

RENDICONTI LINCEI MATEMATICA E APPLICAZIONI

ELIO SACCO

Modellazione e calcolo di strutture in materiale non resistente a trazione

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. 1 (1990), n.3, p. 235–258.

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1990_9_1_3_235_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1990.

Meccanica. — *Modellazione e calcolo di strutture in materiale non resistente a trazione.* Nota di ELIO SACCO, presentata(*) dal Socio E. GIANGRECO.

ABSTRACT. — *Modeling and analysis of structures made of no-tension material.* This paper deals with the problem of the determination of the stress distribution for solids made of no-tension material. The explicit nonlinear constitutive relation is given for the uni-, bi-, and three-dimensional cases. The elastostatic problem is then posed in strong and weak form, and variational conditions to impose on the load system in order to ensure the existence of solution are discussed. The finite-element formulation is developed and a numerical technique is proposed to solve the nonlinear problem. Numerical results are given for some simple two-dimensional structural schemes.

KEY WORDS: No-tension materials; Structural analysis; Computational mechanics.

RIASSUNTO. — Si affronta il problema del calcolo dello stato tensionale in strutture costituite da materiale non resistente a trazione ed elastico lineare a compressione. Si formula la legge costitutiva e se ne fornisce l'espressione esplicita nel caso di stati tensionali monoassiali, biassiali e triassiali. Si imposta quindi il problema dell'equilibrio elastico e si discute sulla condizione da imporre ai carichi affinché venga assicurata l'esistenza della soluzione. Si sviluppa la formulazione agli elementi finiti ed è analizzata e descritta una tecnica numerica di tipo iterativo adatta a risolvere il problema elastostatico, basata sul metodo di iterazione diretta. Si presentano infine alcuni esempi numerici relativi al calcolo di strutture bidimensionali.

1. INTRODUZIONE

Il calcolo dello stato tensionale e più in generale il problema della stabilità delle opere in materiale murario ha suscitato grande interesse nel mondo scientifico sin dai tempi più antichi. Un'accurata ricerca storica [1] mette in evidenza che i maggiori sviluppi scientifici, con particolare riferimento alle strutture voltate in muratura, si sono avuti nel XVIII secolo.

Sottoposto a prove di carico monoassiali, il materiale in muratura mostra un comportamento di tipo fragile con valori della resistenza a compressione molto elevati rispetto a quelli di trazione. L'ipotesi di azzerare il valore della resistenza a trazione, accettata da quasi tutti i ricercatori in questo campo, consente di formulare una teoria relativamente semplice, per la quale è possibile applicare i concetti dell'analisi limite [2, 3].

Il modello di materiale elastico non resistente a trazione trova poi un vasto campo di applicazione anche nell'ambito della meccanica delle rocce [4]. Infatti nel caso di fenomeni che investono vaste estensioni di sottosuolo roccioso, per le quali si può ipotizzare che le disomogeneità e stratificazioni locali abbiano influenza trascurabile sul comportamento globale, il modello in esame può risultare idoneo a cogliere la distribuzione delle sollecitazioni. Tale problematica si presenta ad esempio nello studio degli effetti indotti nel sottosuolo dalle cavità in pressione [5].

(*) Nella seduta del 10 marzo 1990.

Per il modello di materiale elastico non reagente a trazione sono stati approfonditi principalmente gli aspetti matematici di base relativi alla modellazione, all'esistenza di soluzioni ed alla formulazione di principi variazionali che governano il problema elastostatico non lineare [6-17].

In questo lavoro si riportano alcuni risultati a partire da studi svolti dal prof. Giovanni Romano e da me stesso, in ricerche precedenti. Sono rivisitati i fondamenti teorici del modello, che riguardano soprattutto il problema della definizione della legge costitutiva, semplice nel caso di stato tensionale monoassiale, più complessa invece nel caso di stati tensionali pluriassiali. Si fornisce quindi la formulazione esplicita del legame deformazione-tensione nei casi di stati triassiale, biassiale e monoassiale.

Determinazioni per via analitica dello stato tensionale sono possibili per strutture geometricamente semplici e soggette a particolari condizioni di carico [18, 19]. Tali soluzioni in forma chiusa sono apprezzabili soprattutto come *benchmark* per convalidare le capacità di strumenti più versatili. Nasce allora l'esigenza di mettere a punto una procedura di calcolo capace di fornire soluzioni, sia pure approssimate, del problema dell'equilibrio elastico per classi di problemi strutturali sufficientemente ampie. A tale scopo si sviluppa la formulazione agli elementi finiti, e si propone un efficace metodo di calcolo numerico.

Alcune soluzioni esatte vengono quindi confrontate con quelle approssimate ottenute per via numerica allo scopo di saggiare l'affidabilità dello strumento messo a punto. Sono quindi presentati i risultati numerici relativi ad alcuni semplici schemi di interesse tecnico.

L'analisi è condotta nel contesto della teoria linearizzata delle strutture (piccoli spostamenti e deformazioni).

2. IL LEGAME COSTITUTIVO

Si considera un materiale avente comportamento fragile a trazione con tensione di rottura nulla, ed elastico lineare a compressione. L'insieme degli stati tensionali ammissibili in ogni punto x del solido \mathcal{B} è individuato dal cono chiuso e convesso definito da:

$$(2.1) \quad \mathcal{X} = \{ \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}(x) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \leq 0, \forall x \in \mathcal{B}, \forall \|\mathbf{n}\| = 1 \},$$

essendo $\boldsymbol{\sigma}(x)$ il tensore delle tensioni nel punto x .

Nel seguito, per semplificare le notazioni, si ometterà la dipendenza dal punto x .

La condizione di ammissibilità dello stato tensionale $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{X}$ equivale alla semidefinita negatività del tensore delle tensioni. Sulla base di un risultato classico dell'algebra lineare, il tensore $\boldsymbol{\sigma}$ è semidefinito negativo se i suoi minori principali sono semidefiniti in segno nel seguente modo:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \sigma_{11} \leq 0, & \sigma_{22} \leq 0, & \sigma_{33} \leq 0, & \sigma_{22} \sigma_{33} - \sigma_{23}^2 \geq 0, \\ \sigma_{11} \sigma_{33} - \sigma_{13}^2 \geq 0, & \sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2 \geq 0, & \det \boldsymbol{\sigma} \leq 0. \end{cases}$$

La deformazione si suppone ottenibile come la somma di una parte elastica ε_e e di una parte anelastica di fessurazione δ :

$$(2.3) \quad \varepsilon = \varepsilon_e + \delta.$$

Per la deformazione di fessurazione δ si assume valida la legge di normalità al cono \mathcal{K} e quindi, in corrispondenza di uno stato tensionale ammissibile $\sigma \in \mathcal{K}$, deve verificarsi:

$$(2.4a) \quad (\tau - \sigma) \cdot \delta \leq 0, \quad \sigma \in \mathcal{K}, \quad \forall \tau \in \mathcal{K},$$

o equivalentemente:

$$(2.4b) \quad (\eta - \delta) \cdot \sigma \leq 0, \quad \delta \in \mathcal{K}^-, \quad \forall \eta \in \mathcal{K}^-,$$

ovvero:

$$(2.4c) \quad \sigma \cdot \delta = 0, \quad \delta \in \mathcal{K}^-, \quad \sigma \in \mathcal{K},$$

dove \mathcal{K}^- è il cono polare negativo di \mathcal{K} , definito dalla proprietà:

$$(2.5) \quad \mathcal{K}^- = \{ \eta : \eta \cdot \tau \leq 0, \quad \forall \tau \in \mathcal{K} \}.$$

In fig. 1 è raffigurato schematicamente il comportamento del modello descritto.

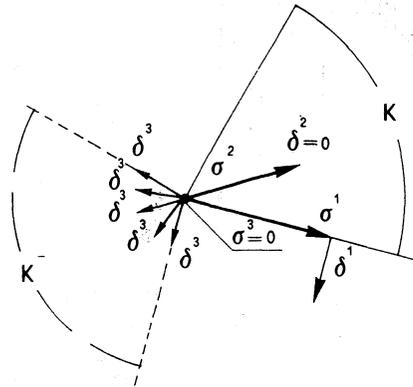


Fig. 1. - Legge di normalità.

