Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Patrizia Longobardi, Mercede Maj, James Wiegold

Gruppi con identità semigruppali: su una congettura di M. V. Sapir

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **2** (1991), n.3, p. 191–196.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1991_9_2_3_191_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1991.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 2:191-196 (1991)

Teoria dei gruppi. — *Gruppi con identità semigruppali: su una congettura di M. V. Sapir.* Nota di PATRIZIA LONGOBARDI, MERCEDE MAJ e JAMES WIEGOLD, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

ABSTRACT. — *Groups with semigroup identities: on a conjecture of M. V. Sapir.* M. V. Sapir conjectured the following: let S be a finitely generated semigroup satisfying the identity $x^2 = 0$, and assume that S is a homomorphic image of a subsemigroup of a nilpotent group G. Then S is finite. If that is true, then a soluble group with a finite basis for its semigroup identities is either abelian or of finite exponent. In this paper we prove the conjecture if either $\gamma_3(G)$ is periodic or S is 3-generator and $\gamma_4(G)$ is periodic.

KEY WORDS: Groups; Identities; Varieties; Semigroups.

RIASSUNTO. — M. V. Sapir ha formulato la seguente congettura: non esiste un semigruppo S infinito, finitamente generabile, soddisfacente l'identità $x^2 = 0$ e immagine omomorfa di un sottosemigruppo di un gruppo G nilpotente. Se ciò vale, ogni gruppo risolubile con una base finita per le sue identità semigruppali è abeliano o di esponente finito. In questo lavoro si prova la congettura di Sapir quando l'interderivato $\gamma_3(G)$ è periodico o se S è 3-generato e $\gamma_4(G)$ è periodico.

1. INTRODUZIONE

I gruppi risolubili con identità semigruppali sono stati inizialmente studiati da A. I. Mal'cev in [3]. Un gruppo nilpotente soddisfa sempre una identità semigruppale (cfr. [3, 4]); viceversa, in [3], Mal'cev ha mostrato che un gruppo risolubile finitamente generato soddisfa una identità semigruppale se e solo se è nilpotente-per-finito.

Recentemente M. V. Sapir in [6] si è interessato dei gruppi nilpotenti-per-finiti con una base finita per le loro identità semigruppali (nella classe di tutti i semigruppi). Non ogni gruppo nilpotente-per-finito gode di questa proprietà, come mostrato da J. R. Isbell in [1]. Sapir in [6] ha provato che un gruppo che sia nilpotente o contenuto in una varietà abeliana per una varietà localmente finita, con una base finita per le sue identità semigruppali, è necessariamente abeliano o di esponente finito. Sapir ha mostrato poi che il risultato precedente si estende ad un qualunque gruppo risolubile se vale la seguente congettura: sia S un sottosemigruppo di un gruppo G nilpotente, allora non esiste un'immagine omomorfa di S che sia un semigruppo infinito, finitamente generabile, soddisfacente l'identità $x^2 = 0$.

In questo lavoro si danno alcune risposte parziali al problema posto da Sapir.

Nel paragrafo 2 si prova che la congettura vale se l'interderivato $\gamma_3(G)$ è periodico, in particolare se G ha classe di nilpotenza 2.

Ovviamente la congettura vale se S è 2-generato, nel paragrafo 3 si prova che essa continua a valere nell'ipotesi S 3-generato e $\gamma_4(G)$ periodico.

(*) Nella seduta del 12 gennaio 1991.

Le notazioni sono per lo più quelle usuali (cfr. [5]). In particolare, se G è un gruppo, si pone $\gamma_1(G) = G$ e, per $i > 1$, $\gamma_i(G) = [\gamma_{i-1}(G), G]$.

Sia ora S un semigruppo. Una parola non vuota viene detta una *quasi potenza di ordine 0*; se n è un intero, $n \geqslant 0$, una *quasi potenza di ordine $n+1$* è una parola della forma $w = uvu$, dove u è una quasi potenza di ordine n (cfr. [2]).

