
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE LINCEI CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI LINCEI MATEMATICA E APPLICAZIONI

GIUSEPPE SACCOMANDI

Precessioni ad asse verticale del girostato pesante

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. 2 (1991), n.3, p. 235-240.

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1991_9_2_3_235_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1991_9_2_3_235_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1991.

Meccanica. — *Precessioni ad asse verticale del girostato pesante.* Nota di GIUSEPPE SACCOMANDI, presentata (*) dal Socio G. GRIOLI.

ABSTRACT. — *Precessions with vertical axis for an heavy gyrostat.* We have examined the dynamical possibility of precession motions with vertical axis for an heavy «Volterra-type» gyrostat with a fixed point without friction. We have been able to show that these kinds of motions are dynamically possible only if the rotation speed or the precession speed is constant.

KEY WORDS: Gyrostat; Precession; Semiregular precession.

RIASSUNTO. — Si esamina la possibilità dinamica di precessioni ad asse verticale di un girostato, alla Volterra, pesante e fissato senza attrito per un suo punto. Si riconosce che per essere possibili moti di questo tipo, necessariamente, almeno una delle due velocità di precessione o rotazione propria deve essere costante.

1. In [1] R. Balli ha dimostrato l'impossibilità dinamica per il corpo rigido pesante, fissato senza attrito per un suo punto O , di moti di precessione non regolare in cui le due velocità di precessione e di rotazione propria variano effettivamente nel tempo.

In questa *Nota* si affronta il problema di riconoscere se moti di questo tipo sono dinamicamente possibili qualora si consideri, invece di un corpo rigido, un girostato; cioè un sistema costituito da una parte rigida S' e da una parte S'' che, muovendosi rispetto a S' di moto ciclico, provoca un momento girostatico costante relativamente a S' , senza tuttavia alterare la distribuzione delle masse [2].

Moti del tipo cercato non sono possibili nemmeno con la generalizzazione introdotta, in quanto si riconosce che necessariamente almeno una delle due velocità di precessione o rotazione propria deve essere costante. Eventuali moti sono quindi precessioni semiregolari. Per il loro significato cinematico si rinvia a [3, 4], per una loro analisi dettagliata a [5, 6].

2. Un moto di precessione non regolare ad asse verticale è caratterizzato dalla seguente forma della velocità angolare: $\omega = \nu c + \mu i_3$, dove c è il versore della verticale (orientato verso il basso), i_3 è il versore di un asse solidale al corpo che, in tutta generalità, può essere assunto come terzo versore di una terna solidale con origine nel punto fisso $T(O, i_1, i_2, i_3)$ e $\nu = \nu(t)$ e $\mu = \mu(t)$ sono funzioni variabili nel tempo, note rispettivamente come velocità di precessione e velocità di rotazione propria.

(*) Nella seduta del 15 dicembre 1990.

La terna T è scelta in modo che l'omografia di inerzia assuma la forma ridotta:

$$\sigma = \begin{bmatrix} A & 0 & -B' \\ 0 & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{bmatrix}.$$

Nel seguito le componenti, rispetto alla terna T , del versore c saranno indicate con c_i , le componenti del momento girostatico I con I_i e le componenti di $mg\ OG$ con ξ_i , (m = massa del corpo, g modulo dell'accelerazione di gravità, G baricentro che si assume distinto da O).

Un moto di precessione è individuato dalle funzioni $c_1(t)$, $c_2(t)$, $c_3(t)$, $\nu(t)$, $\mu(t)$, ed è dinamicamente possibile se e solo se queste funzioni verificano il sistema di equazioni differenziali:

$$(1) \quad \dot{c} = \mu c \times i_3,$$

$$(2) \quad \sigma(\dot{\omega}) + \omega \times \sigma(\omega) + \nu c \times I + \mu i_3 \times I = mg\ OG \times c,$$

e la relazione in termini finiti:

