Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Diego Pallara

Nuovi teoremi sulle funzioni a variazione limitata

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **1** (1990), n.4, p. 309–316.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1990_9_1_4_309_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1990.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 1:309-316 (1990)

Calcolo delle variazioni. — *Nuovi teoremi sulle funzioni a variazione limitata.* Nota di DIEGO PALLARA, presentata (*) dal Socio E. DE GIORGI.

ABSTRACT. — *New theorems on functions of bounded variation.* The aim of this *Note* is to present some connections between the classical spaces of functions of bounded variation and other classes of functions whose variation is in some sense controlled, namely the *GBV* classes introduced by E. De Giorgi and L. Ambrosio, as well as the classes *BBV, LBV, GBV** defined in this paper. Proofs and further results will appear elsewhere.

KEY WORDS: *BV* functions; Sets of finite perimeter; Relaxation.

RIASSUNTO. — Vengono presentate alcune connessioni tra gli spazi classici delle funzioni a variazione limitata ed altre classi di funzioni la cui variazione è opportunamente controllata, cioè le classi *GBV* introdotte da E. De Giorgi e L. Ambrosio, e le classi *BBV, LBV, GBV** introdotte in questa *Nota*. Le dimostrazioni dei risultati enunciati, insieme con altri dettagli, appariranno in un successivo lavoro.

In questo lavoro enunciamo alcuni risultati riguardanti alcune classi funzionali che generalizzano la classe *BV* delle funzioni a variazione limitata (le classi *GBV* introdotte in [7]) che sembrano utili nello studio di alcuni problemi variazionali e delle loro possibili generalizzazioni (vedi [8], [4], [9], [5], e [6] per un'ampia panoramica di problemi e congetture collegati): tali classi vengono introdotte mediante una proprietà variazionale (cfr. Definizione 6) che si prova poi essere equivalente ad una proprietà di tipo distribuzionale (Teorema 3).

Viene successivamente presentata una classe di funzioni a variazione limitata particolarmente maneggevole (la classe *BBV*) costituita dalle funzioni limitate ed a variazione limitata su un insieme limitato e di perimetro finito e le classi ad esse collegate *LBV* e *GBV**. Di tali classi enunciamo alcune proprietà che sembrano interessanti. In particolare, segnaliamo i Teoremi 4 e 5, che legano le classi *LBV* agli spazi classici *BV* delle funzioni a variazione limitata. Allo scopo di rendere più chiara l'esposizione, richiamiamo dapprima alcune proprietà delle funzioni vettoriali a variazione limitata.

Le dimostrazioni dei risultati presentati in questa nota sono esposte nel lavoro [12]. Desidero ringraziare E. De Giorgi e L. Ambrosio per le numerose utili conversazioni.

Adottiamo le seguenti notazioni standard: $B_\rho(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < \rho\}$, $B_\rho = B_\rho(0)$, $S^{n-1} = \partial B_1$, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ il prodotto scalare in uno spazio euclideo, (e_i) la base canonica di $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) = \{w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k,\ w \text{ lineare}\}$, munito della norma

$$|w| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |w(e_i)|^2},$$

$\mathcal{A}(\Omega)$ la classe degli aperti $A \subseteq \Omega$, dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto, $\mathcal{B}(\Omega)$ la classe dei boreliani

(*) Nella seduta del 10 marzo 1990.

