Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Cristiana Bondioli

Iterati di operatori differenziali singolari e funzioni ultradifferenziabili. II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **1** (1990), n.4, p. 301–304.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1990_9_1_4_301_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1990.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 1:301-304 (1990)

Analisi matematica. — *Iterati di operatori differenziali singolari e funzioni ultradifferenziabili. II.* Nota di CRISTIANA BONDIOLI, presentata (*) dal Corrisp. E. MAGENES.

ABSTRACT. — *Iterates of singular differential operators and ultradifferentiable functions. II.* This *Note* is the continuation of a previous paper with the same title. Here we prove that the map ${}^t\mathcal{X}$ associated with the transmutation operator of the singular operator P is an algebraic and topological isomorphism between the spaces $\mathcal{G}^s_*(P)$ and $\mathcal{G}^s_*$.

KEY WORDS: Singular differential operators; Ultradifferentiable functions; Transmutation operators.

RIASSUNTO. — In questa *Nota*, che è il seguito della *Nota I* dallo stesso titolo, si dimostra che l'applicazione ${}^t\mathcal{X}$, legata all'operatore di trasmutazione associato all'operatore singolare P, è un isomorfismo algebrico e topologico tra gli spazi $\mathcal{G}^s_*(P)$ e $\mathcal{G}^s_*$.

INTRODUZIONE

La presente *Nota* fa seguito alla *Nota I* dallo stesso titolo, alla quale si rinvia per definizioni, notazioni, premesse e bibliografia (v. pp. 293-299).

Dopo avere definito per lo spazio $\mathcal{G}^s_*(P)$ una topologia di limite induttivo di una successione regolare di spazi di Banach, si considera l'applicazione ${}^t\mathcal{X}$ ristretta allo spazio $\mathcal{G}^s_*(P)$. Questa applicazione, strettamente collegata all'operatore di trasmutazione associato a P (cfr. Lions [7]), è stata introdotta, come applicazione da $\mathcal{D}_*$ in sé, da K. Trimèche in [13], dove viene dimostrato che, a meno di una costante, ${}^t\mathcal{X}$ è la composizione della trasformazione di Fourier generalizzata associata a P con l'inversa dell'usuale trasformazione di Fourier. Senza utilizzare questo teorema, dunque senza fare riferimento al risultato finale della *Nota I*, si prova qui che ${}^t\mathcal{X}$ trasforma $\mathcal{G}^s_*(P)$ in $\mathcal{G}^s_*$ ed è un isomorfismo algebrico e topologico tra questi due spazi.

3. – Per i seguenti richiami si fa riferimento dapprima a [13] e successivamente a [8].

Sia $\mathcal{E}_*$ dotato della topologia della convergenza uniforme su ogni compatto delle funzioni e di ciascuna delle loro derivate.

Per ogni operatore

$$P = (A(x))^{-1} D(A(x)\, D) - q(x) = D^2 + ((2\alpha + 1)\, x^{-1} + C'(x)(C(x))^{-1})\, D - q(x) \tag{3.1}$$

con A, C, q, α come in (1.1), esiste uno e un solo operatore di trasmutazione $\mathcal{X}$ di $\mathcal{E}_*$ in sé tale che

$$P\mathcal{X}\varphi = \mathcal{X}D^2\varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{E}_* \tag{3.2}$$

(cfr. [7, Ch. XII, Th. 1.1]).

(*) Nella seduta del 14 giugno 1990.

Sia $\mathcal{X}' : \mathcal{E}'_* \to \mathcal{E}'_*$ l'operatore trasposto di $\mathcal{X}$. Indicata con T_f la distribuzione associata alla funzione f, si ha che, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_*$, la distribuzione $\mathcal{X}' T_{A\varphi}$ (A come in (3.1)) è definita da una funzione di $\mathcal{D}_*$, denotata con ${}^t\mathcal{X}\varphi$ (cfr. [13, 6, Th. 6.2, Th. 6.4]). In [13] K. Trimèche studia in dettaglio ${}^t\mathcal{X}$ come applicazione da $\mathcal{D}_*$ in sé. Nel seguito si ricorderanno di volta in volta le proprietà di ${}^t\mathcal{X}$ utilizzate nelle dimostrazioni.