$$(3) \quad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1.$$

Il sistema (1) e (2) ammette, oltre all'integrale primo particolarizzato (3), anche gli integrali primi dell'energia e della componente verticale del momento delle quantità di moto che hanno, rispettivamente, la forma:

$$(4) \quad \nu^2 \sigma(c) \cdot c + 2\mu\nu\sigma(c) \cdot i_3 + \mu^2 \sigma(i_3) \cdot i_3 - 2mg\ OG \cdot c = 2E_0,$$

$$(5) \quad \nu\sigma(c) \cdot c + \mu\sigma(i_3) \cdot c + I \cdot c = k_c.$$

Proiettando le equazioni (1) e (2) su T si ottengono le seguenti equazioni scalari:

$$(6) \quad \dot{c}_1 = \mu c_2, \quad \dot{c}_2 = -\mu c_1, \quad c_3 = \text{costante},$$

$$(7) \quad a_1 \dot{\nu} - B' \dot{\mu} + b_1 \nu^2 + d_1 \mu \nu + A' \mu^2 - I_2 \mu + e_1 \nu = h_1,$$

$$(8) \quad a_2 \dot{\nu} - A' \dot{\mu} + b_2 \nu^2 + d_2 \mu \nu - B' \mu^2 + I_1 \mu + e_2 \nu = h_2,$$

$$(9) \quad a_3 \dot{\nu} + C \dot{\mu} + b_3 \nu^2 + e_3 \nu = h_3,$$

dove è stato posto:

$$a_1(c_1, c_2) \equiv A c_1 - B' c_3, \quad a_2(c_1, c_2) \equiv B c_2 - A' c_3, \quad a_3(c_1, c_2) \equiv -B' c_1 - A' c_2 + C c_3,$$

$$b_1(c_1, c_2) \equiv -B' c_1 c_2 - A' c_2^2 + (C - B) c_2 c_3 + A' c_3^2,$$

$$b_2(c_1, c_2) \equiv B' c_1^2 + A' c_1 c_2 + (A - C) c_1 c_3 - B' c_3^2,$$

$$b_3(c_1, c_2) \equiv (B - A) c_1 c_2 - A' c_1 c_3 + B' c_2 c_3,$$

$$d_1(c_1, c_2) \equiv (A - B + C) c_2 + 2A' c_3, \quad d_2(c_1, c_2) \equiv (A - B - C) c_1 - 2B' c_3,$$

$$e_1(c_1, c_2) \equiv I_3 c_2 - I_2 c_3, \quad e_2(c_1, c_2) \equiv I_1 c_3 - I_3 c_1, \quad e_3(c_1, c_2) \equiv I_1 c_2 - I_2 c_1,$$

$$h_1(c_1, c_2) \equiv \xi_2 c_3 - \xi_3 c_2, \quad h_2(c_1, c_2) \equiv \xi_3 c_1 - \xi_1 c_3, \quad h_3(c_1, c_2) \equiv \xi_1 c_2 - \xi_2 c_1.$$

Dalle (4) e (5) si ottiene

$$(10) \quad v = (k - \mu a_3)/s,$$

$$(11) \quad \mu^2 \equiv \Gamma/\Lambda = (ws - k^2)/(Cs - a_3^2),$$

dove:

$$s = s(c_1, c_2) = A c_1^2 + B c_2^2 - 2 B' c_1 c_2 - 2 A' c_2 c_3 + C c_3^2,$$

$$w = w(c_1, c_2) = 2 \xi_1 c_1 + 2 \xi_2 c_2 + E_1, \quad k = k(c_1, c_2) = k_1 - I_1 c_1 - I_2 c_2,$$

con $E_1 = -2 E_0 + 2 \xi_3 c_3$ e $k_1 = k_0 - I_3 c_3$.