2. Sottosemigruppi di gruppi G con $\gamma_3(G)$ periodico

Si dimostrerà il teorema seguente:

Teorema 2.1. *Sia T un semigruppo finitamente generato immagine omomorfa di un sottosemigruppo S di un gruppo G nilpotente. Si assuma $\gamma_3(G)$ periodico. Se T soddisfa l'identità $x^2 = 0$, allora T è finito.*

Si premettono alcune osservazioni, tra cui il Lemma seguente che sarà molto utile nel seguito:

Lemma 2.2. (cfr. [2]; p. 151). *Sia A un alfabeto finito.*
Esiste allora una sequenza di interi $N(n)$ tali che ogni parola su A di lunghezza almeno $N(n)$ contiene un fattore che è una quasi potenza di ordine n.

Dimostrazione. Si ragioni per induzione su n. Se $n = 0$, l'asserto è ovvio. Sia $n \geqslant 0$, e si supponga l'asserto vero per n. Sia k il numero delle parole su A di lunghezza $N(n)$. Sia w una parola di lunghezza maggiore o uguale a $(N(n) + 1)(k + 1)$. Allora $w = w_1 a_1 w_2 a_2 \ldots w_{k+1} a_{k+1} v$, con $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1} \in A$, $w_1, w_2, \ldots, w_{k+1}$ parole di lunghezza $N(n)$ e v parola su A (eventualmente vuota).

Esistono allora $1 \leqslant i, j \leqslant k+1$ tali che $i \neq j$ e $w_i = w_j$ e, per ipotesi, $w_i = w_j = cabad$, con c, a, b e d parole su A e aba quasi potenza di ordine n. Ne segue $w = sw_i tw_i u = scabadtcabadu$ e, posto $v_1 = sc$, $v_2 = dtc$, $v_3 = du$, $w = v_1 abav_2 abav_3$ dove $abav_2 aba$ è un fattore di w quasi potenza di ordine $n+1$. □

Sia ora G nilpotente con $\gamma_3(G)$ periodico. Si assuma dapprima $\gamma_3(G) = \{1\}$, cioè G nilpotente di classe 2. Allora in G vale l'identità $xyzyx = yxzxy$; ne segue facilmente il Lemma seguente:

Lemma 2.3. *Sia S un sottosemigruppo di un gruppo nilpotente di classe 2. Allora, per $q \geqslant 1$, ogni quasi potenza di ordine q ha la forma $u^{2^{q-1}} v u^{2^{q-1}}$.*

Dimostrazione. Si proceda per induzione su q. Se $q = 1$, l'asserto è ovvio per definizione. Sia vero per q e sia w una quasi potenza di ordine $q+1$. Allora $w = ava$, con a quasi potenza di ordine q, cioè $a = u^{2^{q-1}} b u^{2^{q-1}}$ e $w = u^{2^{q-1}} b u^{2^{q-1}} v u^{2^{q-1}} b u^{2^{q-1}} = u^{2^{q-1}} u^{2^{q-1}} bvb u^{2^{q-1}} u^{2^{q-1}} = u^{2^q} s u^{2^q}$, come volevasi. □

Dai Lemmi 2.2 e 2.3 segue facilmente il Teorema 2.1 quando G ha classe di nilpotenza 2. Si ha in più:

2.4. *Sia T un semigruppo finitamente generato immagine omomorfa di un sottosemi-*

gruppo S di un gruppo G nilpotente di classe 2. Se T soddisfa l'identità $x^n = 0$ ($n \geqslant 1$ fissato), allora T è finito.

Dimostrazione. Sia $f\colon S \to T$ un epimorfismo, e sia B un sistema finito di generatori di T. Si può allora assumere S generato da A, dove A è un sottoinsieme finito di S tale che $f(A) = B$; si può inoltre supporre $G = \langle S \rangle$.