$B \subsetneq \Omega$, dove $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$ è aperto, $A \subset\subset \Omega$ significa che $A \in \mathcal{A}(\Omega)$, $\overline{A}$ è compatto e $\overline{A} \subset \Omega$, χ_B la funzione caratteristica di un insieme B, Id la funzione identità, $Id(x) = x$ $\forall x$, $|B|$ la misura di Lebesgue di un insieme misurabile $B \subsetneq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}_k$ la misura di Hausdorff k-dimensionale in $\mathbb{R}^n$, $k \in [0, n]$, $\tilde{\mathbb{R}}^k = \mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$ la compattificazione di Alexandrov di $\mathbb{R}^k$, $|\mu|$ la misura variazione totale di una misura μ, Du il gradiente di u nel senso delle distribuzioni, $a \otimes b$ per $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^k$ è definito da $a \otimes b(\xi) = \langle a|\xi\rangle\, b$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Denotiamo inoltre con CN la classe delle funzioni convesse $\vartheta : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \to [0, +\infty)$ tali che: $\vartheta(\lambda w) = \lambda \vartheta(w)$ $\forall \lambda > 0$, $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$; $\vartheta(w) = 0$ se e solo se $w = 0$. Nel seguito Ω indica un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1 (cfr. [7]). Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}^k$ una funzione boreliana. Per $x \in \Omega$, $z \in \tilde{\mathbb{R}}^k$, poniamo $z = \operatorname*{aplim}_{y \to x} u(y)$ (limite approssimato di u in x) se

$$g(z) = \lim_{\rho \to 0} |B_\rho|^{-1} \int_{B_\rho} g(u(x + \xi))\, d\xi$$

per ogni funzione $g : \tilde{\mathbb{R}}^k \to \mathbb{R}$ continua (e quindi limitata).

Se $z \in \mathbb{R}^k$ allora questa definizione coincide con quelle date in [10, 13] (vedi [2]). L'insieme

$$S_u = \{x \in \Omega : \text{non esiste } \operatorname*{aplim}_{y \to x} u(y)\}$$

è un insieme boreliano, trascurabile rispetto alla misura di Lebesgue; si può quindi sempre scegliere una funzione $\tilde{u}$ equivalente a u tale che $\tilde{u}(x) = \operatorname*{aplim}_{y \to x} u(y)$ per *q.o.* $x \in \Omega$.

Definizione 2 (cfr. [7]). Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}^k$ una funzione boreliana, e sia $\nu \in S^{n-1}$. Per $x \in \Omega$, $z \in \tilde{\mathbb{R}}^k$ poniamo $z = \mathrm{tr}^+(x, u, \nu)$ (traccia esterna in x lungo ν) se

$$g(z) = \lim_{\rho \to 0} 2|B_\rho|^{-1} \int_{B_\rho \cap \{y : \langle y|\nu\rangle > 0\}} g(u(x + \xi))\, d\xi$$

per ogni funzione $g : \tilde{\mathbb{R}}^k \to \mathbb{R}$ continua (vedi [13] per una definizione equivalente); definiamo anche la traccia interna come segue: $\mathrm{tr}^-(x, u, \nu) = \mathrm{tr}^+(x, u, -\nu)$.

Osserviamo che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) $z = \operatorname*{aplim}_{y \to x} u(y)$;

(ii) $\mathrm{tr}^-(x, u, \nu) = \mathrm{tr}^+(x, u, \nu) = z$.

Inoltre, se esistono la traccia interna e quella esterna in un punto $x \in S_u$ lungo due direzioni ν, ν' allora necessariamente $\nu = \pm \nu'$.

Definizione 3 (cfr. [7]). Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}^k$ una funzione boreliana. Per $x \in \Omega \setminus S_u$ con $\tilde{u}(x) \in \mathbb{R}^k$, diciamo che u è differenziabile in media in x se esiste un operatore lineare $\nabla u(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ (che è detto differenziale approssimato di u in x) tale che:

$$\operatorname*{aplim}_{y \to x} \frac{|u(y) - \tilde{u}(x) - [\nabla u(x)](y - x)|}{|y - x|} = 0.$$