Derivando la (10) rispetto al tempo, tenendo conto delle (6) si ottiene:

$$(12) \quad \dot{v} = [\dot{\mu}(-s a_3) + \mu^2 ((B' c_2 - A' c_1) s - 2 a_3 b_3) + \mu(e_3 s + 2 b_3 k)]/s^2.$$

Sostituendo le espressioni di v e $\dot{v}$ date da (10) e (12) nelle (7) e (8) si hanno le equazioni:

$$(13) \quad P_1 \dot{\mu} + P_2 \mu^2 + P_3 \mu + P_4 = 0,$$

$$(14) \quad Q_1 \dot{\mu} + Q_2 \mu^2 + Q_3 \mu + Q_4 = 0,$$

dove:

$$(15) \quad \begin{cases} P_1 = P_1(c_1, c_2) = s(-a_1 a_3 - B' s), \\ P_2 = P_2(c_1, c_2) = s(a_1(B' c_2 - A' c_1) - d_1 a_3 + A' s) + a_3(-2 a_1 b_3 + b_1 a_3), \\ P_3 = P_3(c_1, c_2) = k(2 a_1 b_3 - 2 a_3 b_1 + d_1 s) - a_3 e_1 s - I_2 s^2, \\ P_4 = P_4(c_1, c_2) = k^2 b_1 - b_1 s^2 + e_1 k s, \\ Q_1 = Q_1(c_1, c_2) = s(-a_2 a_3 - A' s), \\ Q_2 = Q_2(c_1, c_2) = s(a_2(B' c_2 - A' c_1) - d_2 a_3 + B' s) + a_3(-2 a_2 b_3 + b_2 a_3), \\ Q_3 = Q_3(c_1, c_2) = k(2 a_2 b_3 - 2 a_3 b_2 + d_2 s) - a_3 e_2 s - I_1 s^2, \\ Q_4 = Q_4(c_1, c_2) = k^2 b_2 - b_2 s^2 + e_2 k s. \end{cases}$$

La sostituzione delle stesse nella (9) porta, ovviamente, ad una identità stante la complanarità di ω , c e i_3 . Le (13) e (14) a loro volta non sono indipendenti: ogni qualvolta che le funzioni $\mu(t)$, $c_1(t)$ e $c_2(t)$ soddisfano le (6), la (11) e una di esse, l'altra è automaticamente verificata.

Naturalmente nel seguito si considereranno solo funzioni $c_1(t)$, $c_2(t)$, $\mu(t)$ effettivamente variabili nel tempo, escludendo cioè soluzioni del tipo $c_1 = \text{costante}$, $c_2 = \text{costante}$ che rappresentano rotazioni intorno alla verticale, e soluzioni con $\mu = \text{costante}$ che sono precessioni semiregolari di prima specie. Si escluderanno inoltre soluzioni $c_1(t)$, $c_2(t)$, $\mu(t)$ che, pur essendo variabili nel tempo, definiscano da (10) $v = \text{costante}$, e cioè soluzioni che sono precessioni semiregolari di seconda specie.

3. La relazione (11) esprime μ in funzione di c_1 e c_2 ed è inoltre possibile, con l'ausilio delle eq. (6), esprimere anche $\dot{\mu}$ come funzione di tali variabili: $\dot{\mu} = (\dot{\Gamma}\Lambda - \Gamma\dot{\Lambda})/\Lambda^2$, con $\dot{\Gamma} = ((\partial\Gamma/\partial c_1) \dot{c}_2 - (\partial\Gamma/\partial c_2) \dot{c}_1)/2$ e $\dot{\Lambda} = ((\partial\Lambda/\partial c_1) \dot{c}_2 - (\partial\Lambda/\partial c_2) \dot{c}_1)/2$.

Il problema della possibilità dinamica di precessioni non regolari è così ricondotto

a controllare se l'equazione:

$$(16) \quad [P_1(\dot{\Gamma}\Lambda - \Gamma\dot{\Lambda}) + P_2\Gamma\Lambda + P_4\Lambda^2]^2 = P_3^2\Gamma\Lambda,$$

ottenuta sostituendo in (13) la $\mu = \mu(c_1, c_2)$ e la $\dot{\mu} = \dot{\mu}(c_1, c_2)$ di cui sopra, è verificata per infiniti valori di c_1 e c_2 che soddisfano alla $c_1^2 + c_2^2 = 1 - c_3^2 \equiv a^2$.