Fissato $q \geqslant \log_2 n + 1$, per il Lemma 2.2 ogni parola di lunghezza maggiore o uguale a $N(q)$ contiene una quasi potenza di ordine q e quindi, per il Lemma 2.3, una parola del tipo u^n. Ne segue facilmente l'asserto. $\square$

Sia ora G un gruppo nilpotente di classe arbitraria con $\gamma_3(G)$ finito. Allo scopo di provare il Teorema 2.1, si procederà per induzione su $|\gamma_3(G)|$. Si osservi in primo luogo che:

Lemma 2.5. *Siano G un gruppo, $H \leqslant \zeta(G)$ un sottogruppo finito di G e S un sottosemigruppo di G generato dall'insieme finito A. Esista un sottoinsieme finito $\overline{X}$ di $SH/H = \overline{S}$ tale che, per ogni $\overline{w} \in \overline{S} - \overline{X}$, si abbia $\overline{w} = us^2vH$, con $u, s, v \in S$.*

Allora esiste un sottoinsieme finito Y di S tale che $w = xy^2z$, con $x, y, z \in S$, per ogni $w \in S - Y$.

Dimostrazione. Si ponga $|\overline{X}| = t$, $|H| = m$, $h = [\log_2 m] + 1$, $n = t + h + 1$, e sia $N(n)$ l'intero di cui al Lemma 2.2

Si proverà che ogni elemento $w \in S$ di lunghezza maggiore o uguale a $N(n)$ si scrive nella forma $w = ab^2c$, con $a, b, c \in S$; l'asserto ne seguirà banalmente.

Sia allora $w \in S$ di lunghezza maggiore o uguale a $N(n)$. Per il Lemma 2.2 w contiene una quasi potenza di ordine n, e si ha: $w = \ldots b_{n-1}a_nb_{n-1}\ldots$, con $b_{n-1} = b_{n-2}a_{n-1}b_{n-2}$, $b_{n-2} = b_{n-3}a_{n-2}b_{n-3}, \ldots, b_{n-h+1} = b_{n-h}a_{n-h+1}b_{n-h}$, a_i, $b_i \in S$, $b_{n-h} = b_{t+1}$ quasi potenza di ordine $t + 1$.

Si ponga $b_{t+1} = b$. Allora b compare in w almeno m volte, si ha cioè:

$$(*) \qquad w = x_1bx_2b\ldots x_mb\ldots, \qquad \text{con } x_1, x_2, \ldots, x_m \in S.$$

Inoltre b è una quasi potenza di ordine $t + 1$, sicché si ha: $b = u_tz_{t+1}u_t$, con $u_t = u_{t-1}z_tu_{t-1}$, $u_{t-1} = u_{t-2}z_{t-1}u_{t-2}, \ldots, u_2 = u_1z_2u_1$, $u_1 = u_0z_1u_0$, e con z_i, $u_j \in S$.

Si noti che, per ogni $i, j, 0 < i < j$, si ha: $b = \ldots u_iz_ju_i\ldots = \ldots u_{i-1}z_iu_{i-1}z_ju_{i-1}\ldots$.

Per ipotesi si ha, per un opportuno $j, z_j = ys^2zh$, con $y, s, z \in S$, $h \in H$, oppure esistono i e j, con $i < j$, tali che $z_j = z_ih$, con $h \in H$. Nel primo caso $b = w_1w_2^2w_3h$, con w_1, w_2, w_3 opportuni elementi di S e $h \in H$. Nel secondo caso si ha $b = \ldots u_{i-1}z_iu_{i-1}z_ju_{i-1}\ldots = \ldots u_{i-1}z_iu_{i-1}z_ihu_{i-1}\ldots = \ldots(u_{i-1}z_i)^2h\ldots$. Pertanto è sempre

$$(**) \qquad b = w_1w_2^2w_3h, \qquad \text{con } h \in H \text{ e } w_i \in S.$$

Da (*) e (**) segue allora:

$$w = x_1 b x_2 b \dots x_m b \dots = x_1 w_1 w_2^2 w_3 b x_2 w_1 w_2^2 w_3 b \dots w_1 w_2^2 w_3 b \dots =$$

$$= x_1 w_1 w_2^2 w_3 x_2 w_1 x_2^2 w_3 \dots b^m .$$

Ma $b^m = 1$, pertanto si ha $w = (x_1 w_1) w_2^2 (w_3 x_2 \dots) = z_1 z_2^2 z_3$, con z_1, z_2, $z_3 \in S$, come richiesto. □

Si è ora in grado di dimostrare il Teorema 2.1:

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.1. Si dimostrerà che esiste un sottoinsieme finito Y di S tale che, per ogni $w \in S - Y$, si ha $w = xy^2 z$, con $x, y, z \in S$. Ne seguirà l'asserto.

