della sezione, con il modello cinematico introdotto, si esprime immediatamente attraverso la sola funzione $\varepsilon_c(x)$, sicché il problema si riconduce alla risoluzione del sistema formato dalle equazioni (3), delle quali le (3a)-(3b) sono algebriche non lineari, la (3c) è differenziale del primo ordine non lineare, e la (3d) è differenziale del primo ordine lineare, nelle incognite $\varepsilon_c(x)$, $\varepsilon_s(x)$, $\varepsilon_{ct}(x)$ ed $s(x)$. Avendo scelto le deformazioni come incognite, la soluzione in termini di tensioni risulta comunque univoca, anche se i legami costitutivi presentano rami discendenti.

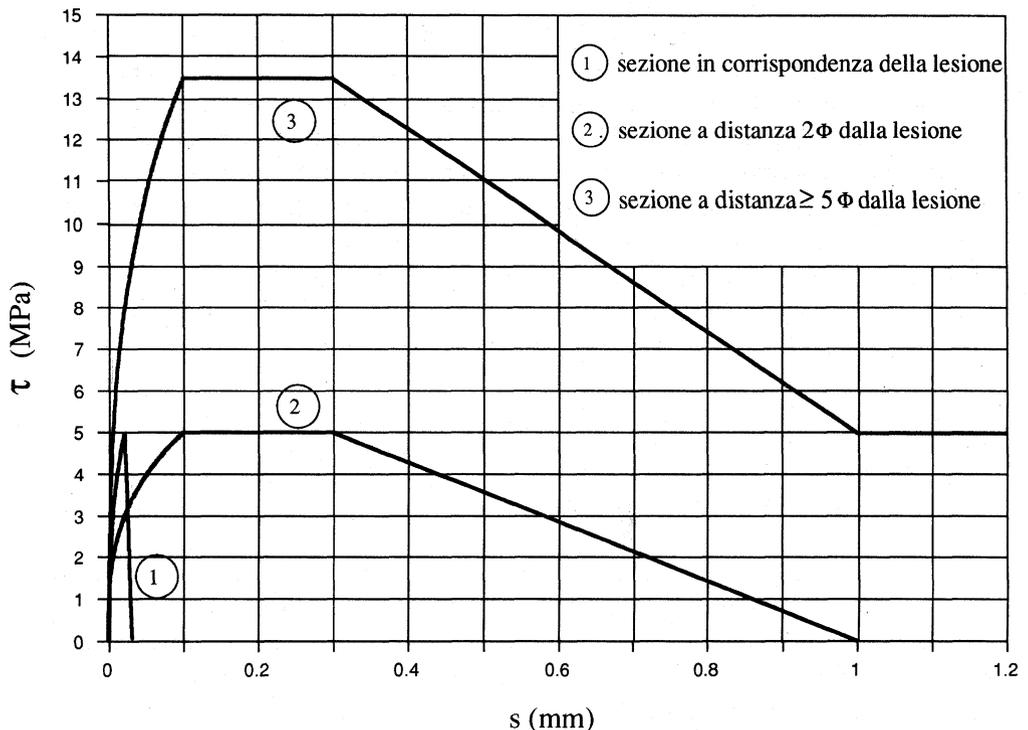


Fig. 2. - Legame costitutivo tensione di aderenza-scorrimento fra acciaio e calcestruzzo, e sua dipendenza dalla distanza dalla lesione.

Il calcolo va condotto per ciascun concio compreso fra due successive lesioni, di cui il generico è definito dall'intervallo $(x_l, x_l + \Delta l)$ intendendo quindi con Δl la distanza fra le lesioni. In condizioni di fessurazione stabilizzata tale distanza può ritenersi costante lungo l'asse della trave, e viene valutata su base sperimentale; la formula più accreditata, per il caso di flessione semplice con barre ad aderenza migliorata, risulta [5]:

$$(4) \quad \Delta l = 50 + 0.1 \Phi A_{ct,eff} / A_s [mm] \quad \text{con} \quad A_{ct,eff} = b(c + 8\Phi).$$

Si osservi che il problema viene analizzato supponendo che le lesioni siano presenti sin dal principio; ciò non è ovviamente vero, ma la progressione delle fessure ed i relativi fenomeni di carico e scarico investono valori delle tensioni e delle deformazioni notevolmente inferiori rispetto a quelli che caratterizzano la fase post-elastica, e quindi l'approssimazione che si introduce è molto modesta.