Utilizzando la parametrizzazione razionale della circonferenza:

$$(17) \quad c_1 = 2a\tau/(1 + \tau^2), \quad c_2 = a(1 - \tau^2)/(1 + \tau^2), \quad \tau = (a - c_2)/c_1,$$

si può riscrivere la (16) nella forma:

$$(18) \quad \{\bar{P}_1(\dot{\Gamma}\bar{\Lambda} - \bar{\Gamma}\dot{\Lambda}) + \bar{P}_2\bar{\Gamma}\bar{\Lambda} + \bar{P}_4\bar{\Lambda}^2\} = \bar{P}_3^2\bar{\Gamma}\bar{\Lambda}(1 + \tau^2)^{2s+1},$$

dove i soprassegni indicano i polinomi numeratori delle funzioni di τ ottenute sostituendo c_1 e c_2 tramite le (11) nei rispettivi polinomi di (15) e $s \in \mathbf{Z}$ è un'opportuno esponente.

Si ottiene così una equazione algebrica in τ che, per quanto detto sopra, deve essere identicamente nulla.

Una verifica diretta dell'eq. (18) è di notevole complessità algoritmica è però possibile individuare condizioni necessarie da un confronto tra il primo e il secondo membro. Questo confronto è possibile se e solo se $P_3(\tau)$ non è identicamente nullo. Sono quindi da distinguere come primo passo due casi: I) $P_3(\tau) \equiv 0$; II) $P_3(\tau) \not\equiv 0$.

I) $P_3(\tau) \equiv 0$. Un calcolo diretto porta a riconoscere che questo caso è possibile solo se i parametri strutturali e di moto verificano le condizioni:

$$I_1 = I_2 = A' = B' = 0, \quad k_1 = -I_3 c_3 C(Ba^2 + Cc_3^2)[C(A + B - C)c_3^2 + B(A + C - B)a^2]^{-1}.$$

Affinché risulti nullo anche il primo membro della (18) si riconosce necessaria la condizione $c_3 = 0$ che implica $k_0 = 0$. Si ha quindi che l'asse di figura che è asse principale di inerzia e individua la direzione del momento girostatico, deve anche essere ortogonale all'asse di precessione. Queste restrizioni portano però per la (10), ad un valore nullo della velocità di precessione e quindi eventuali precessioni degenerano in rotazioni.

II) $P_3(\tau) \not\equiv 0$. Si può effettuare un confronto tra le radici del primo e del secondo membro di (18). Poiché il primo membro di questa espressione è un quadrato, esso possiede solo radici doppie in τ ; è necessario quindi che anche tutte le radici del secondo membro siano doppie. Più precisamente $\bar{\Gamma}\bar{\Lambda}(1 + \tau^2)$ deve avere radici doppie ed essere positivo. Per analizzare le radici di $\bar{\Lambda}(\tau)$ basta osservare che Λ è una forma omogenea del secondo ordine in c_1, c_2 , per cui $\bar{\Lambda}(\tau)$ è un polinomio antireciproco del quarto ordine e quindi le sue radici sono tutte distinte, o sono due coppie di radici doppie [7]. Nel caso di radici distinte si deve necessariamente avere: $\bar{\Gamma}(\tau) \equiv \mu_0 \bar{\Lambda}(\tau)(1 + \tau^2)$, con μ_0 costante e quindi dalla (11) si riconosce facilmente che risulta $\mu^2 = \mu_0$ e quindi eventuali precessioni sono semiregolari.

Il caso delle radici doppie si ha se e solo se si verificano le condizioni

$$(19) \quad A' B' = 0, \quad AC - B'^2 = BC - A'^2,$$

con il che risulta $\bar{\Lambda}(\tau) = a^2 (AC - B'^2)(1 + \tau^2)^2$.