Lo spazio $\mathcal{G}^s$ delle funzioni di Gevrey di ordine s viene usualmente dotato di una topologia di limite induttivo. Precisamente, per K compatto di $\mathbb{R}$, per $\Lambda > 0$, sia

$$\mathcal{G}^s_{K,\Lambda} = \{\varphi \in \mathcal{G}^s \mid \operatorname{supp}\varphi \subseteq K \text{ ed } \exists \gamma > 0 \text{ tale che } \forall k \in \mathbb{N} \sup_{x\in K} |D^k\varphi(x)| \leq \gamma\Lambda^k k!^s\}.$$

Lo spazio $\mathcal{G}^s_{K,\Lambda}$ con la norma

$$\|\varphi\|_{\mathcal{G}^s_{K,\Lambda}} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{x\in K} \frac{|D^k\varphi(x)|}{\Lambda^k k!^s}$$

risulta uno spazio di Banach. Si dà allo spazio $\mathcal{G}^s$ la topologia di limite induttivo degli spazi $\mathcal{G}^s_{K,\Lambda}$ al tendere, in modo monotono, di K verso $\mathbb{R}$ e di Λ verso $+\infty$ (cfr. [8, Ch. 7, 1.2]).

In modo analogo procedo per lo spazio $\mathcal{G}^s_*(P)$. Per R, $L > 0$ sia

$$\mathcal{G}^s_{*,R,L}(P) = \{f \in \mathcal{G}^s_*(P) \mid \operatorname{supp} f \subseteq [-R,R] \text{ ed } \exists c > 0 \text{ tale che } \forall k \in \mathbb{N} \sup_{x\in[-R,R]} |P^k f(x)| \leq cL^{2k}(2k)!^s\}$$

con la norma

$$\|f\|_{\mathcal{G}^s_{*,R,L}(P)} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{x\in[-R,R]} \frac{|P^k f(x)|}{L^{2k}(2k)!^s}. \tag{3.3}$$

È allora naturale dotare $\mathcal{G}^s_*(P)$ della topologia di limite induttivo degli spazi $\mathcal{G}^s_{*,R,L}(P)$ al tendere, in modo monotono, di R e L verso $+\infty$.

4. – Mi propongo ora di dimostrare che l'applicazione ${}^t\mathcal{X}$ è un isomorfismo algebrico e topologico tra $\mathcal{G}^s_*(P)$ e $\mathcal{G}^s_*$.

Sia $\mathcal{G}^s_{*,R,L} = \mathcal{G}^s_{[-R,R],L} \cap \mathcal{E}_*$.

Lemma 4.1. *Sia $f \in \mathcal{G}^s_{*,R,L}(P)$; allora, $\forall \varepsilon > 0$, ${}^t\mathcal{X}f \in \mathcal{G}^s_{*,R,(1+\varepsilon)^s L}$ e l'applicazione ${}^t\mathcal{X}$ è continua tra questi due spazi.*

Dimostrazione. Poiché: $\forall k \in \mathbb{N}$, $D^{2k} \circ {}^t\mathcal{X} = {}^t\mathcal{X} \circ P^k$ e $\forall R > 0$ $\exists M_1 > 0$ tale che $\forall \varphi \in \mathcal{D}_*$ con supp $\varphi \subseteq [-R,R]$ $\sup_{x\in[-R,R]} |{}^t\mathcal{X}\varphi(x)| \leq M_1 \sup_{x\in[-R,R]} |\varphi(x)|$ (cfr. [13, Th. 6.4]), $\forall k \in \mathbb{N}$ si ottiene:

$$\sup_{x\in[-R,R]} |D^{2k}\,{}^t\mathcal{X}f(x)| \leq M_1 \sup_{x\in[-R,R]} |P^k f(x)| \leq M_1 \|f\|_{\mathcal{G}^s_{*,R,L}(P)} L^{2k}(2k)!^s. \tag{4.1}$$

Per il teorema di Lagrange, esiste $x_0 \in]0, x[$ tale che $D^{2k+1}\,{}^t\mathcal{X}f(x) = xD^{2k+2}\,{}^t\mathcal{X}f(x_0)$, da cui, usando (4.1), si ricava

$$\sup_{x\in[-R,R]} |D^{2k+1}\,{}^t\mathcal{X}f(x)| \leq RM_1 \|f\|_{\mathcal{G}^s_{*,R,L}(P)} L^{2k+2}(2k+2)!^s.$$

Poiché, $\forall\varepsilon>0$ $\exists c_\varepsilon>0$ tale che $\forall k\in\mathbb{N}$ $2k+2\leq c_\varepsilon(1+\varepsilon)^{2k+1}$, si ottiene

$$\sup_{x\in[-R,R]} |D^{2k+1}\,{}^t\mathcal{X}f(x)| \leq c_\varepsilon^s RM_1 L\|f\|_{\mathcal{G}^s_{*,R,L}(P)}((1+\varepsilon)^s L)^{2k+1}(2k+1)!^s. \tag{4.2}$$