Vale il seguente

TEOREMA 1. *Sia* $u:\Omega\to\mathbf{R}^k$ *misurabile. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) Du *è una misura di Radon su* Ω, $|Du|(\Omega)<+\infty$;

$$\text{(ii)}\quad \inf\left\{\liminf_{h\to\infty}\int_\Omega \vartheta(\nabla u_h)\,dx,\ (u_h)\subset C^1(\Omega),\ u_h\to u \text{ q.o. in } \Omega\right\}<+\infty\quad \forall\vartheta\in CN;$$

$$\text{(iii)}\quad \inf\left\{\liminf_{h\to\infty}\int_\Omega \vartheta(\nabla u_h)\,dx,\ (u_h)\subset C^1(\Omega),\ u_h\to u\ L^1_{\mathrm{loc}}\ \ \Omega\right\}<+\infty\quad \forall\vartheta\in CN;$$

$$\text{(iv)}\quad \inf\left\{\liminf_{h\to\infty}\int_\Omega \vartheta(\nabla u_h)\,dx,\ (u_h)\subset C^1(\Omega),\ u_h\to u\ \ w-\mathcal{D}'(\Omega)\right\}<+\infty\quad \forall\vartheta\in CN,$$

dove $u_h\to u\ \ w-\mathcal{D}'$ *significa che* u_h *converge debolmente ad* u *nel senso delle distribuzioni;*

$$\text{(v)}\quad \sup\left\{\int_\Omega\left\langle u\,\middle|\,\sum_{j=1}^n \partial_{x_j}w_j\right\rangle dx,\ w\in C_0^1(\Omega,\mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^k)),\ \vartheta^*(w)=0\right\}<+\infty\quad \forall\vartheta\in CN,$$

dove $\vartheta^*(z)=\sup\{\langle y|z\rangle-\vartheta(y),\ y\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^k)\}$, *e abbiamo posto* $w_j=w(e_j)$;

$$\text{(vi)}\quad \sup\left\{\limsup_{\varepsilon\to0}\int_A \vartheta(\nabla(u*\varphi_\varepsilon))\,dx,\ A\subset\subset\Omega\right\}<+\infty\quad \forall\vartheta\in CN,\ \textit{dove abbiamo posto}$$

$$\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)\quad \textit{per}\quad \varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n),\ \varphi\geq0,\ \int_{\mathbf{R}^n}\varphi=1.$$

Inoltre per ogni $\vartheta\in CN$ *gli estremi inferiori in* (ii), (iii), (iv), *e gli estremi superiori in* (v), (vi) *coincidono. Il loro comune valore sarà denotato con* $\int_\Omega \vartheta(Du)$.

OSSERVAZIONE 1. Notiamo che se esiste $\vartheta_0\in CN$ tale che

$$\int_\Omega \vartheta_0(Du)<+\infty,$$

allora

$$\int_\Omega \vartheta(Du)<+\infty\qquad \text{per ogni } \vartheta\in CN.$$

Per ogni funzione misurabile $u:\Omega\to\mathbf{R}^k$ e per ogni $\vartheta\in CN$ la funzione d'insieme che ad ogni $A\in\mathcal{A}(\Omega)$ associa $\int_A\vartheta(Du)$ può essere estesa univocamente a $\mathcal{B}(\Omega)$ ponendo:

$$\int_B \vartheta(Du)=\inf\left\{\int_A\vartheta(Du),\ B\subseteq A,\ A\in\mathcal{A}(\Omega)\right\};$$

cosí estesa, la funzione

$$B \mapsto \int_B \vartheta(Du)$$

è una misura di Borel regolare che denotiamo $\mu_{\vartheta,u}$. Inoltre, per u fissata, tali misure, al variare di ϑ in CN, risultano mutuamente assolutamente continue. La misura $\int_B |Du|$ sarà denotata $|Du|(B)$.

Diamo ora la seguente

Definizione 4. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}^k$ misurabile; diciamo che u è a variazione limitata in Ω ($u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^k)$) se $u \in L^1(\Omega)$ e $\int_\Omega \vartheta(Du) < +\infty$. Diciamo inoltre che $u \in BV_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ se $u \in BV(\Omega', \mathbb{R}^k)$ per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Ricordiamo brevemente alcune proprietà delle funzioni BV; per ampie trattazioni rinviamo per esempio a [10, 11], [13-15], e a [3] per alcuni recenti risultati strettamente legati agli argomenti trattati in questo lavoro.