Al sistema di equazioni differenziali, in ciascun intervallo di integrazione, va associato una coppia di condizioni al contorno. In particolare, per $x = x_l$ ed $x = x_l + \Delta l$, ovvero nelle sezioni di formazione delle lesioni, lo stato deformativo è immediatamente valutabile; infatti si ha $\sigma_{ct} = \varepsilon_{ct} = 0$ e pertanto le eq. (3a)-(3b) si disaccoppiano e forniscono i valori di ε_c , ε_s nelle due sezioni di estremità; le condizioni ai limiti si ottengono dunque dalla (3d), che fornisce il valore di $ds/dx = \varepsilon_s$ per $x = x_l$ ed $x = x_l + \Delta l$.

Si osservi che le equazioni (3a)-(3b) risultano accoppiate alle equazioni differenziali (3c)-(3d) attraverso la tensione e la deformazione nel calcestruzzo teso; se nella (3d) si trascura il termine ε_{ct} rispetto a ε_s , e ciò è generalmente lecito se l'acciaio è snervato, le equazioni differenziali costituiscono un sistema nelle sole incognite $\varepsilon_s(x)$ e $s(x)$, disaccoppiato dall'equilibrio globale della sezione. Risulta pertanto necessario utilizzare le equazioni di equilibrio globale della sezione solo alle ascisse $x = x_l$ ed $x = x_l + \Delta l$ al fine di ottenere le condizioni ai limiti, mentre all'interno del concio il problema è retto dalla sola equazione (3c); ciò semplifica enormemente l'onere computazionale, e fornisce comunque una soluzione di primo tentativo molto prossima a quella finale. La soluzione perseguita in tali ipotesi non permette però la valutazione delle curvature in quanto il valore della ε_c nelle sezioni interne del concio permane incognito.

LA RISOLUZIONE NUMERICA DEL PROBLEMA

La risoluzione del sistema differenziale introdotto al paragrafo precedente si presenta complessa per la non linearità di alcune equazioni, e per la dipendenza del legame di aderenza dalla distanza dalla lesione.

Il problema può dunque essere affrontato solo per via numerica; in particolare conviene effettuare la discretizzazione alle differenze finite, suddividendo il tratto tra due lesioni in $n - 1$ tratti elementari con passo Δx , ed assumendo in ciascun tratto costante il valore della τ e variabili linearmente le altre funzioni incognite. Per la risoluzione del problema alle differenze finite particolarmente utile è l'utilizzazione della procedura iterativa di «shooting» [2], che trasforma il problema delle condizioni ai limiti nella risoluzione iterativa di problemi di valore iniziale; ciò consente

di innescare, nell'ascissa iniziale, l'algoritmo risolutivo. In particolare nel problema in esame risulta conveniente definire un valore di tentativo dello scorrimento s_1 nella prima sezione, e di usare invece la tensione nell'acciaio nell'ultima sezione $\sigma_{s,n}$ come parametro di controllo per la convergenza del metodo.

Secondo tale procedura, nella generica iterazione j e nel generico intervallo elementare di integrazione definito dai nodi $(i, i + 1)$, si utilizzano le espressioni alle differenze finite delle (3c) e (3d) nella seguente forma:

$$(5a) \quad \sigma_{s,i+1}^{(j)} = \sigma_{s,i}^{(j)} + 4\tau_i^{(j)} \Delta x / \Phi,$$

$$(5b) \quad s_{i+1}^{(j)} = s_i^{(j)} + \Delta x [(\epsilon_{s,i+1}^{(j)} + \epsilon_{s,i}^{(j)})/2 - (\epsilon_{\sigma,i+1}^{(j)} + \epsilon_{\sigma,i}^{(j)})/2].$$

La strategia risolutiva consiste nel ricavare dall'equilibrio nella sezione fessurata, dove si ha $\sigma_{\sigma,1}^{(j)} = 0$, i valori di $\sigma_{s,1}^{(j)}$ e $\sigma_{\sigma,1}^{(j)}$, e quindi $\epsilon_{s,1}^{(j)}$ e $\epsilon_{\sigma,1}^{(j)}$ attraverso i legami costitutivi; si ipotizza inoltre un valore di primo tentativo per $s_1^{(j)}$ (e attraverso il legame costitutivo per $\tau_1^{(j)}$). Innescata la procedura, in tutti gli altri passi l'eq. (5a) consente di valutare la tensione nell'acciaio $\sigma_{s,i+1}^{(j)}$ e gli equilibri globali (3a)-(3b) forniscono i valori di $\sigma_{\sigma,i+1}^{(j)}$ e $\sigma_{\sigma,i+1}^{(j)}$; infine l'eq. (5b) fornisce lo scorrimento $s_{i+1}^{(j)}$ e la procedura si itera. La differenza tra il valore $\sigma_{s,n}^{(j)}$ calcolato ed il valore ottenuto dalle condizioni ai limiti nell'ascissa finale del concio costituisce il parametro per il controllo della convergenza del metodo.