Se si indica con S il tensore del quarto ordine di rigidezza elastica, definito positivo e che rispetta le simmetrie minori ($S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk}$) e la maggiore ($S_{ijkl} = S_{klij}$), e con $A = S^{-1}$ quello di deformabilità, il legame tra lo stato tensionale e la deformazione elastica è fornito dalla relazione:

$$(2.6) \quad \varepsilon_e = A\sigma,$$

e dunque per la (2.3):

$$(2.7) \quad \sigma = S(\varepsilon - \delta),$$

che sostituita nella formulazione (2.4b) della legge di normalità fornisce:

$$(2.8) \quad S(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\delta}) \cdot (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\delta}) \leq 0, \quad \boldsymbol{\delta} \in \mathcal{X}^-, \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{X}^-.$$

Il tensore di fessurazione $\boldsymbol{\delta}$ si ottiene dunque in funzione di $\boldsymbol{\varepsilon}$ come punto di minimo del funzionale ψ :

$$(2.9) \quad \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\delta}) = \min \{ \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}) / \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{X}^- \},$$

definito come:

$$(2.10) \quad \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}) = S(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\eta}) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\eta}) / 2 = \|\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\eta}\|_S^2 / 2,$$

avendo indicato con $\|\cdot\|_S$ la norma in energia di S . Le (2.9) (2.10) esprimono in altri termini:

$$(2.11) \quad \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\varepsilon}),$$

ovvero la fessurazione si ricava come proiezione ortogonale, in energia di S , di $\boldsymbol{\varepsilon}$ su \mathcal{X}^- , essendo $\boldsymbol{\pi}$ l'operatore non lineare di proiezione. Il funzionale definito dal problema di minimo (2.9), in termini di deformazione totale, assume la forma:

$$(2.12) \quad \xi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \|\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\delta}\|_S^2 / 2 = \|\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\varepsilon})\|_S^2 / 2,$$

e rappresenta la densità di energia di deformazione elastica del materiale, che si dimostra [7] essere convesso e differenziabile con:

$$(2.13) \quad \boldsymbol{\sigma} = \text{grad } \xi(\boldsymbol{\varepsilon}) = S(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\varepsilon})) = \boldsymbol{P}_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}) \boldsymbol{\varepsilon}.$$

L'operatore non lineare $\boldsymbol{P}_\varepsilon$ fornisce il tensore di rigidezza elastico secante del quarto ordine $\boldsymbol{P}_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon})$ che, come S , rispetta le simmetrie minori e quella maggiore.

Facendo esplicito riferimento ad un materiale isotropo, il tensore di rigidezza elastica è espresso da:

$$(2.14) \quad S = 2\mu J + \lambda I \otimes I,$$

essendo J ed I rispettivamente il tensore unitario del quarto e del secondo ordine, μ e λ le costanti di Lamé che in funzioni delle costanti tecniche E (modulo di Young) e ν (rapporto di Poisson) valgono $2\mu = E/(1 + \nu)$, $\lambda = [E/(1 + \nu)][\nu/(1 - 2\nu)]$, ed avendo indicato con \otimes il simbolo di prodotto tensoriale. In definitiva il tensore delle tensioni, tenendo conto delle (2.7), (2.14), si ottiene dalla formula:

$$(2.15) \quad \boldsymbol{\sigma} = 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\delta}) + \lambda I[\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\delta})],$$

dove $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\delta}) = I \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\delta})$ rappresenta la traccia, ovvero l'invariante lineare, del tensore di deformazione elastica.

3. IL PROIETTORE DI FESSURAZIONE

L'esplicitazione di $\boldsymbol{\pi}$ (2.11) risulta fondamentale per la definizione del legame costitutivo. Tale problematica è stata affrontata in [8] per il caso monodimensionale e bidimensionale e successivamente in [16] e [20] per il caso tridimensionale.

Nell'ipotesi di materiale isotropo, ovvero quando il legame costitutivo è espresso dalla (2.14) o (2.15), è possibile dimostrare la coassialità del tensore di deformazione totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ con quello di pura fessurazione $\boldsymbol{\delta}$ [21]. In questo caso la condizione di minimo (2.9) può essere riscritta come:

$$(3.1) \quad \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\delta}) = \min \{ \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}) / \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{X}^- \} = \\ = \min \{ \mu [(\varepsilon_1 - \eta_1)^2 + (\varepsilon_2 - \eta_2)^2 + (\varepsilon_3 - \eta_3)^2 + \alpha(\varepsilon_1 - \eta_1 + \varepsilon_2 - \eta_2 + \varepsilon_3 - \eta_3)^2] / \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{X}^- \},$$

dove ε_i ed η_i ($i = 1, 2, 3$) rappresentano gli autovalori di $\boldsymbol{\varepsilon}$ ed $\boldsymbol{\eta}$, ovvero le deformazioni totali e di fessurazione principali, ed $\alpha = \lambda/2\mu$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché $\boldsymbol{\delta}$ sia un punto di minimo del funzionale convesso $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta})$ rispetto ad $\boldsymbol{\eta}$, è che il suo gradiente $\mathbf{g} = \text{grad}_{\boldsymbol{\delta}} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\delta})$ sia diretto secondo la normale entrante a \mathcal{X}^- (vedi fig. 2), deve cioè verificarsi:

$$(3.2) \quad \mathbf{g} \cdot (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\delta}) \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{X}^-$$

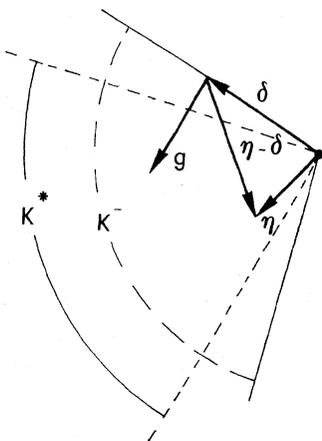


Fig. 2. - Schematica interpretazione geometrica della condizione (3.2) (3.3).

o equivalentemente:

$$(3.3) \quad \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\delta} = 0, \quad \mathbf{g} \in \mathcal{X}^*,$$

essendo \mathcal{X}^* il cono polare positivo di \mathcal{X}^- , definito come: $\mathcal{X}^* = \{ \mathbf{g} : \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\eta} \geq 0 \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{X}^- \}$, in altri termini la condizione $\mathbf{g} \in \mathcal{X}^*$ equivale ad imporre \mathbf{g} semidefinito positivo. Riferendosi al solito alle direzioni principali, la (3.3) in esplicito diventa:

$$(3.4) \quad g_1 \delta_1 + g_2 \delta_2 + g_3 \delta_3 = 0 \quad \text{con } g_1 \geq 0, g_2 \geq 0, g_3 \geq 0,$$

dove g_1, g_2 e g_3 sono gli autovalori di \mathbf{g} e si ricavano come:

$$(3.5a) \quad g_1 = \partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\delta}) / \partial \delta_1 = -2\mu [(1 + \alpha)(\varepsilon_1 - \delta_1) + \alpha(\varepsilon_2 - \delta_2 + \varepsilon_3 - \delta_3)],$$

$$(3.5b) \quad g_2 = \partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\delta}) / \partial \delta_2 = -2\mu [(1 + \alpha)(\varepsilon_2 - \delta_2) + \alpha(\varepsilon_1 - \delta_1 + \varepsilon_3 - \delta_3)],$$

$$(3.5c) \quad g_3 = \partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\delta}) / \partial \delta_3 = -2\mu [(1 + \alpha)(\varepsilon_3 - \delta_3) + \alpha(\varepsilon_1 - \delta_1 + \varepsilon_2 - \delta_2)].$$

Nel seguito si suppone di ordinare gli autovalori di δ in modo che $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \delta_3$. Nel caso tridimensionale sono allora possibili i seguenti quattro casi:

1) $0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \delta_3$

$$\delta_1 = \varepsilon_1, \delta_2 = \varepsilon_2, \delta_3 = \varepsilon_3 \quad \text{se } \varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0, \varepsilon_3 \geq 0;$$

2) $\delta_1 = 0 \leq \delta_2 \leq \delta_3$

$$\delta_1 = 0, \delta_2 = \varepsilon_2 + \alpha(1 + 2\alpha)^{-1} \varepsilon_1, \delta_3 = \varepsilon_3 + \alpha(1 + 2\alpha)^{-1} \varepsilon_1, \\ \text{se } \varepsilon_1 \leq 0, \varepsilon_2 + \alpha(1 + 2\alpha)^{-1} \varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_3 + \alpha(1 + 2\alpha)^{-1} \varepsilon_1 \geq 0;$$

3) $\delta_1 = \delta_2 = 0 \leq \delta_3$

$$\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = \varepsilon_3 + \alpha(1 + \alpha)^{-1} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \geq 0 \\ \text{se } (1 + 2\alpha) \varepsilon_1 + \alpha \varepsilon_2 \leq 0, \alpha \varepsilon_1 + (1 + 2\alpha) \varepsilon_2 \leq 0, \varepsilon_3 + \alpha(1 + \alpha)^{-1} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \geq 0;$$