Sia $u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Allora per $\mathcal{H}_{n-1}$-q.o. $x \in S_u$ esiste $\nu \in S^{n-1}$ tale che esistono le tracce interna ed esterna lungo ν (cfr. [10, 4.5.9 (17), (22)]; d'ora in poi scriveremo $u^+(x)$ (risp. $u^-(x)$) invece di $\text{tr}^+(x, u, \nu)$ (risp. $\text{tr}^-(x, u, \nu)$) quando non ci sia rischio di confusione; inoltre esiste q.o. in Ω il differenziale approssimato ∇u. Ricordiamo anche che un insieme $E \subset \Omega$ si dice di perimetro finito in Ω se

$$P(E, \Omega) = \int_\Omega |D\chi_E| < +\infty.$$

Il seguente risultato è analogo al Teorema in [7, §5], la cui dimostrazione è data in [1, §3].

Teorema 2. *Sia* $u : \Omega \to \mathbb{R}^k$ *misurabile, e sia* $\vartheta \in CN$; *se* $\int_\Omega \vartheta(Du) < +\infty$, *esiste un insieme boreliano* $C_u \subset \Omega$ *con* $|C_u| = 0$ *tale che per ogni* $B \in \mathcal{B}(\Omega)$:

$$\mathcal{H}_{n-1}(B) < +\infty \quad \textit{implica} \quad \int_{C_u \cap B} \vartheta(Du) = 0$$

e

$$\int_B \vartheta(Du) = \int_B \vartheta(\nabla u)\, dx + \int_{S_u \cap B} \vartheta(\nu \otimes (u^+ - u^-))\, d\mathcal{H}_{n-1} + \int_{C_u \cap B} \vartheta(Du).$$

Inoltre, per ogni $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ *vale l'eguaglianza:*

$$\int_B \vartheta(\nabla u)\, dx = \inf \left\{ \int_{B \setminus K} \vartheta(Du) : K \text{ compatto}, |K| = 0 \right\}.$$

Seguendo la terminologia introdotta in [7], chiameremo *parte cantoriana* di $\int_B \vartheta(Du)$ la misura $B \mapsto \int_{C_u \cap B} \vartheta(Du)$.

L'Osservazione 1 e il Teorema 2 ci consentono di dare la seguente

DEFINIZIONE 5. Sia $u:\Omega\to\mathbb{R}^k$ misurabile, con $\int_\Omega \vartheta(Du)<+\infty$ $\forall\vartheta\in CN$. Sia $\varphi:\Omega\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)\to[0,+\infty)$ una funzione boreliana tale che $\varphi(x,\lambda w)=\lambda\varphi(x,w)$ per ogni $\lambda>0$, $w\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)$, $x\in\Omega$. Poniamo per ogni $B\in\mathcal{B}(\Omega)$

$$\int_B \varphi(x,Du)=\int_B \varphi\left(x,\frac{Du}{\vartheta(Du)}\right)d\mu_{\vartheta,u},$$

(dove $Du/\vartheta(Du)$ denota la derivata di Radon-Nikodym di Du rispetto a $\mu_{\vartheta,u}$, e l'integrale non dipende dalla scelta di ϑ) ed anche:

$$\int_B \varphi(x,CDu)=\int_{C_u\cap B}\varphi(x,Du),$$

l'insieme C_u essendo quello identificato nel Teorema 2.