Per quanto concerne il valore del primo tentativo $s_1^{(1)}$, riprendendo quanto detto in precedenza, conviene in una prima fase trascurare la deformazione nel calcestruzzo teso nell'eq. (3d); per innescare la procedura va comunque fornito un valore $s_1^{(0)}$ dello scorrimento iniziale che va prescelto tenendo presente che un suo estremo superiore è dato dal prodotto della massima deformazione nell'acciaio in corrispondenza della lesione per la lunghezza del concio.

IL CALCOLO DELLE ROTAZIONI PLASTICHE E CONFRONTI CON RISULTATI SPERIMENTALI

Il calcolo delle rotazioni relative e degli spostamenti in condizioni anelastiche si effettua valutando, a partire dalle deformazioni e nel rispetto dell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane per calcestruzzo compresso ed acciaio teso, la curvatura $\chi(x)$ in ciascuna sezione, ed integrando, per via numerica, tale curvatura lungo l'asse della trave:

$$(6) \quad \chi(x) = \frac{\epsilon_c(x)}{x_c} = \frac{\epsilon_s(x)}{b - x_c} = \frac{\epsilon_c(x) + \epsilon_s(x)}{b}; \quad \theta(x) - \theta(0) = \int_0^x \chi(t) dt; \quad v(x) = \int_0^x \theta(t) dt.$$

La procedura formalizzata in precedenza è stata verificata confrontando il calcolo teorico con i risultati sperimentali di Maldague [6, trave H8]; nell'analisi teorica si sono utilizzate, per il legame costitutivo dell'acciaio teso e la distanza tra le lesioni, le risultanze sperimentali, mentre i rimanenti legami costitutivi sono stati stimati a partire dalla resistenza a compressione del calcestruzzo; in particolare per la distanza tra le lesioni è stato assunto il valore medio sperimentale pari a 8 cm.

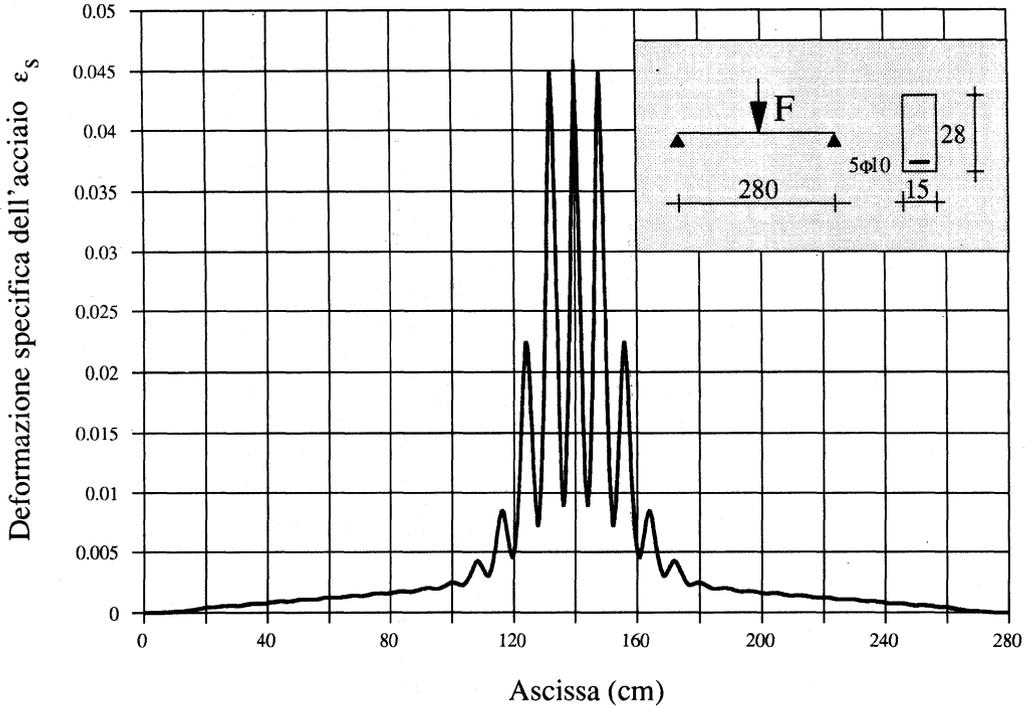


Fig. 3. - Andamento teorico della deformazione nell'acciaio teso in condizioni ultime.