Deve allora essere anche

$$(20) \quad \bar{\Gamma}(\tau) = \gamma_0 (1 + \tau^2)(s_0 \tau^2 + s_1 \tau + s_2)^2,$$

con opportuni valori delle costanti γ_0 e s_i , la prima delle quali deve anche essere positiva.

Poiché, posto $b_0 = 2 \xi_2 (B - A)$, $b_1 = 2 \xi_1 (B - A)$, $b_2 = -I_1^2$, $b_3 = -4 A' \xi_1 c_3 - 2 I_1 I_2$, $b_4 = -4 A' \xi_2 c_3 + E_1 (B - A) - I_2^2$, $b_5 = 2 \xi_1 (A a^2 + C c_3^2) + 2 k_1 I_1$, $b_6 = 2 \xi_2 (A a^2 + C c_3^2) - 2 A' E_1 c_3 + 2 k_1 I_2$, $b_7 = E_1 (A a^2 + C c_3^2) - k_1^2$, è

$$(21) \quad \bar{\Gamma}(\tau) \equiv a^3 (1 - \tau^2)(b_0 (1 - \tau^2) + 2 \tau b_1) + (1 + \tau^2) \bar{\Gamma}(\tau),$$

con

$$(22) \quad \bar{\Gamma}(\tau) \equiv (b_7 - a b_6 + a^2 b_4) \tau^4 + (2 a b_5 - 2 a^2 b_3) \tau^3 + (2 b_7 - 2 a^2 b_4 + 4 a^2 b_2) \tau^2 + \\ + (2 a b_5 + 2 a^2 b_3) \tau + b_7 + a b_6 + a^2 b_4,$$

dal confronto tra la (20) e (21) si riconosce immediatamente che deve essere $b_0 = b_1 = 0$ e questo avviene se e solo se $(A - B)(\xi_1^2 + \xi_2^2) = 0$.

In relazione anche alle (19) ci si è quindi ricondotti ad esaminare quando $\bar{\Gamma}(\tau)$, definito dalla (22), ha radici doppie in τ ed è positivo subordinatamente alle due eventualità:

$$\text{II}_1) \quad A = B, \quad A' = B' = 0; \quad \text{II}_2) \quad AC = BC - A'^2, \quad B' = 0, \quad \xi_1 = \xi_2 = 0, \quad A' \neq 0; \quad (1)$$

II₁) Nella prima eventualità, è possibile, senza ledere la generalità, assumere $I_1 = 0$ e un controllo diretto porta a riconoscere che la condizione richiesta su $\bar{\Gamma}(\tau)$ è ottenibile solo nel seguente caso: $K_1 I_2 + (A a^2 + C c_3^2) \xi_2 = 0$, $a^2 I_2^4 - E_1 (A a^2 + C c_3^2) I_2 + (A a^2 + C c_3^2)^2 (\xi_2^2 + \xi_1^2) = 0$.

Sotto queste condizioni si ottengono le seguenti forme di $\bar{\Gamma}(\tau)$: $\bar{\Gamma}(\tau) = (E_1 (A a^2 + C c_3^2) - k_1^2)(1 + \tau^2)^2$ se $I_2 = 0$, e $\bar{\Gamma}(\tau) = (\xi_1 (A a^2 + C c_3^2)(1 + \tau^2) + 2 a \tau I_2^2)^2 I_2^{-2}$ se $I_2 \neq 0$.

In corrispondenza alla prima forma di $\bar{\Gamma}$ si riconosce che μ risulta costante. In corrispondenza alla seconda forma è facile accertare che la (18) non può mai essere verificata, perché per valori accettabili dei parametri, il primo membro non ammette il fattore $(1 + \tau^2)^2$.

Si conclude così che per un girostato a struttura giroscopica intorno all'asse di figura non sono possibili precessioni non regolari che non degenerino in precessioni semiregolari.

(1) Questo caso è diverso solo nominalmente da $AC = BC - B'^2$, $A' = 0$, $\xi_1 = \xi_2 = 0$, $B' \neq 0$.