Ragionando come nella dimostrazione di 2.4, si possono assumere S e G finitamente generabili. Allora $\gamma_3(G)$ è finito, e si può procedere per induzione su $|\gamma_3(G)|$. Se $|\gamma_3(G)| = 1$ allora G ha classe di nilpotenza uguale a 2, e l'asserto segue da 2.2 e 2.3, ragionando come nella dimostrazione di 2.4.

Sia ora $|\gamma_3(G)| > 1$, e sia $H \leqslant \gamma_3(G) \cap \zeta(G)$ con $|H| \neq 1$. Allora $|\gamma_3(G/H)| < |\gamma_3(G)|$ e $\overline{S} = SH/H$ è un sottosemigruppo finitamente generato di G/H. Per induzione esiste allora un sottoinsieme $\overline{Y}$ di $\overline{S}$ nelle condizioni volute, e l'asserto segue dal Lemma 2.5. □

3. SOTTOSEMIGRUPPI 3-GENERATI DI GRUPPI NILPOTENTI

Sia S un sottosemigruppo di un gruppo nilpotente di classe 3. Si ha allora (cfr. [4]) $xyzyxwyxzxy = yxzxywxyzyx$, per ogni $x, y, z \in S$. Ne segue il seguente:

LEMMA 3.1. *Sia T un semigruppo generato da $\{a, b, c\}$, immagine omomorfa di un sottosemigruppo di un gruppo nilpotente di classe 3. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $w \in T, w$ ha lunghezza minore o uguale a n, oppure $w = xy^2 z$, con $x, y, z \in T$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $w \in T$ non vuota e si assuma w non contenente quadrati. Si ponga $x_1 = dad$, $x_2 = bab$, $y_1 = aba$, $y_2 = dbd$, $z_1 = ada$, $z_2 = bdb$. Si proverà dapprima che:

(1) Se esistono $i, j, k \in \{1,2\}$ tali che w non contiene x_i, y_j, z_k, allora w ha lunghezza limitata da un opportuno intero m.

È sufficiente supporre che:

α) w non contiene x_1, y_1, z_1, o che β) w non contiene x_1, y_1, z_2.

Ovviamente si può inoltre assumere w di lunghezza maggiore o uguale a 8. Si ha allora $w = w_1 d w_2 d \dots$, con w_i nel sottosemigruppo generato da a e b, e quindi con w_i di lunghezza minore o uguale a 3.

Si assuma dapprima che valga la α). Se $w_2 = b$, allora si verifica facilmente che per le ipotesi w è contenuta in $w_1 dbdabdbabdab$, o in $w_1 dbdabdbadbdabdb$, sicché w ha lunghezza minore o uguale a 18. Se invece $w_2 = ba$, allora w è contenuta in $w_1 dbadbd\dots$ e w ha lunghezza minore o uguale a 21, per il caso precedente. Se poi $w = bab$, allora w è in $w_1 dbabdab$ o in $w_1 dbabdbad\dots$, da cui w ha lunghezza al più 25. Infine, se $w_2 = ab$, si ottiene dalle ipotesi che w è contenuta in $w_1 dabda$ o in $w_1 dabdbad\ldots$, e ancora w ha lunghezza limitata.

Valga ora la β). Allora w è contenuta in $w_1 dabda$ se $w_2 = ab$, in $w_1 dbdabd$ se $w_2 = b$, ed in $w_1 dbabdab$ se $w_2 = bab$. Infine se $w_2 = ba$, applicando i precedenti risultati a $w_1 dbadabd\ldots$ e a $w_1 dbadbd\ldots$, si ottiene l'asserto.

Si è quindi provata la (1). Si osservi ora che:

(2) w non può contenere parole del tipo $ux_i vx_j s$, o $uy_i vy_j s$, o $uz_i vz_j s$, per qualche $u, v, s \in T$ non vuota e con $i \neq j$.