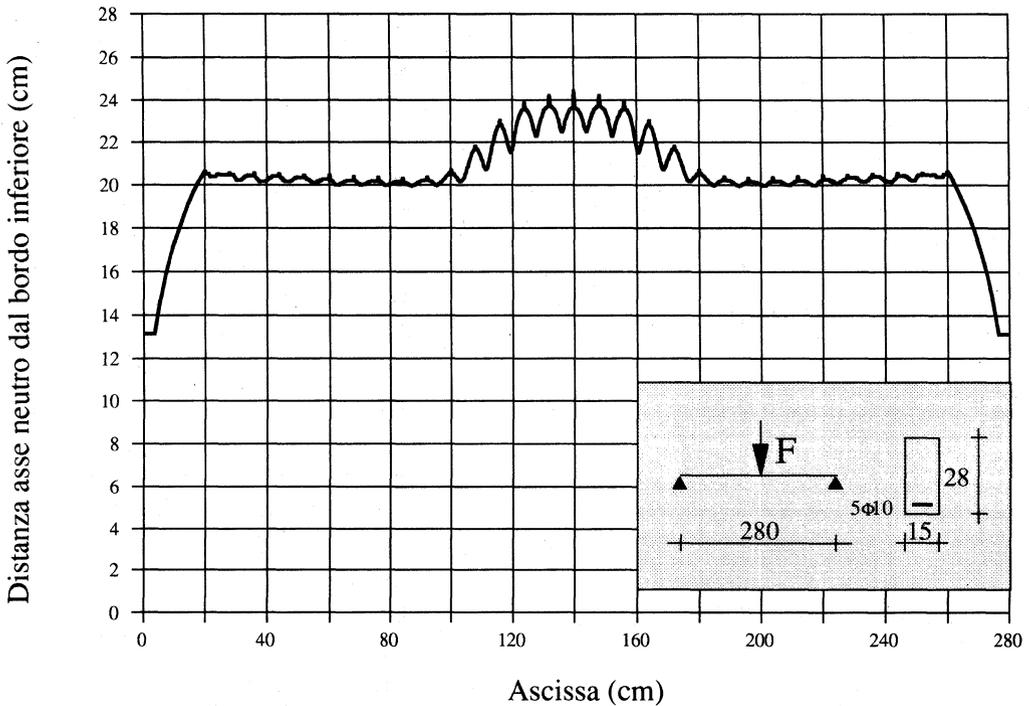


Fig. 4. - Andamento teorico della profondità dell'asse neutro in condizioni ultime.