Dunque, da (4.1) e (4.2) segue che $\forall\varepsilon>0$ $\exists M_\varepsilon>0$ tale che $\forall k\in\mathbb{N}$

$$\sup_{x\in[-R,R]} |D^k\,{}^t\mathcal{X}f(x)| \leq M_\varepsilon \|f\|_{\mathcal{G}^s_{*,R,L}(P)}((1+\varepsilon)^s L)^k k!^s,$$

cioè ${}^t\mathcal{X}f\in\mathcal{G}^s_{*,R,(1+\varepsilon)^sL}$ e

$$\|{}^t\mathcal{X}f\|_{\mathcal{G}^s_{*,R,(1+\varepsilon)^sL}} \leq M_\varepsilon \|f\|_{\mathcal{G}^s_{*,R,L}(P)}. \tag{4.3}$$

Essendo ${}^t\mathcal{X}$ lineare, da (4.3) segue la sua continuità.

Poiché, per ogni $R>0$, ${}^t\mathcal{X}$ è un automorfismo algebrico e topologico dello spazio costituito dalle funzioni di $\mathcal{D}_*$ con supporto in $[-R,R]$ (cfr. [13, Th. 6.4]), in modo simile si verifica il seguente

LEMMA 4.2. *Sia $\varphi\in\mathcal{G}^s_{*,R,\Lambda}$; allora, $\forall\varepsilon>0$, $({}^t\mathcal{X})^{-1}\varphi\in\mathcal{G}^s_{*,R,(1+\varepsilon)^s\Lambda}(P)$ e l'applicazione $({}^t\mathcal{X})^{-1}$ è continua tra questi due spazi.*

DIMOSTRAZIONE. Dalla continuità di $({}^t\mathcal{X})^{-1}$ segue che esistono $B>0$ e $\bar{k}\in\mathbb{N}$ tali che $\forall\varphi\in\mathcal{D}_*$ con supp $\varphi\subseteq[-R,R]$ valga:

$$\sup_{x\in[-R,R]} |({}^t\mathcal{X})^{-1}\varphi(x)| \leq B \sup_{0\leq n\leq\bar{k}} \sup_{x\in[-R,R]} |D^n\varphi(x)|.$$

Poiché, $\forall k\in\mathbb{N}$, $({}^t\mathcal{X})^{-1}\circ D^{2k}=P^k\circ({}^t\mathcal{X})^{-1}$, per $\varphi\in\mathcal{G}^s_{*,R,\Lambda}$ si ottiene:

$$\sup_{x\in[-R,R]} |P^k({}^t\mathcal{X})^{-1}\varphi(x)| \leq B \sup_{0\leq n\leq\bar{k}} \sup_{x\in[-R,R]} |D^{2k+n}\varphi(x)| \leq$$

$$\leq B'\|\varphi\|_{\mathcal{G}^s_{*,R,\Lambda}}\Lambda^{2k}(2k)!^s(2k+\bar{k})^{s\bar{k}}.$$

Poiché $\forall\varepsilon>0$ $\exists c_\varepsilon$ tale che $(2k+\bar{k})^{\bar{k}}\leq c_\varepsilon(1+\varepsilon)^{2k}$, procedendo come nella dimostrazione del Lemma 4.1 si arriva alla conclusione.

Dai Lemmi 4.1 e 4.2 si deduce il seguente

TEOREMA 4.1. *L'applicazione ${}^t\mathcal{X}:\mathcal{G}^s_*(P)\to\mathcal{G}^s_*$ è un isomorfismo algebrico e topologico.*

DIMOSTRAZIONE. ${}^t\mathcal{X}$: $\mathcal{G}^s_*(P)\to\mathcal{G}^s_*$ è lineare e iniettivo, perché tale da $\mathcal{D}_*$ in sé; per il Lemma 4.2 risulta pure suriettivo. ${}^t\mathcal{X}$ è pure continuo: $\mathcal{G}^s_*(P)=\operatorname*{ind\,lim}_{R,L\to+\infty}\mathcal{G}^s_{*,R,L}(P)$ e dunque la continuità di ${}^t\mathcal{X}$ da $\mathcal{G}^s_{*,R,L}(P)$ in $\mathcal{G}^s_*$, assicurata dal Lemma 4.1, implica la continuità di ${}^t\mathcal{X}$ da $\mathcal{G}^s_*(P)$ in $\mathcal{G}^s_*$.

