Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Giuseppe Creazza, Arturo Natali

Note critiche sui carichi di collasso dei continui bidimensionali isotropi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **2** (1991), n.2, p. 173–176.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1991_9_2_2_173_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1991.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 2:173-176 (1991)

Meccanica dei continui. — *Note critiche sui carichi di collasso dei continui bidimensionali isotropi.* Nota di Giuseppe Creazza e Arturo Natali, presentata (*) dal Socio E. Giangreco.

Abstract. — *Critical notes on collapse load of bidimensional isotropic continuous bodies.* Concerning bidimensional isotropic continuous bodies in cracking phase it can be demonstrated, in the sole hypothesis that cracking lines univocally represent the collapse mechanism, the impossibility to obtain the optimized multiplier of collapse load. The real configuration can be reached also considering deformation capabilities of the investigated continuum body.

Key words: Cracking lines; Collapse mechanism; Optimized load multiplier; Linear programming.

Riassunto. — Nei continui bidimensionali isotropi in fase fessurata si dimostra, nella sola ipotesi che le linee di rottura rappresentino univocamente il meccanismo di collasso, la impossibilità di ottenere un moltiplicatore ottimale del carico. La configurazione reale può essere definita considerando anche la capacità deformativa del continuo in esame.

Per i continui bidimensionali isotropi in cemento armato si è da tempo osservato che i moltiplicatori di collasso stimati a mezzo della teoria delle linee di rottura di Johansen [1] risultano nella maggioranza dei casi inferiori a quelli ricavabili a mezzo della sperimentazione. Le differenze tra carichi teorici e sperimentali sono state giustificate dalla presenza degli effetti parassiti dovuti a sforzi normali in regime di spostamenti finiti che, specie per livelli di carico prossimi al collasso, possono notevolmente influenzare l'assetto statico e deformativo delle strutture sottoposte a prova.

Poiché i carichi di Johansen si ottengono dall'ipotesi semplificativa di linee di rottura deducibili dal comportamento rigido dei pannelli e plastico lungo le linee di articolazione, ci siamo posti il tema di indagare se una parte della citata differenza dipenda dall'assunzione di base di queste semplificazioni.

In quest'ottica, per definire il quadro di collasso abbiamo ritenuto utile, ferma restando l'ipotesi di base di comportamento rigido dei pannelli, rimuovere l'ulteriore ipotesi di comportamento plastico lungo le linee di articolazione e di sostituirla con quella aderente alla realtà fisica del fenomeno fondata sulla considerazione che la matrice delle linee di rottura è geometricamente definita in modo univoco all'atto della formazione dell'intero quadro fessurativo.

Lo scopo dell'indagine è quindi mirato a valutare se esistano o meno le possibilità di definire il moltiplicatore ottimale dei carichi dei continui bidimensionali, associando al comportamento rigido dei pannelli il comportamento in fase fessurativa delle future linee di articolazione. Poiché, come verrà dimostrato nel seguito, tale possibilità non sussiste, sarà logico concludere che l'effettivo moltiplicatore dei carichi si potrà

(*) Nella seduta del 15 dicembre 1990.

ottenere solo rimuovendo anche l'ulteriore ipotesi di pannello rigido, abbandonando quindi entrambi i supporti di base della teoria di Johansen. È possibile oggi rimuovere l'ipotesi di pannello rigido e ottenere dei meccanismi di rottura più prossimi alla configurazione reale. Tale configurazione, pur conservando la semplicità delle schematizzazioni in linee di fessurazione, darà un moltiplicatore dei carichi superiore a quello formalizzato da Johansen che, per il suo intrinseco approccio, fornisce un valore di minimo.

Tutto ciò premesso, per lo scopo che ci siamo proposto è necessario prioritariamente riferire sul comportamento dei continui in esame a quadro fessurativo interamente formato.