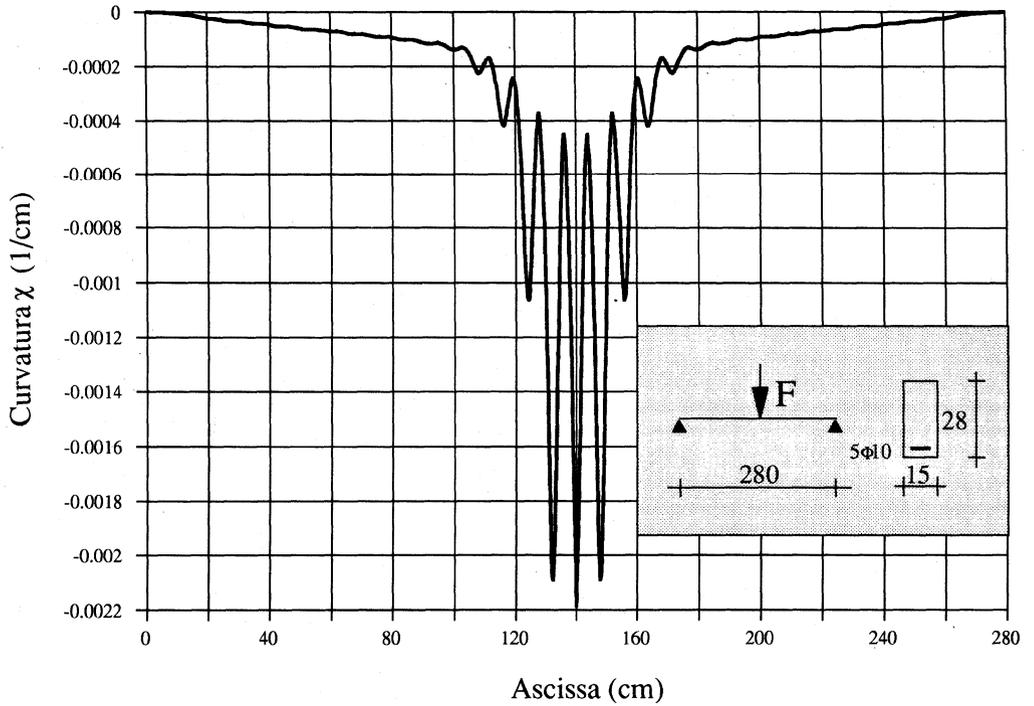


Fig. 5. - Andamento teorico della curvatura in condizioni ultime.

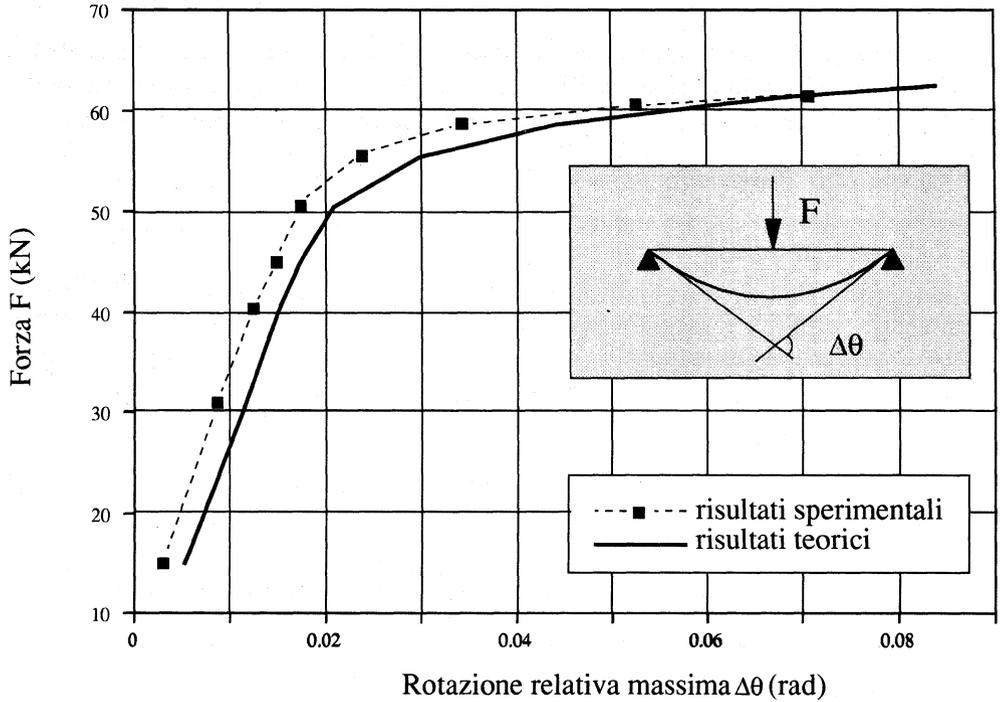


Fig. 6. - Confronto teorico-sperimentale del diagramma forza-rotazione relativa.