4) $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$

$$\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0 \\ \text{se } (1 + \alpha) \varepsilon_1 + \alpha \varepsilon_2 + \alpha \varepsilon_3 \leq 0, \alpha \varepsilon_1 + (1 + \alpha) \varepsilon_2 + \alpha \varepsilon_3 \leq 0, \alpha \varepsilon_1 + \alpha \varepsilon_2 + (1 + \alpha) \varepsilon_3 \leq 0.$$

Nel caso bidimensionale ($\varepsilon_3 = \delta_3 = 0$) i casi possibili si riducono a tre:

1) $0 \leq \delta_1 \leq \delta_2$

$$\delta_1 = \varepsilon_1, \delta_2 = \varepsilon_2 \quad \text{se } \varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0;$$

2) $\delta_1 = 0 \leq \delta_2$

$$\delta_1 = 0, \delta_2 = \varepsilon_2 + \alpha(1 + \alpha)^{-1} \varepsilon_1 \quad \text{se } \varepsilon_1 \leq 0, \alpha(1 + \alpha)^{-1} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \geq 0;$$

3) $\delta_1 \leq \delta_2 = 0$

$$\delta_1 = 0, \delta_2 = 0 \quad \text{se } \varepsilon_1 + \alpha(1 + \alpha)^{-1} \varepsilon_2 \leq 0, \alpha(1 + \alpha)^{-1} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq 0.$$

Infine nel caso monodimensionale ($\varepsilon_2 = \delta_2 = \varepsilon_3 = \delta_3 = 0$) sono possibili solo due casi:

1) $\delta_1 = \varepsilon_1 \quad \text{se } \varepsilon_1 \geq 0;$

2) $\delta_1 = 0 \quad \text{se } \varepsilon_1 \leq 0.$

Nei calcoli eseguiti per la determinazione di π e quindi della fessurazione, si è implicitamente supposto $\nu \geq 0$.

4. IL PROBLEMA DELL'EQUILIBRIO ELASTICO

Definito il legame costitutivo per il materiale non reagente a trazione, il problema elastostatico per il corpo \mathcal{B} , con frontiera regolare $\partial\mathcal{B}$, consiste in:

assegnati un sistema di forze di volume \mathbf{b} in \mathcal{B} , un sistema di forze di superficie $\hat{\mathbf{t}}$ su $\partial_1\mathcal{B}$ ed un campo di spostamenti $\hat{\mathbf{u}}$ su $\partial_2\mathcal{B}$ (con $\partial_1\mathcal{B} \cup \partial_2\mathcal{B} = \partial\mathcal{B}$ e $\partial_1\mathcal{B} \cap \partial_2\mathcal{B} = \{\emptyset\}$), *trovare* un campo di spostamenti \mathbf{u} , un campo di deformazioni totali $\boldsymbol{\varepsilon}$, un campo di deformazioni di fessurazione $\boldsymbol{\delta}$ e lo stato tensionale $\boldsymbol{\sigma}$ che

soddisfano le equazioni di campo:

(4.1)	$\boldsymbol{\varepsilon} = 1/2 [(\text{grad } \boldsymbol{u}) + (\text{grad } \boldsymbol{u})^T]$	congruenza,
(4.2)	$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{b} = 0$	equilibrio,
(4.3)	$\boldsymbol{\sigma} = S(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\delta})$	legame costitutivo,
(4.4)	$\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{X}$	ammissibilità,
(4.5)	$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta} = 0, \quad \boldsymbol{\delta} \in \mathcal{X}^-$	normalità,

e le condizioni al contorno:

(4.6)	$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{t}}$	su $\partial_1 \mathcal{B}$,
(4.7)	$\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}}$	su $\partial_2 \mathcal{B}$,

essendo \boldsymbol{n} la normale su $\partial_1 \mathcal{B}$.

Il problema elastostatico non lineare in generale può non ammettere soluzione. Ciò accade ovviamente quando, detto Σ la varietà lineare degli stati tensionali in equilibrio con i carichi esterni che soddisfano cioè le (4.2) e (4.6), l'insieme convesso $\mathcal{Q} = \Sigma \cap \mathcal{X}$ è vuoto. Se esiste soluzione questa è unica in termini di tensioni, ma può non esserlo in termini di spostamenti essendo definiti in taluni casi a meno di deformazioni di pura fessurazione.

La determinazione della condizione da imporre alla distribuzione di carico affinché esista soluzione del problema dell'equilibrio elastico è l'obiettivo di continue ricerche. In [14] è stato dimostrato che le due frasi seguenti sono equivalenti:

a) \mathcal{Q} è non vuoto,

b)
$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} + \int_{\partial_1 \mathcal{B}} \hat{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{v} \leq 0 \quad \forall \boldsymbol{v} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})).$$

In [12] è mostrato che se la condizione b) vale come stretta diseuguaglianza, allora esiste ed è unica, anche in termini di spostamenti, la soluzione del problema elastostatico. In un recente articolo [22] è ancora affrontata tale problematica da un punto di vista puramente statico. Infine Como in [23] discute, con motivazioni dinamiche, sulla condizione b) come necessaria e sufficiente per l'esistenza della soluzione nel caso di materiale rigido non reagente a trazione.

Si considera ora il caso in cui sono specificate le forze di superficie su tutta la frontiera del corpo \mathcal{B} , ovvero quando $\partial_1 \mathcal{B} = \partial \mathcal{B}$ e di conseguenza $\partial_2 \mathcal{B} = \{\emptyset\}$ (problema di trazione). Indicando con \boldsymbol{x} il vettore posizione del generico punto x di \mathcal{B} e con \boldsymbol{R} il tensore di rotazione propria ($\boldsymbol{R} \in \text{Orth}^+$), il sistema di carico $(\boldsymbol{b}, \hat{\boldsymbol{t}})$ si definisce in equilibrio astatico [24] se:

(4.8)
$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{b} + \int_{\partial \mathcal{B}} \boldsymbol{R} \hat{\boldsymbol{t}} = 0, \quad \forall \boldsymbol{R} \in \text{Orth}^+,$$

(4.9)
$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{R} \boldsymbol{b} + \int_{\partial \mathcal{B}} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{R} \hat{\boldsymbol{t}} = 0, \quad \forall \boldsymbol{R} \in \text{Orth}^+,$$

o equivalentemente:

$$i) \int_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \otimes \mathbf{b} + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{x} \otimes \hat{\mathbf{t}} = 0,$$

ii) \mathbf{b} , $\hat{\mathbf{t}}$ sono in equilibrio.

Lo stato tensionale medio $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ su tutto il corpo, per il teorema di Signorini, è fornito in funzione dei carichi esterni dall'espressione:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\text{vol } \mathcal{B}} \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\text{vol } \mathcal{B}} \left[\int_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \otimes \mathbf{b} + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{x} \otimes \hat{\mathbf{t}} \right],$$

si deduce allora dalla (i) che per un sistema di carico in equilibrio astatico il tensore medio degli sforzi è nullo. Tenendo presente le condizioni di ammissibilità (2.2) per lo stato tensionale, ne consegue:

$$\bar{\sigma}_{11} = 0 \quad \text{con} \quad \sigma_{11} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{11} = 0;$$

$$\bar{\sigma}_{22} = 0 \quad \text{con} \quad \sigma_{22} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{22} = 0;$$

$$\bar{\sigma}_{33} = 0 \quad \text{con} \quad \sigma_{33} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{33} = 0;$$

$$\bar{\sigma}_{12} = 0 \quad \text{con} \quad \sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{12} = 0;$$

$$\bar{\sigma}_{13} = 0 \quad \text{con} \quad \sigma_{11} \sigma_{33} - \sigma_{13}^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad \sigma_{11} = \sigma_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{13} = 0;$$

$$\bar{\sigma}_{23} = 0 \quad \text{con} \quad \sigma_{33} \sigma_{22} - \sigma_{23}^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{23} = 0,$$

ovvero lo stato tensionale è ovunque nullo:

$$(4.10) \quad \boldsymbol{\sigma}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{B}.$$

Se ciò accade, per le equazioni di equilibrio si ha: $\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad \forall \mathcal{P}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B} \Rightarrow \mathbf{b} = 0$ in $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ e $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = 0 \quad \forall \partial\mathcal{P}(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathbf{t} = 0$ su $\partial\mathcal{P}(\mathcal{B})$, essendo $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ una qualsiasi parte del corpo \mathcal{B} ed \mathbf{n} la normale a $\partial\mathcal{P}(\mathcal{B})$. Il risultato allora è duplice:

a) l'unico sistema di carico astatico sopportabile dal corpo costituito da materiale non reagente a trazione è quello nullo;

b) l'unico stato tensionale autoequilibrato, ovvero in equilibrio con il particolare sistema di carico astatico caratterizzato da forze esterne nulle, è quello nullo.