In questa fase è stato dimostrato [2] che ogni linea di fessurazione si comporta come una cerniera elastica cilindrica a stato di tensione e deformazione anelastica costante lungo tutto il suo sviluppo. Ne è conseguito che ogni linea di fessurazione è rappresentabile come una distorsione di Volterra e che agli effetti evolutivi il continuo assume carattere isostatico indipendentemente dalla sua forma e dal tipo di vincolo.

Le dimostrazioni sopra citate hanno consentito poi [3] di esporre le seguenti considerazioni:

– essendo ogni linea rappresentabile come una distorsione di Volterra, è possibile associare a ciascuna di esse la rotazione anelastica Φ che la caratterizza;

– le rotazioni di cui sopra, per rispettare la congruenza della deformazione, devono tra loro stare nel rapporto cinematico che deriverebbe dalla trasformazione del continuo nel poliedro definito dalle future linee di articolazione;

– per la proporzionalità diretta tra momenti e rotazioni anelastiche ($M = k\Phi$, con k braccio di leva della coppia interna) anche questi ultimi devono rispettare lo stesso rapporto cinematico esistente per le rotazioni.

In termini analitici, per un assegnato quadro fessurativo, detti Φ e M la rotazione e il momento di una prefissata linea di riferimento, si può scrivere:

(1) $$\Phi_r = \rho_r \Phi, \qquad M_r = \rho_r M$$

dove ρ_r rappresenta il rapporto cinematico della generica linea r rispetto a quella di riferimento.

Per quanto esposto l'energia dissipata lungo la generica linea r di fessurazione risulta:

(2) $$\int_{l_r} M_r \Phi_r \, ds = M \Phi \rho_r^2 \, l_r$$

ove M può rappresentare sia il momento generico che il momento ultimo plastico M_p.

Se si fossero adottate le ipotesi di Johansen l'energia dissipata lungo la generica linea r sarebbe stata:

(3) $$\int_{l_r} M_p \Phi_r \, ds = M_p \Phi \rho_r \, l_r$$

dove M_p rappresenta il momento plastico del continuo isotropo.

Il confronto tra la (2) e la (3), scritte ciascuna per l'intero continuo, assume qui un peculiare significato in quanto evidenzia il diverso ruolo che assume il coefficiente ρ_r con i due approcci. Nel primo approccio infatti l'energia dissipata lungo le linee di fessurazione dipende in egual misura sia dalle rotazioni anelastiche che dai momenti che ad esse competono, mentre con il secondo approccio risulta che l'energia dissipata lungo la linea di articolazione dipende esclusivamente dalle rotazioni anelastiche.

Poiché, come è noto, per ogni assegnato quadro tipologico di fessurazione o rottura, il moltiplicatore ottimale dei carichi (a parità di energia fornita dagli stessi) dipende dall'energia dissipata, il risultato di ottimizzazione che si ottiene applicando le espressioni (2) e (3) può essere diverso nei due casi.

È questa una prima constatazione che non definisce però il problema di ottimizzazione del moltiplicatore ma solo evidenzia, come detto, la possibilità di differenze nei risultati.

Per una ricerca di carattere generale su detto moltiplicatore ottimale dei carichi sia in fase plastica che fessurata, l'approccio più idoneo è rappresentato dalle formulazioni di min/max deducibili dai metodi della programmazione lineare.

In questo ambito è stato dimostrato [4] che il moltiplicatore di collasso sotto le ipotesi di Johansen è ottenibile in modo generale in programmazione lineare sia come problema di massimo (teorema statico) che come problema di minimo (teorema cinematico). È stato inoltre dimostrato che il moltiplicatore esatto è fornito dall'eguaglianza numerica delle due soluzioni (teorema misto).

Ciò premesso, esaminiamo ora quali differenze sussistono nelle formulazioni numeriche della programmazione lineare, quindi nei risultati, quando per uno schema di linee formanti un quadro tipologico da esaminare si consideri il loro comportamento a rottura o in fase fessurata.