Π_2) Anche in questa eventualità un controllo diretto permette di riconoscere che la condizione richiesta su $\bar{I}(\tau)$ è verificata solamente nei seguenti casi:

- 1) $I_1 I_2 c_3 (I_2 A' c_3 - k_1 (B - A)) \neq 0$, $k_1 I_2 (Ba^2 + Cc_3^2) - A' c_3 (k_1^2 + I_2^2 a^2) = 0$,
 $E_1 A' c_3 (I_2 A' c_3 - k_1 (B - A)) - A' c_3 k_1 I_2^2 + I_2 k_1^2 (B - A) - k_1 I_1^2 A' c_3 = 0$,
con: $\bar{I}(\tau) = [-A' c_3 I_1 (I_2 a + k_1) \tau^2 + 2a (k_1 I_2 (B - A) - I_2^2 A' c_3) \tau +$
 $+ A' c_3 I_1 (I_2 a - k_1)]^2 [I_2 A' c_3 (I_2 A' c_3 - k_1 (B - A))]^{-1}$.
- 2) $I_1 = 0$, $E_1 ((Aa^2 + Cc_3^2)(B - A)) -$
 $- A' c_3 + 2 k_1 I_2 A' c_3 - k_1^2 (B - A) - (Aa^2 + Cc_3^2) I_2^2 = 0$,
con: $\bar{I}(\tau) = A'^{-2} ([A' k_1 (Cc_3 - A' a) - CI_2 (Aa^2 + Cc_3^2 - A' ac_3)] \tau^2 +$
 $+ A' k_1 (Cc_3 + A' a) - CI_2 (Aa^2 + Cc_3^2 + A' ac_3))^2$.
- 3) $I_2 = k_1 = 0$, $E_1^2 A'^2 c_3^2 - (E_1 (Aa^2 + Cc_3^2) - a^2 I_1^2) (E_1 (B - A) + I_1^2) = 0$,
con: $\bar{I}(\tau) = a^2 [(I_1^2 + E_1 (B - A) + E_1 A' c_3) \tau^2 -$
 $- (I_1^2 + E_1 (B - A) - E_1 A' c_3)]^2 [2(E_1 (B - A) + I_1^2)]^{-1}$.
- 4) $k_1 = c_3 = 0$, $ABE_1 - (AI_2^2 + BI_1^2) = 0$ con: $\bar{I}(\tau) = a^2 (BI_1 \tau^2 + 2AI_2 \tau - BI_1)^2 [AB]^{-1}$.

Si riconosce con un calcolo diretto che in nessuna di queste eventualità è possibile verificare la relazione (18) per valori accettabili dei parametri.

Si conclude così che per il girostato pesante non sono possibili precessioni ad asse verticale non regolari che non siano quelle semiregolari individuate da E. Pucci in [5] e [6].

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. BALLI, *Precessioni ad asse verticale del solido pesante*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 55, 1976, 91-104.
- [2] T. LEVI-CIVITA - U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*. Nicola Zanichelli, Bologna 1927.
- [3] G. GRIOLI, *Particular Solutions in Stereodynamics*. In: *Stereodynamics*. Edizioni Cremonese, Roma 1972.
- [4] G. GRIOLI, *Lezioni di Meccanica Razionale*. Edizioni Libreria Cortina, Padova 1983.
- [5] E. PUCCI, *Una classe di ∞^2 precessioni non regolari del girostato soggetto a sollecitazione newtoniana*. Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 62, 1977, 348-352.
- [6] E. PUCCI, *Possibilità dinamica di precessioni semiregolari di seconda specie del girostato in campo newtoniano*. Riv. Mat. Univ. Parma, (4) 3, 1977, 267-271.
- [7] E. PUCCI, *Sulle precessioni non regolari del corpo rigido soggetto a forze di tipo newtoniano*. Rendiconti di Matematica, s. VI, (3) 9, 1976, 365-378.

Istituto di Energetica
Università degli Studi di Perugia
Via F.lli Cairoli, 24 - 06100 PERUGIA