5. FORMULAZIONE AGLI ELEMENTI FINITI

Il problema dell'equilibrio elastico nella forma variazionale può essere posto in termini di tensioni ovvero di spostamenti. Nel primo caso si perviene al problema di minimo del funzionale quadratico energia complementare:

$$(5.1) \quad \mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma}) = (1/2) \int_{\mathcal{B}} \mathbf{A}[\boldsymbol{\tau}] \cdot \boldsymbol{\tau} + \int_{\partial_2 \mathcal{B}} \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}$$

sul convesso \mathcal{Q} già definito nel paragrafo precedente, essendo \mathbf{n} la normale su $\partial_2 \mathcal{B}$. Tale via, che appare la più naturale per l'unicità della soluzione in termini di tensioni,

intrapresa in [11] e successivamente in [25] utilizzando una tecnica *penalty* per il soddisfacimento dei vincoli sulle tensioni, conduce però a grossi problemi numerici.

Posto invece in termini di spostamenti, il problema dell'equilibrio elastico consiste nel minimizzare il funzionale energia potenziale:

$$(5.2) \quad \mathcal{F}(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} S[Lv - \pi(Lv)] \cdot [Lv - \pi(Lv)] - \int_{\mathcal{B}} b \cdot v - \int_{\partial_1 \mathcal{B}} \hat{t} \cdot v$$

sulla varietà lineare dei campi di spostamento ammissibili, che rispettano cioè la condizione $v = \hat{u}$ su $\partial_2 \mathcal{B}$ dove L è l'operatore di deformazione ($L = \text{Symgrad}$).

Tale funzionale risulta essere convesso e differenziabile, ne consegue che, se ammette minimo, questo è individuato dal punto di stazionarietà u di \mathcal{F} ottenibile come [7]:

$$(5.3) \quad \int_{\mathcal{B}} S[Lu - \pi(Lu)] \cdot Lv = \int_{\mathcal{B}} b \cdot v + \int_{\partial_1 \mathcal{B}} \hat{t} \cdot v \quad \forall v : v = 0 \text{ su } \partial_2 \mathcal{B}.$$

Il termine $S[Lu - \pi(Lu)]$ nell'equazione (5.3) rappresenta il tensore delle tensioni nel generico punto del solido \mathcal{B} espresso in termini di spostamenti. Per la (2.13), la (5.3) allora si può riscrivere nella forma:

$$(5.4) \quad \int_{\mathcal{B}} P(u)[Lu] \cdot Lv = \int_{\mathcal{B}} b \cdot v + \int_{\partial_1 \mathcal{B}} \hat{t} \cdot v \quad \forall v : v = 0 \text{ su } \partial_2 \mathcal{B},$$

con $P(u) = P_\varepsilon(Lu)$.

Si denoti con \mathcal{B}_n l'insieme ottenuto tramite discretizzazione di \mathcal{B} in n elementi finiti $\mathcal{B}_n = \bigcup_{e=1,n} \mathcal{B}_e$, tale che $\mathcal{B}_n \approx \mathcal{B}$, con \mathcal{B}_e generico elemento della discretizzazione. Si assume che il campo di spostamenti in \mathcal{B}_e sia rappresentabile nella forma:

$$(5.5) \quad u = \sum_{i=1}^{N_{pe}} u^i \psi^i,$$

dove u^i sono i vettori dei parametri nodali, rappresentano cioè gli spostamenti nell' i -esimo nodo dell'elemento \mathcal{B}_e , ψ^i le funzioni di forma ed N_{pe} è il numero di nodi per elemento. Nel seguito gli indici ripetuti si intenderanno sommati.

L'equazione di equilibrio nella forma variazionale (5.4), estesa al singolo elemento \mathcal{B}_e della discretizzazione, per la posizione (5.5) assume la forma:

$$(5.6) \quad \int_{\mathcal{B}_e} P(u^m \psi^m)[Lu^j \psi^j] \cdot Lv^i \psi^i = \int_{\mathcal{B}_e} b \cdot v^i \psi^i + \int_{\partial \mathcal{B}_e} t_e \cdot v^i \psi^i,$$

per ogni ammissibile v^i , nel senso già precisato precedentemente, avendo indicato con t_e le tensioni di contatto agenti sulla frontiera di \mathcal{B}_e trasmesse dagli elementi che lo circondano.

Introducendo il simbolo di doppia contrazione ($:$) per indicare l'operazione di prodotto tra un tensore del quarto ed uno del secondo ordine, tale che $(S : \varepsilon)_{ij} = S_{ikjl} \varepsilon_{kl}$, e sfruttando le simmetrie minori di $P(\cdot)$, la (5.6) si riscrive come:

$$(5.7) \quad \int_{\mathcal{B}_e} [P(u^m \psi^m) : (\text{grad } \psi^j \otimes \text{grad } \psi^j)] u^i \cdot v^i = \int_{\mathcal{B}_e} b \cdot v^i \psi^i + \int_{\partial \mathcal{B}_e} t_e \cdot v^i \psi^i,$$

per ogni v^j ammissibile. Ponendo allora:

$$K_e^{ij}(\mathbf{w}_e) = \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{P}(\mathbf{u}^m \boldsymbol{\Psi}^m) : (\mathbf{L}\psi^j \otimes \mathbf{L}\psi^j), \quad \mathbf{b}^i = \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{b} \psi^j, \quad \mathbf{t}_e^i = \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{t}_e \psi^j,$$

con \mathbf{w}_e vettore ordinato degli spostamenti di tutti i nodi di \mathcal{B}_e e $\mathbf{K}_e^{ij}(\mathbf{w}_e)$ matrice di rigidezza del generico elemento della discretizzazione, associata al campo di spostamenti \mathbf{w}_e , la (5.7) in forma algebrica diventa allora:

$$(5.8) \quad \mathbf{K}_e^{ij}(\mathbf{w}_e) \mathbf{u}^i = \mathbf{b}^i + \mathbf{t}_e^i.$$

Assemblando le matrici di rigidezza dei singoli elementi, si giunge al sistema di equazioni non lineari:

$$(5.9) \quad \mathbf{K}(\mathbf{w}) \mathbf{w} = \mathbf{f},$$

dove \mathbf{w} è il vettore dei parametri incogniti ovvero degli spostamenti di tutti i nodi della *mesh*, $\mathbf{K}(\mathbf{w})$ è la matrice di rigidezza secante della struttura per un fissato \mathbf{w} , ed \mathbf{f} il vettore dei parametri nodali di carico.

6. IL METODO DI CALCOLO

Il problema non lineare (5.9) può essere affrontato per via numerica ricorrendo al metodo di iterazione diretta proposto e discusso in [6] ed utilizzato in [8] e [16] per problemi con legami costitutivi unilaterali. Si dimostra che se tale metodo converge, esso converge alla soluzione, ed inoltre [26] converge se ad ogni passo di iterazione l'energia di deformazione diminuisce.

Il metodo si articola nelle seguenti operazioni:

a) si pone inizialmente $\mathbf{w} = 0$ e quindi $\boldsymbol{\delta} = 0$ su tutto \mathcal{B}_n , per cui $\mathbf{P}(\mathbf{w}) = \mathbf{S}$, tensore di rigidezza elastico isotropo;

b) si determina la matrice di rigidezza elastica $\mathbf{K}(\mathbf{w})$ ed il vettore dei parametri nodali di carico \mathbf{f} ;

c) si risolve il problema ora lineare (5.9) e si determina così una nuova soluzione \mathbf{w}_n ;

d) si calcola la quantità $\gamma = \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_n\| / \|\mathbf{w}_n\|$, che rappresenta la distanza tra due soluzioni consecutive e quindi l'errore; se γ è minore di un prefissato valore ammissibile γ_a si arresta la procedura, altrimenti si continua;

e) si determina il campo di fessurazione $\boldsymbol{\delta}$ associato a \mathbf{w}_n tramite il proiettore non lineare $\boldsymbol{\pi}$;

f) si suppone, in ogni punto di Gauss di ogni elemento della discretizzazione, nulla la resistenza sia a trazione che a compressione del materiale lungo le direzioni ortogonali alle fessurazioni, si definisce così un nuovo legame costitutivo, si pone $\mathbf{w} = \mathbf{w}_n$ e si torna al passo b).