In [7] sono state introdotte le classi GBV delle funzioni a variazione limitata generalizzate. Per richiamarne la definizione, iniziamo col porre, data $g:\Omega\times\mathbb{R}^k\to$ $\to[0,+\infty)$ continua e con supporto compatto

$$F_g(v,\Omega)=\int_\Omega g(x,v)|\nabla v|\,dx$$

per ogni $v\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^k)$; poniamo inoltre, per ogni $u:\Omega\to\mathbb{R}^k$ misurabile

$$\overline{F}_g(u,\Omega)=\inf\{\liminf_{h\to\infty}F_g(v_h,\Omega),(v_h)\subset C^1(\Omega,\mathbb{R}^k),v_h\to u\ \text{q.o. in}\ \Omega\}.$$

DEFINIZIONE 6 (cfr. [7]). Sia $u:\Omega\to\mathbb{R}^k$ misurabile ed $A\in\mathcal{A}(\Omega\times\mathbb{R}^k)$; diciamo che u è una funzione a variazione limitata generalizzata in A ($u\in GBV(\Omega,A)$) se $\overline{F}_g(u,\Omega)<+\infty$ per ogni funzione continua non negativa g con supporto compatto contenuto in A.

Il seguente Teorema fornisce una caratterizzazione delle funzioni GBV, ed è uno dei principali risultati che presentiamo in questo lavoro.

TEOREMA 3. *Sia $u:\Omega\to\mathbb{R}^k$ misurabile, e $A\in\mathcal{A}(\Omega\times\mathbb{R}^k)$. Per ogni funzione lipschitziana $\varphi:\Omega\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$, denotiamo con $\nabla_y\varphi$ il gradiente rispetto alle ultime k variabili; allora $u\in GBV(\Omega,A)$ se e solo se per ogni $\varphi\in\mathrm{Lip}\,(\Omega\times\mathbb{R}^k)$, con* supp $(\nabla_y\varphi)$ *compatto contenuto in A, la funzione $\varphi\circ(Id,u)$ appartiene a $BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

OSSERVAZIONE 2. Come caso particolare del Teorema 3, otteniamo il seguente enunciato: $u\in GBV(\Omega,\Omega\times\mathbb{R})$ *se e solo se* $\forall a>0$ *risulta* $[(-a)\vee(u\wedge a)]\in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Altre classi funzionali strettamente legate alle funzioni BV sono presentate nelle seguenti definizioni.

DEFINIZIONE 7. Sia $u:\Omega\to\mathbb{R}^k$, e sia $E\subseteq\Omega$ tale che: (i) $\mathrm{diam}(E)<+\infty$; (ii) $P(E,\mathbb{R}^n)<+\infty$; (iii) $x\in E\Rightarrow \operatorname*{aplim}_{y\to x}\chi_E(y)=1$.

Poniamo $u \in BBV(E)$, o equivalentemente $E \in BBV(u)$ se, posto

$$u_E(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus E \end{cases}$$

risulta $u_E \in BV(\Omega, \mathbb{R}^k) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k)$.

Definizione 8. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}^k$ ed $E \subseteq \Omega$; poniamo $u \in LBV(E)$ se esiste una successione (E_h) di sottoinsiemi di Ω tale che:

$$\mathcal{H}_{n-1}\left(E \setminus \bigcup_{h=1}^{\infty} E_h\right) = 0, \qquad \sum_{h=1}^{\infty} P(E_h, \mathbb{R}^n) < +\infty, \qquad u \in BBV(E_h) \qquad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Se $u \in LBV(E)$ poniamo anche $E \in LBV(u)$.

Osservazione 3. Le funzioni LBV ereditano alcune proprietà delle funzioni BV; in particolare, se $u \in LBV(E)$ per $\mathcal{H}_{n-1}$-q.o. $x \in S_u \cap E$ esistono le tracce interna ed esterna $\mathrm{tr}^+(x, u, \nu)$, $\mathrm{tr}^-(x, u, \nu)$ lungo un'opportuna direzione $\nu(x)$ ed inoltre u è differenziabile in media q.o. in E.

Possiamo ora estendere la definizione 5.