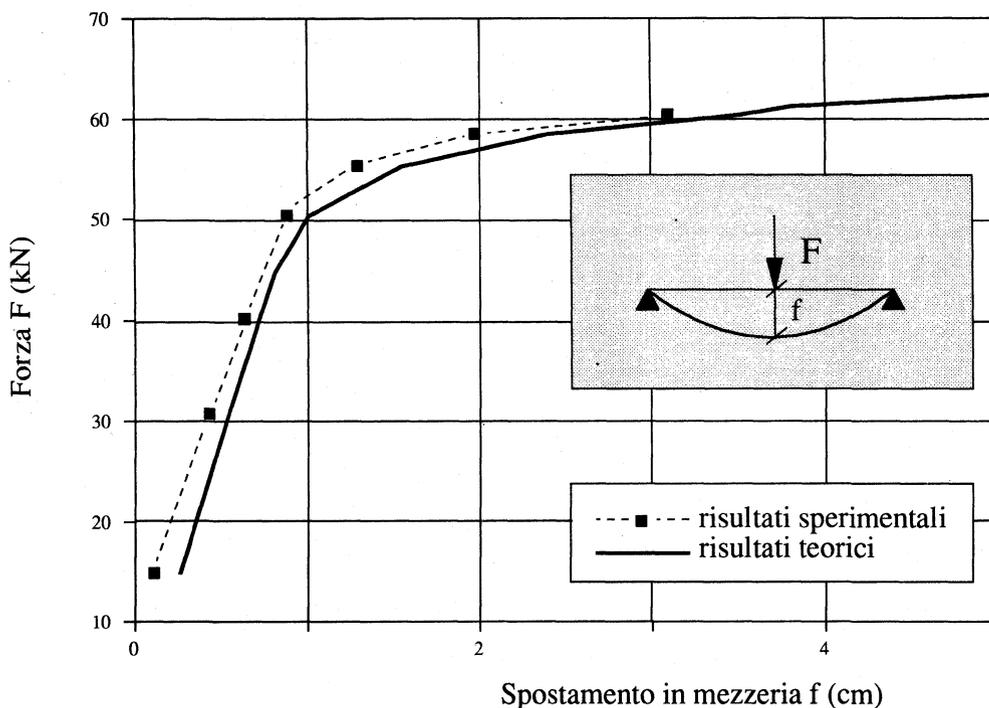


Fig. 7. - Confronto teorico-sperimentale del diagramma forza-spostamento in mezzeria.

Nelle figg. 3-5 sono riportati gli andamenti, per il massimo carico sopportabile dalla trave, della deformazione nell'acciaio ϵ_s , dell'asse neutro x_c e della curvatura χ valutati con la metodologia descritta nei paragrafi precedenti; si osservi la forte variabilità di tali grandezze in ciascun concio tra due successive lesioni, che rende molto incerta la possibilità di distribuire la rotazione plastica lungo un unico concio, utilizzando cioè il concetto di «cerniera plastica», come spesso viene fatto nella pratica tecnica.

Nelle figg. 6, 7 sono invece riportati gli andamenti teorico e sperimentale dei diagrammi forza F -rotazione relativa fra gli appoggi $\Delta\theta$ e forza F -spostamento in mezzeria f fino al raggiungimento del carico massimo; è immediato constatare il buon accordo tra risultanza sperimentale e previsione teorica, confermandosi in tal modo l'attendibilità della metodologia proposta.

BIBLIOGRAFIA

- [1] B. B. BROMS, *Crack width and crack spacing in reinforced concrete members*. ACI Journal, ottobre 1965.
- [2] V. CIAMPI - R. ELIGEHAUSEN - E. P. POPOV - V. V. BERTERO, *Analytical model for concrete anchorage of reinforcing bars under generalized excitation*. Report No. UCB/EERC 82-23, Univ. of California, Berkeley (California) 1982.
- [3] R. ELIGEHAUSEN - E. P. POPOV - V. V. BERTERO, *Local bond stress-slip relationship of deformed*

- bars under generalized excitations*. Report No. UCB/EERC 83-23, Univ. of California, Berkeley (California) 1983.
- [4] P. LANGER, *Verdrehfähigkeit plastizierter Tragwerksbereiche im Stahlbetonbau*. Institut für Werkstoffe im Bauwesen der Universität Stuttgart, Stuttgart 1987.
- [5] F. LEONHARDT, *Cracks and crack control in concrete structures*. PCI Journal, luglio-agosto 1988.
- [6] J. C. MALDAGUE, *Détermination expérimentale des lois moments-courbures des poutres en béton armé*. Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics, No. 209, maggio 1965.
- [7] R. PARK - T. PAULAY, *Reinforced concrete structures*. John Wiley & Sons, New York 1985.
- [8] B. VENKATESWARLU - H. GESUND, *Cracking and bond slip in concrete beams*. Journal of Structural Engineering ASCE, vol. 98, n. 11, dicembre 1972.

E. Cosenza: Istituto di Ingegneria Civile
Università degli Studi di Salerno
84080 PENTA di FISCIANO SA

C. Greco e G. Manfredi: Istituto di Tecnica delle Costruzioni
Facoltà di Ingegneria - Università degli Studi di Napoli «Federico II»
Piazzale V. Tecchio - 80125 NAPOLI