Si descrive ora in dettaglio l'operazione di aggiornamento, ad ogni ciclo di

iterazione, del tensore di elasticità. In [8] è stato messo a punto un metodo di variazione del legame costitutivo basato sull'ipotesi che l'energia di deformazione in soluzione sia ottenibile, a partire dal valore del tensore di fessurazione $\delta^{(i)}$ ottenuto all' i -esimo ciclo, come $\|\epsilon - \delta\|_e^2/2 = \min \{\|\epsilon - \rho \delta^{(i)}\|_e^2/2 : \rho \in R\}$. In questo lavoro si propone un metodo alternativo basato sull'analisi dell'apparente legame costitutivo ad ogni ciclo di iterazione. In sostanza per il materiale isotropo non reagente a trazione, indicando con $d_1^{(i)} d_2^{(i)} d_3^{(i)}$ gli autovettori di $\delta^{(i)}$, può accadere:

problema tridimensionale

1) $0 \leq \delta_1^{(i)} \leq \delta_2^{(i)} \leq \delta_3^{(i)}$: materiale completamente fessurato e quindi isotropo inconsistente: $P(w^{(i)}) = 0$,

2) $\delta_1^{(i)} = 0 \leq \delta_2^{(i)} \leq \delta_3^{(i)}$: materiale fessurato nel piano $d_2^{(i)} d_3^{(i)}$ e quindi trasversalmente isotropo con asse $d_1^{(i)}$, inconsistente nel piano $d_2^{(i)} d_3^{(i)}$: $P(w^{(i)}) = [2\mu(D_1 \square I + I \square D_1) + (\mu\lambda/(\mu + \lambda) - 2\mu) D_1 \otimes D_1]$,

3) $\delta_1^{(i)} = \delta_2^{(i)} = 0 \leq \delta_3^{(i)}$: materiale fessurato in direzione $d_3^{(i)}$ e quindi trasversalmente isotropo con asse $d_3^{(i)}$, inconsistente in direzione $d_3^{(i)}$: $P(w^{(i)}) = 2\mu I \square I + \lambda I \otimes I - [\lambda^2 I \otimes I + 2\mu\lambda(D_3 \otimes I + I \otimes D_3) + 4\mu^2 D_3 \otimes D_3]/(2\mu + \lambda)$,

4) $\delta_1^{(i)} = \delta_2^{(i)} = \delta_3^{(i)} = 0$: materiale non fessurato e quindi isotropo integro: $P(w^{(i)}) = 2\mu I \square I + \lambda I \otimes I$;

problema bidimensionale

1) $0 \leq \delta_1^{(i)} \leq \delta_2^{(i)}$: materiale completamente fessurato e quindi isotropo inconsistente: $P(w^{(i)}) = 0$,

2) $\delta_1^{(i)} = 0 \leq \delta_2^{(i)}$: materiale fessurato in direzione $d_2^{(i)}$ e quindi ortotropo inconsistente in direzione $d_2^{(i)}$: $P(w^{(i)}) = 2\mu I \square I + \lambda I \otimes I - [\lambda^2 I \otimes I + 2\mu\lambda(D_2 \otimes I + I \otimes D_2) + 4\mu^2 D_2 \otimes D_2]/(2\mu + \lambda)$,

3) $\delta_1^{(i)} = \delta_2^{(i)} = 0$: materiale non fessurato e quindi isotropo integro: $P(w^{(i)}) = 2\mu I \square I + \lambda I \otimes I$;

problema monodimensionale

1) $0 \leq \delta_1^{(i)}$: materiale fessurato e quindi inconsistente: $P(w^{(i)}) = 0$,

2) $\delta_1^{(i)} = 0$: materiale integro: $P(w^{(i)}) = E$,

essendo $D_i = d_i \otimes d_i$, E il modulo di Young, ed avendo indicato con il simbolo \square il prodotto tra tensori del secondo ordine tale che $(A \square B) C = A C B^T$.

Il metodo di calcolo descritto si è mostrato molto efficace nelle applicazioni numeriche sviluppate nel prossimo paragrafo.

7. APPLICAZIONI NUMERICHE

Gli esempi di calcolo elaborati riguardano alcuni semplici schemi bidimensionali. Per i primi due casi è disponibile la soluzione esatta in forma chiusa, ed hanno lo scopo

di saggiare la bontà sia della formulazione agli elementi finiti che del metodo iterativo impiegato.

Il primo tratta il problema di un disco circolare di raggio ρ_e con un foro sempre circolare al centro di raggio ρ_i , soggetto ad una pressione esterna p_e ed una interna p_i . La soluzione esatta in termini di spostamenti radiali u , di tensioni normali in direzione radiale σ_1 e tangenziale σ_2 è stata ottenuta, in funzione del raggio ρ , in [16] e [20].

La soluzione del problema è fornita dalle espressioni:

$$(7.1) \quad u(\rho) = \begin{cases} [c_1(1-2\nu)\rho - c_2\rho^{-1}][1+\nu]/E & \text{se } \rho_i \leq \rho \leq \rho_n, \\ [c_1(1-2\nu)\rho - c_2\rho^{-1}][1+\nu]/E + p_i\rho_i E^{-1} \ln(\rho_n\rho^{-1}) & \text{se } \rho_n \leq \rho \leq \rho_e, \end{cases}$$

$$(7.2) \quad \sigma_1(\rho) = \begin{cases} -p_i\rho_i\rho^{-1} & \text{se } \rho_i \leq \rho \leq \rho_n, \\ c_1 + c_2\rho^{-2} & \text{se } \rho_n \leq \rho \leq \rho_e, \end{cases}$$

$$(7.3) \quad \sigma_2(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{se } \rho_i \leq \rho \leq \rho_n, \\ c_1 - c_2\rho^{-2} & \text{se } \rho_n \leq \rho \leq \rho_e, \end{cases}$$

dove $c_1 = (p_i\rho_i\rho_n - p_e\rho_e^2)(\rho_e^2 - \rho_n^2)^{-1}$, $c_2 = \rho_n^2\rho_e^2(p_e - p_i\rho_i\rho_n^{-1})(\rho_e^2 - \rho_n^2)^{-1}$ e ρ_n è il raggio neutro, ovvero il raggio massimo per il quale la tensione σ_2 è nulla (vedi fig. 3), che si

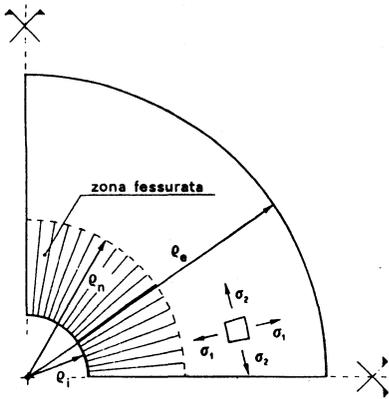


Fig. 3. - Schema di calcolo per un anello circolare.

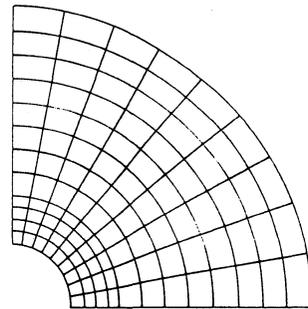


Fig. 4. - Schematizzazione agli elementi finiti.

determina risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$(7.4) \quad \rho_n^2 - 2p_e\rho_e^2(p_i\rho_i)^{-1}\rho_n + \rho_e^2 = 0.$$

I dati del problema sono i seguenti: materiale: $E = 500\,000 \text{ t/m}^2$, $\nu = 0.0$; geometria: $\rho_i = 1000 \text{ m}$, $\rho_e = 5000 \text{ m}$; carico: $p_i = 100 \text{ t/m}$, $p_e = 25 \text{ t/m}$. Il calcolo è stato eseguito per via analitica utilizzando le formule (7.1), (7.2) e (7.3), e per via numerica,

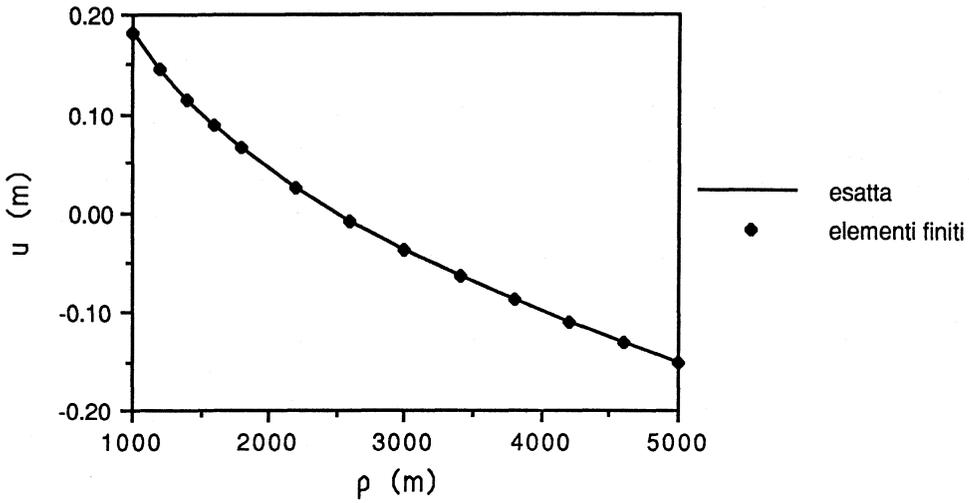


Fig. 5. - Spostamento radiale vs. raggio ρ .

ricorrendo alla schematizzazione agli elementi finiti di un quarto di anello con 12 suddivisioni circolari e 9 radiali impiegando elementi isoparametrici bilineari a 4 nodi, come rappresentato in fig. 4. In figg. 5, 6 e 7 sono riportati i diagrammi relativi agli spostamenti ed alle tensioni normali in direzione radiale e tangenziale. I risultati ottenuti mostrano il perfetto accordo tra la soluzione analitica e quella numerica sia per quanto riguarda gli spostamenti che le tensioni.