Definizione 9. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}^k$ misurabile e sia $\varphi : \Omega \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \to [0, +\infty)$ una funzione boreliana tale che $\varphi(x, \lambda w) = \lambda \varphi(x, w)$ per ogni $\lambda > 0$, $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, $x \in \Omega$. Poniamo per ogni $B \in \mathcal{B}(\Omega)$

$$\int_B \varphi(x, CDu) = \sup\left\{ \int_{B \cap E} \varphi(x, CDu); E \in BBV(u) \right\}.$$

Siamo ora in grado di presentare alcune connessioni tra le classi appena introdotte e gli spazi classici BV, BV_{loc}. Valgono infatti i seguenti risultati.

Teorema 4. *Sia* $u : \Omega \to \mathbb{R}^k$, $u \in LBV(\Omega)$; *se*

$$|\Omega| + \int_\Omega |\nabla u|\, dx + \mathcal{H}_{n-1}(S_u) + \int_\Omega |CDu| < +\infty$$

allora $\arctan(u) \in BV(\Omega)$.

Teorema 5. *Sia* $u : \Omega \to \mathbb{R}^k$. *Allora* $u \in BV(\Omega)$ *se e solo se* $u \in LBV(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega (|u| + |\nabla u|)\, dx + \int_{S_u} |u^+ - u^-|\, d\mathcal{H}_{n-1} + \int_\Omega |CDu| < +\infty.$$

Un'altra generalizzazione delle funzioni a variazione limitata è presentata nella seguente

Definizione 10. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}^k$ misurabile ed $A \in \mathcal{A}(\Omega \times \mathbb{R}^k)$. Diciamo che $u \in GBV^*(\Omega, A)$ se per ogni funzione $\varphi : \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ lipschitziana con supporto compatto contenuto in A risulta che $\varphi \circ (Id, u)$ appartiene a $BV(\Omega)$.

In [7] ad ogni funzione misurabile $u: \Omega \to \mathbb{R}^k$ erano stati associati gli insiemi $GBV\,\mathrm{amb}\,(u) \subset \Omega \times \mathbb{R}^k$ e $GBV\,\mathrm{dom}\,(u) \subset \Omega$; nello stesso ordine d'idee, poniamo

$$GBV^*\,\mathrm{amb}\,(u) = \bigcup \{A \subseteq \Omega \times \mathbb{R}^k : u \in GBV^*(\Omega, A)\},$$

$$GBV^*\,\mathrm{dom}\,(u) = \{x \in \Omega : C\text{-}\operatorname*{aplim}_{y \to x}\,(y, u(y)) \subseteq GBV^*\,\mathrm{amb}\,(u)\},$$

essendo

$$C\text{-}\operatorname*{aplim}_{y \to x} u(y) = \bigcap \{K \subset \tilde{\mathbb{R}}^k;\ \operatorname*{aplim}_{y \to x} \varphi(u(y)) = 0 \ \text{per ogni}\ \varphi \in C(\tilde{\mathbb{R}}^k)$$
$$\text{con supporto compatto contenuto in}\ \tilde{\mathbb{R}}^k \setminus K\}.$$

Osserviamo che

$$C\text{-}\operatorname*{aplim}_{y \to x} u(y) = \{\operatorname*{aplim}_{y \to x} u(y)\}$$

se quest'ultimo esiste e che se esistono le tracce interna ed esterna in un punto $x \in S_u$ risulta

$$C\text{-}\operatorname*{aplim}_{y \to x} u(y) = \{u^+(x), u^-(x)\}.$$

Notiamo anche che, a differenza del caso GBV, è sempre vero che $u \in GBV^*(\Omega, GBV^*\,\mathrm{amb}\,(u))$. Inoltre, per ogni compatto $K \subset \Omega$ si ha

$$K \cap GBV^*\,\mathrm{dom}\,(u) \in LBV(u).$$

Vale anche il seguente risultato.