Con riferimento all'approccio statico di più immediata comprensione fisica (premesso che la variabile dello schema di linee è rappresentata dal parametro cinematico ρ_r) la funzione obiettivo da massimizzare nella variabile ρ_r è fornita dall'equazione di equilibrio:

$$\partial^2 M_x/\partial x^2 + \partial^2 M_y/\partial y^2 + 2\partial^2 M_{xy}/\partial x\,\partial y + \mu p(x,y) = 0 \tag{4}$$

con la condizione:

$$\mu = \mu_{\max}\,. \tag{5}$$

Le limitazioni, ovvero le relazioni di vincolo da associare alla (4) per rendere $\mu = \mu_{\max}$, sono date dalle:

$$(a_{ik} M_{xi} + b_{ik} M_{yi} + c_{ik} M_{xyi}) \leq d_{ik}\,. \tag{6}$$

Ora sia che le linee di suddivisione del continuo rappresentino la fessurazione o la rottura, la (4) rimane invariata mentre variano nella sostanza i coefficienti della relazione di vincolo (6).

In questo senso, qualora le linee del quadro si considerino come linee di rottura, i coefficienti del primo membro delle (6) dipendono dalle leggi di plasticizzazione e il coefficiente d_{ik} del secondo membro è definito nella superficie limite dei due semiconi di plasticizzazione di Johansen [5].

Qualora per contro le linee del quadro si considerino come linee di fessurazione, i coefficienti del primo membro delle (6) dipendono dalle leggi di fessurazione e il coefficiente d_{ik} del secondo membro è definito dalle superfici di interazione dei momenti in fase fessurata.

Nel caso di linee a comportamento plastico, i termini d_{ik} rappresentano «una frontiera fissa» da non superare al variare di ρ_r e il problema di massimo ha sempre soluzione.

Nel caso di linee di fessurazione i termini d_{ik} rappresentano «una frontiera mobile» in quanto le superfici di interazione dei momenti, ricordando la seconda delle (1), sono costrette a variare con il variare del parametro ρ_r. Stante la mobilità delle frontiere le relazioni di vincolo (6) perdono di significato e il problema di massimo, sotto queste ipotesi, non può trovare soluzione: non può sussistere dunque un moltiplicatore ottimale dei carichi.

Risulta quindi dimostrata l'impossibilità di ottenere un moltiplicatore ottimale dei carichi con la sola sostituzione nelle linee di suddivisione dei pannelli rigidi del continuo delle leggi di plasticizzazione con quelle di fessurazione.

Pertanto, come esposto nella premessa, conservando per semplicità la configurazione in linee di rottura, per un assegnato schema fessurativo, al fine di definire il parametro ρ_r di ottimizzazione del carico di collasso, sarà necessario rimuovere anche l'ipotesi di rigidità dei pannelli e procedere considerando il continuo nelle sue effettive fasi comportamentali.

Bibliografia

[1] C. H. Massonet - M. Save, *Calcul plastique des constructions.* ASBL, Bruxelles 1961.

[2] G. Creazza, *Nuova interpretazione sul comportamento delle lastre isotrope in cemento armato in fase di fessurazione avanzata.* Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, vol. 109, 1974-1975, 103-107.

[3] G. Creazza, *Relazioni caratteristiche nel calcolo dei continui bidimensionali isotropi in cemento armato dalla completa fessurazione al collasso.* Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, vol. 114, 1980, 221-225.

[4] G. Ceradini - C. Gavarini, *Calcolo a rottura e programmazione lineare. Continui bi e tridimensionali, Nota I, Fondamenti teorici.* Giornale del Genio Civile, n. 2-3, 1968, 124-137.

[5] G. Ceradini - C. Gavarini, *Calcolo a rottura e programmazione lineare.* Giornale del Genio Civile, n. 1-2, 1965, 48-64.

G. Creazza: Dipartimento di Scienza e Tecnica del Restauro
Istituto Universitario di Architettura di Venezia
S. Croce-Tolentini, 191 - 30135 Venezia

A. Natali: Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni
Università degli Studi di Padova
Via F. Marzolo, 9 - 35131 Padova