Il secondo esempio di calcolo riguarda il pannello rettangolare di dimensione $l \times b$ rappresentato in fig. 8, soggetto a vincoli semplici continui in direzione x_1 alla base, così

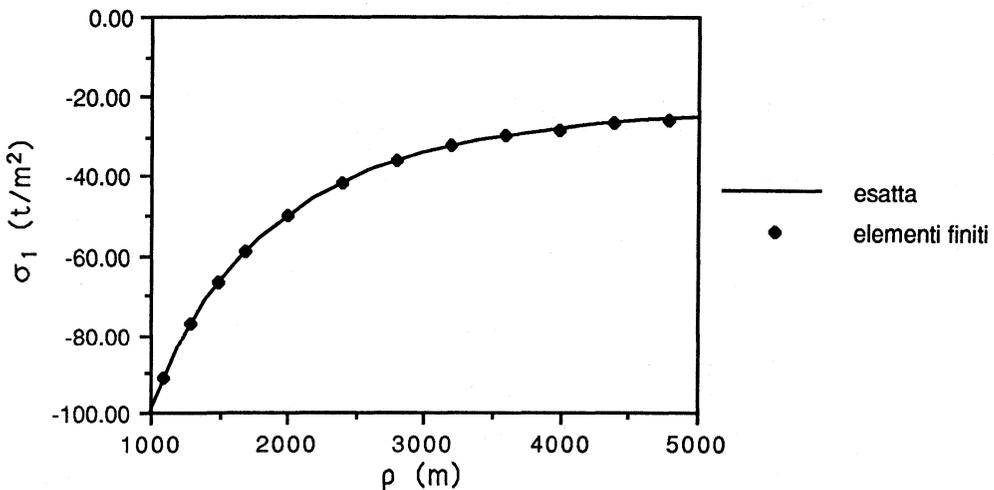


Fig. 6. - Tensione normale in direzione radiale vs. raggio ρ .

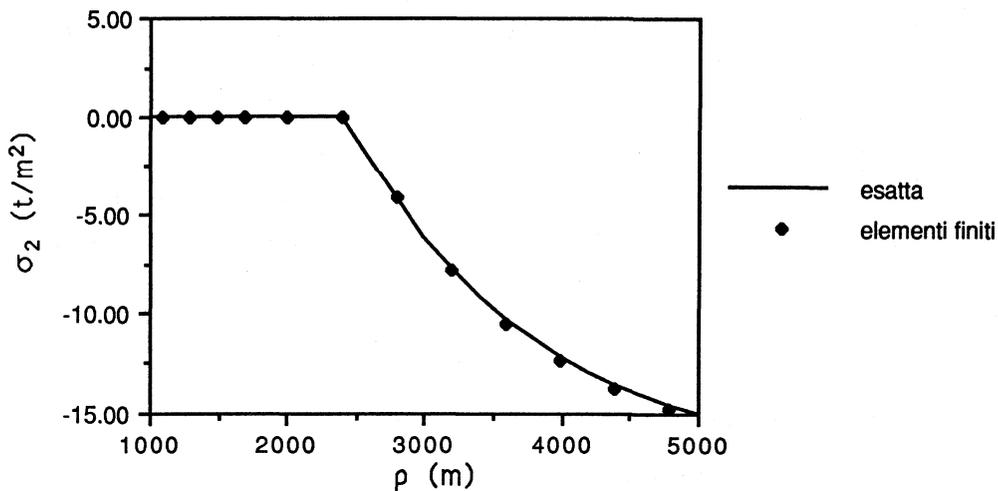


Fig. 7. - Tensione normale in direzione tangenziale vs. raggio ρ .

da impedire gli spostamenti verticali, ed ad un ulteriore vincolo semplice in direzione x_2 per eliminare i moti rigidi lungo x_1 . La struttura è sollecitata sul lato superiore da un carico verticale $q(x_1)$, costante per $0 \leq x_1 \leq a$ di intensità q_m , lineare per $a \leq x_1 \leq a + b$ con valore pari a q_m per $x_1 = a$ e nullo per $x_1 = a + b$ e costante con valore nullo per $a + b \leq x_1 \leq l$. La soluzione esatta associata al campo di minima fessurazione è molto

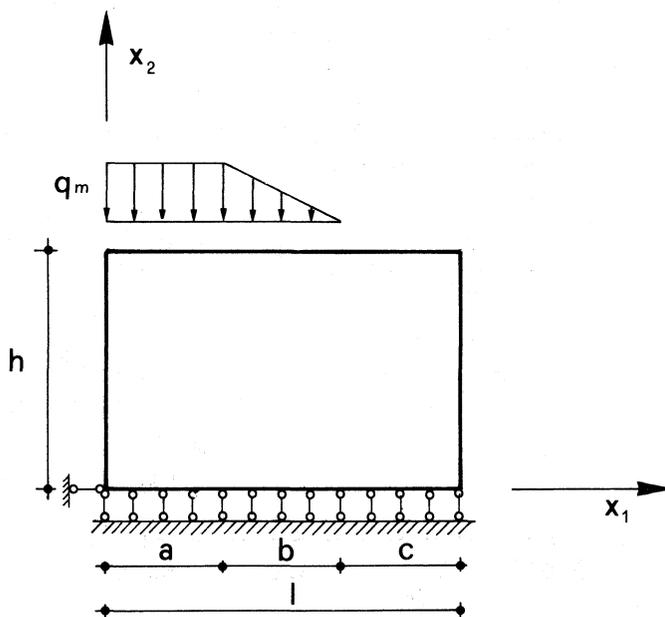


Fig. 8. - Schema di calcolo relativo al pannello soggetto ad un carico variabile sulla base superiore.

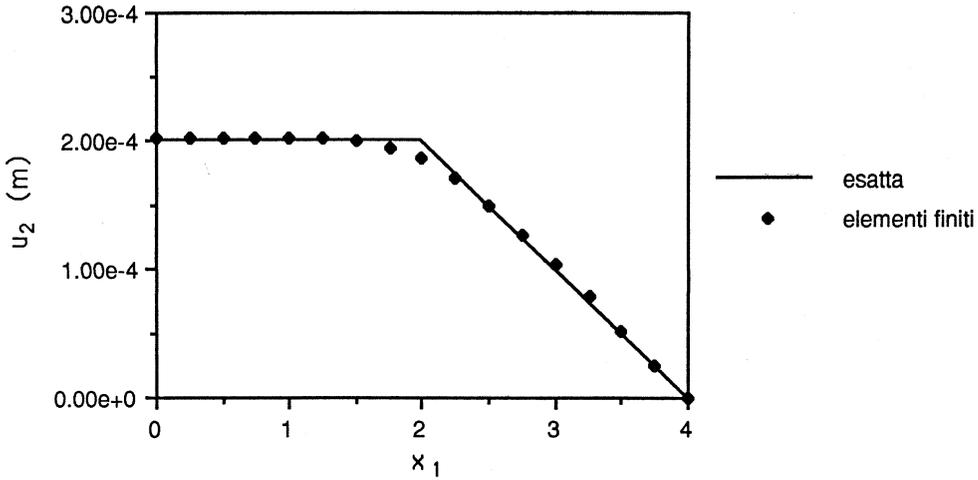


Fig. 9. - Spostamenti verticali per $x_2 = b$.

semplice ed è fornita in termini di spostamenti dalle espressioni:

$$(7.5) \quad u_1(x_1, x_2) = \begin{cases} \nu q_m E^{-1} x_1 & \text{se } 0 \leq x_1 \leq a, \\ q_m [\nu(2(a+b)x_1 - x_1^2 - a^2) - x_2^2 + b^2] / 2Eb & \text{se } a \leq x_1 \leq a+b, \\ q_m [\nu(b^2 + 2ab) + b^2] / 2Eb & \text{se } a+b \leq x_1 \leq l, \end{cases}$$

$$(7.6) \quad u_2(x_1, x_2) = \begin{cases} -q_m E^{-1} x_2 & \text{se } 0 \leq x_1 \leq a, \\ -q_m [x_1 - (a+b)] x_2 / Eb & \text{se } a \leq x_1 \leq a+b, \\ 0 & \text{se } a+b \leq x_1 \leq l, \end{cases}$$