Teorema 6. *Se* $u \in GBV^*(\Omega, \Omega \times \mathbb{R}^k)$ *e*

$$\int_\Omega |\nabla u|\, dx + \int_\Omega |CDu| + \mathcal{H}_{n-1}(S_u) < +\infty$$

allora $u \in LBV(\Omega)$.

Le classi GBV^* in generale sono chiaramente più ampie delle classi GBV, ed in particolare $GBV(\Omega, \Omega \times \mathbb{R}) \neq GBV^*(\Omega, \Omega \times \mathbb{R})$; si ha d'altra parte l'eguaglianza $GBV(\Omega, \Omega \times \mathbb{R}^k) = GBV^*(\Omega, \Omega \times \mathbb{R}^k)$, per $k \geqslant 2$, come conseguenza del Teorema 3 e del fatto che il complementare di un compatto in $\mathbb{R}^k$ ha una sola componente connessa illimitata per $k \geqslant 2$; nel caso $k = 1$ si ha invece il seguente

Teorema 7. *Se* $u \in GBV^*(\Omega, \Omega \times \mathbb{R})$ *e*

$$\int_\Omega |\nabla u|\, dx + \int_\Omega |CDu| + \mathcal{H}_{n-1}(S_u) < +\infty,$$

allora $u \in GBV(\Omega, \Omega \times \mathbb{R})$.

Lavoro parzialmente finanziato da un progetto nazionale di ricerca.

Bibliografia

[1] L. Ambrosio, *A Compactness Theorem for a Special Class of Functions of Bounded Variation.* Boll. Un. Mat. Ital., 3-B, 1989, 857-881.

[2] L. Ambrosio, *Existence Theory for a New Class of Variational Problems.* Arch. Rational Mech. Anal., in corso di stampa.

[3] L. Ambrosio - S. Mortola - V. M. Tortorelli, *Functionals with Linear Growth Defined on Vector Valued BV Functions.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. non lin., in corso di stampa.

[4] M. Carriero - A. Leaci, *Existence Theorem for a Dirichlet Problem with Free Discontinuity Set.* Non linear Analysis TMA, vol. 15, 1990.

[5] G. Congedo - I. Tamanini, *On the existence of solutions to a problem in multidimensional segmentation*, in corso di stampa.

[6] E. De Giorgi, *Free Discontinuity Problems in Calculus of Variations.* Proc. Int. *Meeting in honour of J. L. Lions* (6-10/6/1988). North Holland Publ., in corso di stampa.

[7] E. De Giorgi - L. Ambrosio, *Un nuovo tipo di funzionale del calcolo delle variazioni.* Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 82, fasc. 2, 1988, 199-210.

[8] E. De Giorgi - M. Carriero - A. Leaci, *Existence Theorem for a Minimum Problem with Free Discontinuity Set.* Arch. Rational Mech. Anal., 108, 1989, 195-218.

[9] E. De Giorgi - G. Congedo - I. Tamanini, *Problemi di regolarità per un nuovo tipo di funzionale del Calcolo delle Variazioni.* Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 82, fasc. 4, 1988.

[10] H. Federer, *Geometric Measure Theory.* Springer, 1969.

[11] E. Giusti, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation.* Birkhäuser, 1984.

[12] D. Pallara, *Some new results on functions of bounded variations.* Preprint.

[13] A. I. Vol'pert, *The Spaces BV and Quasilinear Equations.* Math USSR Sbornik, 2, 1967, 225-267.

[14] A. I. Vol'pert - S. I. Hudjaev, *Analysis in Classes of Discontinuous Functions and Equations of Mathematical Physics.* Martinus Nijhoff Publishers, Kluwer Acad. Publ. Group, 1985.

[15] W. P. Ziemer, *Weakly Differentiable Functions.* Springer, 1989.

Istituto di Matematica ed Informatica
Facoltà di Ingegneria
Università degli Studi della Basilicata
Via N. Sauro, 85 - 85100 Potenza