Procedendo allo stesso modo per $({}^t\mathcal{X})^{-1}$ si arriva alla conclusione.

Osservazione 4.1. Poiché, $\forall \varphi \in \mathcal{D}_*$, vale $2\mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}_0\, {}^t\mathcal{X}\varphi$ (cfr. [14, Ch. 4, IV. 3]), si ha che ${}^t\mathcal{X}$ differisce solo per una costante dall'isomorfismo tra $\mathcal{G}^s_*(P)$ e $\mathcal{G}^s_*$ considerato nella *Nota I.* Si osservi inoltre che, nel caso di spazi simmetrici di rango 1, ${}^t\mathcal{X}$ coincide con la trasformazione di Radon.

Dai Lemmi 4.1 e 4.2 segue anche il seguente

Corollario 4.1. *Per ogni R, $L>0$, lo spazio $\mathcal{G}^s_{*,R,L}(P)$ con la norma* (3.3) *è uno spazio di Banach; se $R_1<R_2$ e $L_1<L_2$, l'immersione di $\mathcal{G}^s_{*,R_1,L_1}(P)$ in $\mathcal{G}^s_{*,R_2,L_2}(P)$ risulta compatta.*

Dimostrazione. Sia (f_n) una successione di Cauchy in $\mathcal{G}^s_{*,R,L}(P)$; per il Lemma 4.1, $({}^t\mathcal{X}f_n)$ è di Cauchy, ad esempio, in $\mathcal{G}^s_{*,R,2^sL}$; dunque esiste $g \in \mathcal{G}^s_{*,R,2^sL}$ tale che ${}^t\mathcal{X}f_n \to g$. Sia $f=({}^t\mathcal{X})^{-1}g$; si tratta di dimostrare che $f\in \mathcal{G}^s_{*,R,L}(P)$ e che $f_n\to f$ in $\mathcal{G}^s_{*,R,L}(P)$.

Poiché ${}^t\mathcal{X}f_n \to g$ in $\mathcal{G}^s_{*,R,2^sL}$, ${}^t\mathcal{X}f_n\to g$ in $\mathcal{D}_*$ e allora, $\forall x\in[-R,R]$ e $\forall k\in\mathbb{N}$, $P^k f_n(x)\to P^k f(x)$. Ne segue che $\exists c>0$ tale che, $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[-R,R]$, $|P^k f(x)|\le cL^{2k}(2k)!^s$, cioè che $f\in\mathcal{G}^s_{*,R,L}(P)$; facilmente si verifica poi che $f_n\to f$ in $\mathcal{G}^s_{*,R,L}(P)$.

Siano ora $R_1<R_2$ e $L_1<L_2$; dimostro che l'immersione di $\mathcal{G}^s_{*,R_1,L_1}(P)$ in $\mathcal{G}^s_{*,R_2,L_2}(P)$ è compatta. Infatti, sia $\varepsilon>0$ tale che $(1+\varepsilon)^{3s}L_1<L_2$ e sia $\mathcal{L}\subseteq\mathcal{G}^s_{*,R_1,L_1}(P)$ limitato. Per il Lemma 4.1, ${}^t\mathcal{X}(\mathcal{L})$ è limitato in $\mathcal{G}^s_{*,R_1,(1+\varepsilon)^sL_1}$, dunque $\overline{{}^t\mathcal{X}(\mathcal{L})}$ è compatto in $\mathcal{G}^s_{*,R_2,(1+\varepsilon)^{2s}L_1}$, (cfr. [8, Ch. 7, Prop. 1.1]). Per il Lemma 4.2, $({}^t\mathcal{X})^{-1}(\overline{{}^t\mathcal{X}(\mathcal{L})})$ è compatto in $\mathcal{G}^s_{*,R_2,(1+\varepsilon)^{3s}L_1}(P)$ e pertanto $\overline{\mathcal{L}}$ è compatto in $\mathcal{G}^s_{*,R_2,L_2}(P)$.

Osservazione 4.2. La continuità di $({}^t\mathcal{X})^{-1}$: $\mathcal{G}^s_*\to\mathcal{G}^s_*(P)$ si ottiene anche utilizzando il teorema del grafico boreliano di L. Schwartz (cfr. [12, Appendix, Th. A.1]), perché gli spazi in questione sono entrambi ultrabornologici e di Souslin.

Lavoro eseguito con contributo del M.U.R.S.T.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Pavia
Strada Nuova, 65 - 27100 Pavia