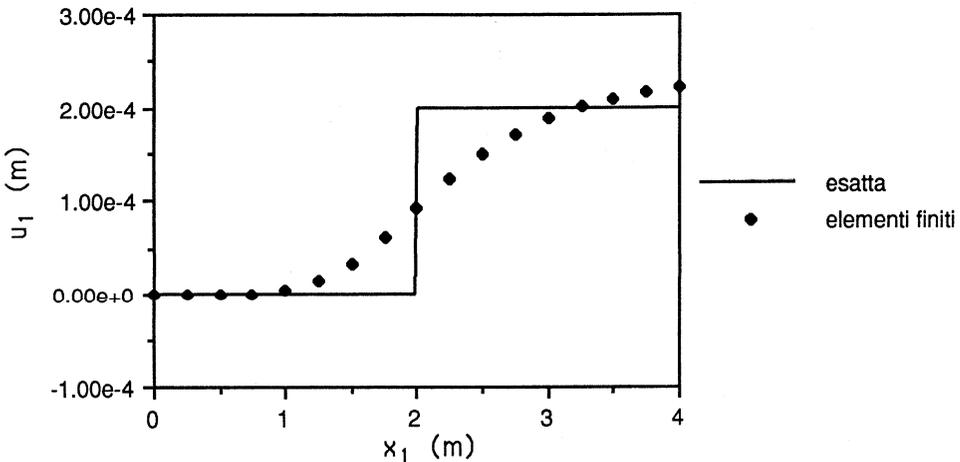


Fig. 10. - Spostamenti orizzontali per $x_2 = 0$.

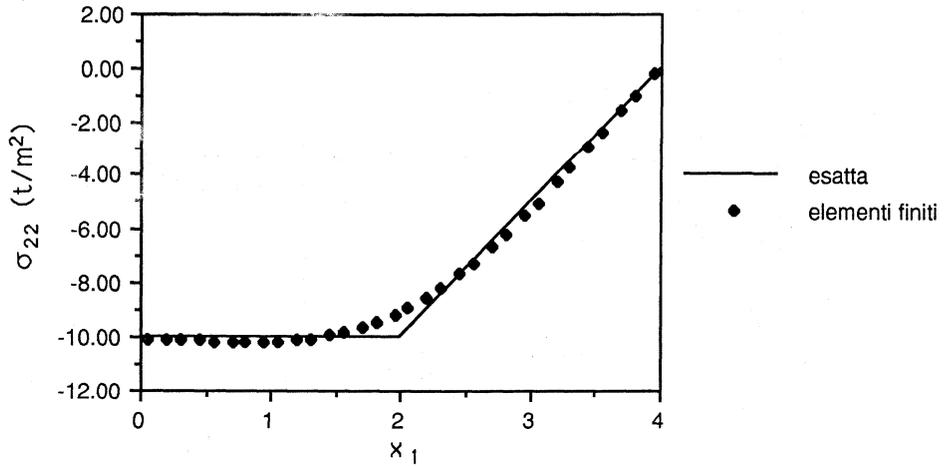


Fig. 11. - Tensioni normali in direzione verticale per $x_2 = 0,1057$ m.

ed in termini di tensioni dalle:

$$(7.7) \quad \sigma_{11}(x_1, x_2) = 0, \quad \sigma_{22}(x_1, x_2) = -q(x_1), \quad \sigma_{12}(x_1, x_2) = 0.$$

È immediato verificare:

$$\lim_{b \rightarrow 0} u_1(x_1, x_2) = +\infty \quad \text{se } a + b \leq x_1 \leq l,$$

ovvero quando il carico tende ad essere discontinuo, gli spostamenti del tratto

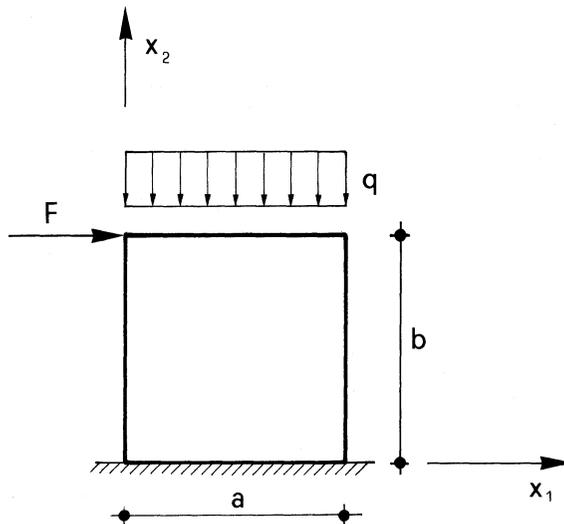


Fig. 12. - Schema di calcolo relativo al pannello soggetto ad un carico costante sulla base superiore ed ad una forza orizzontale F in sommità.

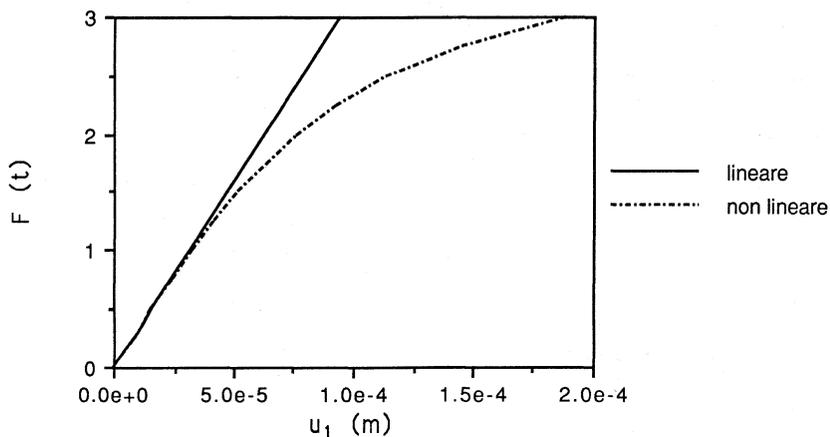


Fig. 13. - Spostamento orizzontale in sommità vs. F .

$x_1 \geq a + b$ diventano infinitamente grandi. I dati numerici utilizzati per il calcolo sono: materiale: $E = 200\,000 \text{ t/m}^2$, $\nu = 0.0$; geometria: $a = 2 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $c = 0 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$; carico: $q_m = 10 \text{ t/m}$. Come per il caso precedente, il calcolo è stato eseguito sia per via analitica che per via numerica. Per quanto riguarda la discretizzazione agli elementi finiti, la *mesh* è stata realizzata con una suddivisione regolare di 16×8 elementi a 4 nodi. In figg. 9, 10 e 11 sono diagrammati rispettivamente gli spostamenti verticali dei punti giacenti sul lato superiore del pannello, gli spostamenti orizzontali di quelli sul lato inferiore ed infine le tensioni normali σ_{22} calcolate per $x_2 = 0.1057 \text{ m}$. I risultati numerici mostrano in generale un buon accordo tra la soluzione analitica e quella