Infatti per assurdo sia, ad esempio, $w = \ldots x_1 vx_2 \ldots = \ldots dadvbab\ldots$, con v parola non vuota. Allora, per le ipotesi, $v = bv_1 d$, e $w = \ldots bdadbv_1 dbabd\ldots$, con v_1 non vuota. Ne segue v_1 di lunghezza maggiore di 1, altrimenti si avrebbe $v_1 = a$ e $w = = \ldots bdadbadbabd\ldots$ conterrebbe un quadrato. Si ottiene allora, per l'osservazione all'inizio del paragrafo, $w = \ldots dbabdv_1 bdadb\ldots$. Allora $v_1 = av_2 a$, con v_2 parola non vuota, e v_1 ha lunghezza maggiore di 1. Ma se $v_1 = aba\ldots$, allora $w = \ldots bdadbaba\ldots = = \ldots bdad(ba)^2 \ldots$, un assurdo. Se $v_1 = abd\ldots$, allora $w = \ldots dbabdabd\ldots = \ldots db(abd)^2 \ldots$, un assurdo. Se $v_1 = ada\ldots$, allora $w = \ldots dbabdada\ldots = \ldots dbab(da)^2 \ldots$, un assurdo. Infine, se $v_1 = adb\ldots$, allora $w = \ldots bdadbadb\ldots = \ldots bd(adb)^2 \ldots$, una contraddizione. Pertanto vale la (2). Ne segue facilmente che w contiene al più una volta le parole $x_i x_j$, $i \neq j$, e così $y_i y_j$ e $z_i z_j$.

Si proverà ora che w ha lunghezza al più $4m + 8$, con m di cui al punto (1).

Si ha, per l'osservazione (2), $w = vw_1 a_1^{\varepsilon_1} w_2 a_2^{\varepsilon_2} w_3 a_3^{\varepsilon_3} w_4 t$, con v e t di lunghezza 1, $\{a_1, a_2, a_3\} = \{x_i x_j, y_i y_j, z_i z_j / i \neq j, i, j \in \{1,2\}\}$, $\varepsilon_l \in \{0,1\}$ (a_l^0 uguale alla parola vuota) e con w_r vuota o soddisfacente le ipotesi di (1) ($l \in \{1,2,3\}$, $r \in \{1,\ldots,4\}$). Allora ogni w_r ha lunghezza al più m, e w ha lunghezza al più $4m + 6 + 2$, come richiesto. □

Si è ora in grado di provare il

Teorema 3.2. *Sia T un semigruppo 3-generato, immagine omomorfa di un sottosemigruppo di un gruppo G nilpotente. Si assuma $\gamma_4(G)$ periodico. Se T soddisfa l'identità $x^2 = = 0$, allora T è finito.*

Dimostrazione. Basta ragionare come nella dimostrazione del Teorema 2.1, utilizzando il Lemma 3.1 nel caso $\gamma_4(G) = \{1\}$. □

Lavoro eseguito con un contributo del M.P.I.

Bibliografia

[1] J. R. Isbell, *Two examples in varieties of monoids.* Proc. Cambridge Philos. Soc., 68, 1970, 265-266.

[2] M. Lothaire, *Combinatorics on words.* In: *Encyclopedia of Mathematics and its applications*, vol. 17, Addison-Wesley Publishing Company, 1983.

[3] A. I. MAL'CEV, *Nilpotent semigroups.* Ivanov Ped. Inst. Uchen. Zap. Fiz. Mat. Nauki, 1953, 107-111.

[4] B. H. NEUMANN - T. TAYLOR, *Subsemigroups of nilpotent groups.* Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 274, 1963, 1-4.

[5] H. NEUMANN, *Varieties of groups.* Springer Verlag, Berlin 1967.

[6] M. V. SAPIR, *Problems of Burnside type and the finite basis problems in varieties of semigroups.* Math. USSR Izvestiya, vol. 30, 1988, n. 2.

P. Longobardi e M. Maj: Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli»
Università degli Studi di Napoli
Via Mezzocannone, 8 - 80134 NAPOLI

J. Wiegold: School of Mathematics - University of Wales
College of Cardiff - CARDIFF CF2 4AG (Gran Bretagna)