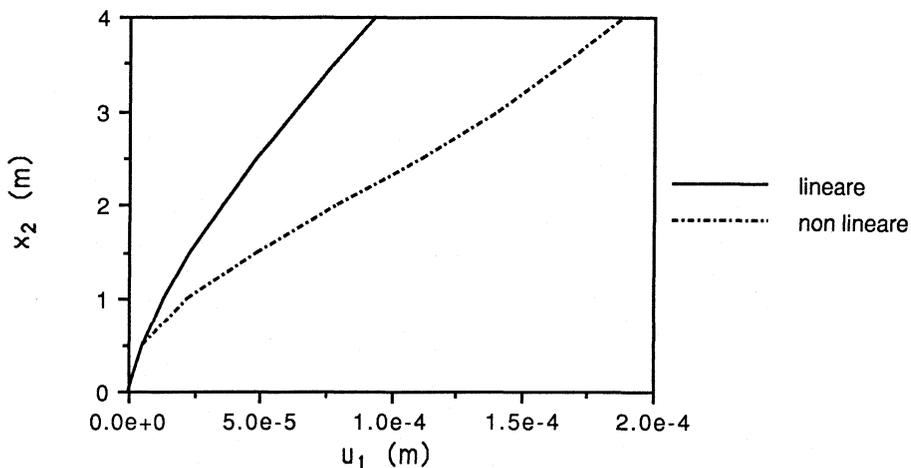
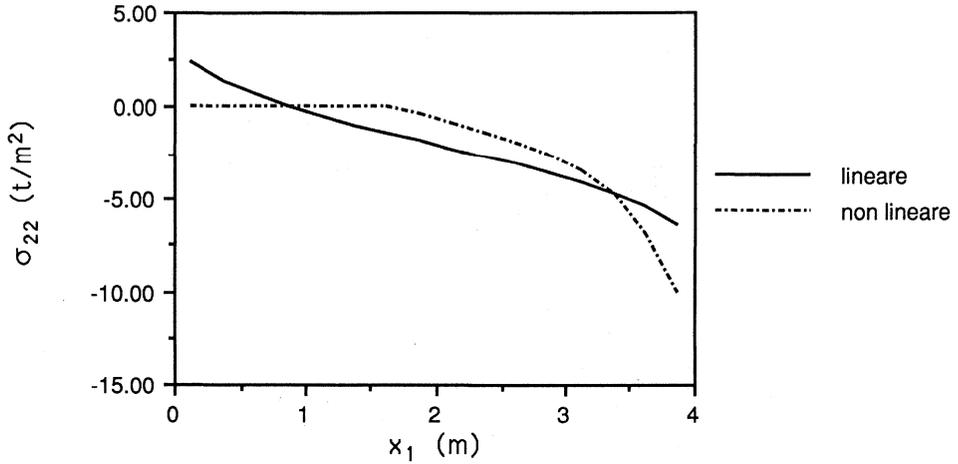
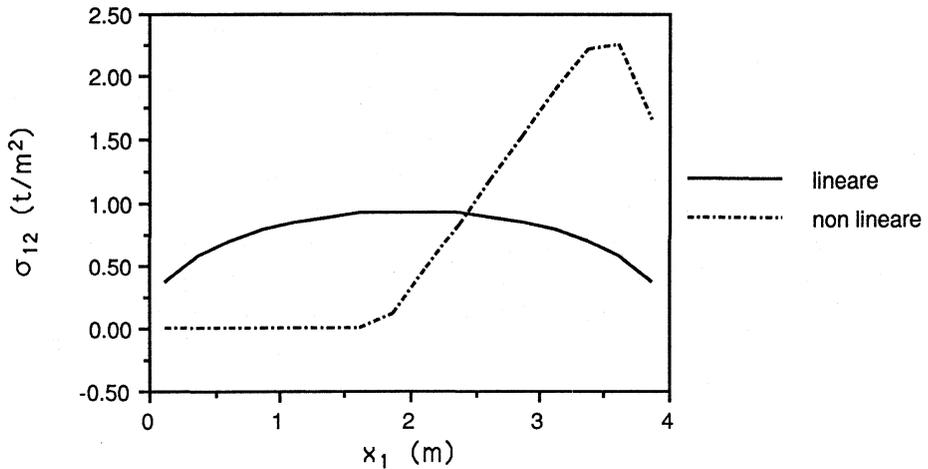


Fig. 14. - Spostamenti orizzontali per $x_1 = a/2$ ($F = 3 \text{ t}$).



a)



b)

Fig. 15. - Tensioni (a) normali σ_{22} e (b) tangenziali σ_{12} per $x_2 = 0.25$ m ($F = 3$ t).

ottenuta tramite elementi finiti. Si nota comunque che il modello discretizzato coglie in modo diffuso la frattura concentrata che si realizza lungo la linea $x_1 = a$.

Nel terzo esempio in esame si considera un pannello rettangolare $a \times b$ incastrato alla base, soggetto ad un carico verticale costante q ed ad una forza orizzontale concentrata F in sommità, come illustrato in fig. 12. Per tale schema non è disponibile soluzione in forma chiusa, per cui il calcolo è stato affrontato solo numericamente. I dati numerici sono i seguenti: materiale: $E = 500\,000$ t/m^2 , $\nu = 0.0$; geometria: $a = 4$ m, $b = 4$ m; carico: $q_m = 2$ t/m , $F = 0 \sim 3$ t. La discretizzazione adottata consiste in 16×8 elementi a 4 nodi. I risultati sono riportati in forma comparativa con quelli provenienti

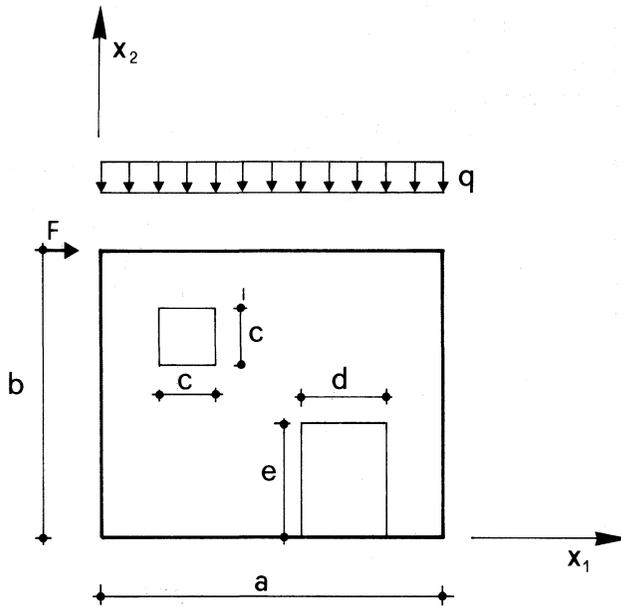


Fig. 16. - Schema di calcolo relativo a un pannello con aperture.

dal modello lineare. In fig. 13 è riportato, al variare di F , il valore degli spostamenti orizzontali del lato superiore del pannello. Si nota come all'aumentare di F la differenza tra il caso lineare e quello non lineare diventa più evidente, come d'altra parte si poteva immaginare. Fissato il valore della forza orizzontale $F = 3 \text{ t}$, in figg. 14 e 15 sono rappresentati i diagrammi rispettivamente degli spostamenti orizzontali dei nodi giacenti sulla retta $x_1 = a/2$, delle tensioni normali σ_{22} e tangenziali σ_{12} lungo il tratto $x_2 = 0.25 \text{ m}$, in prossimità della sezione di incastro.

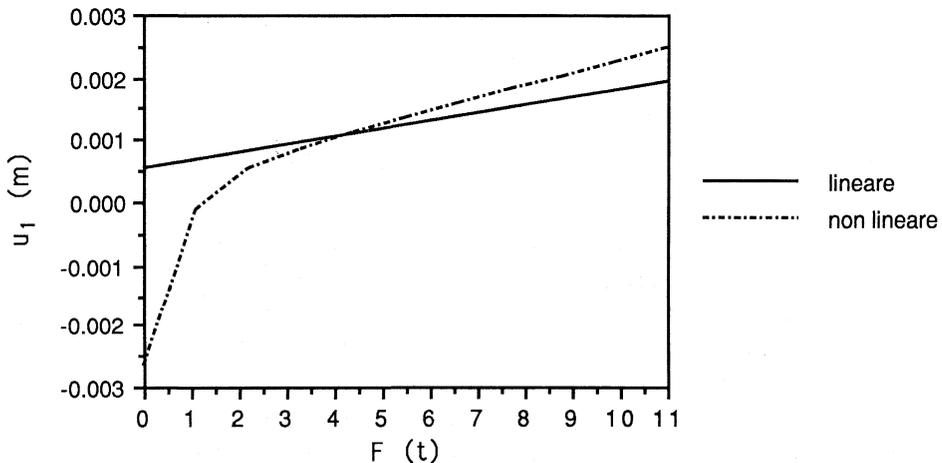
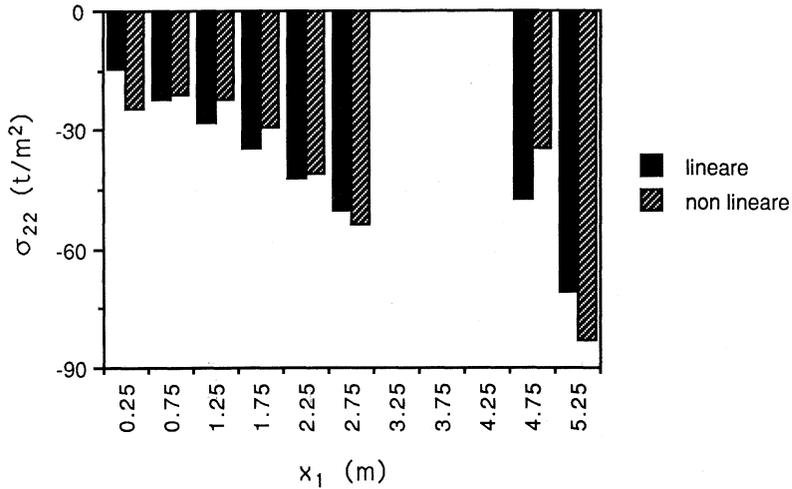
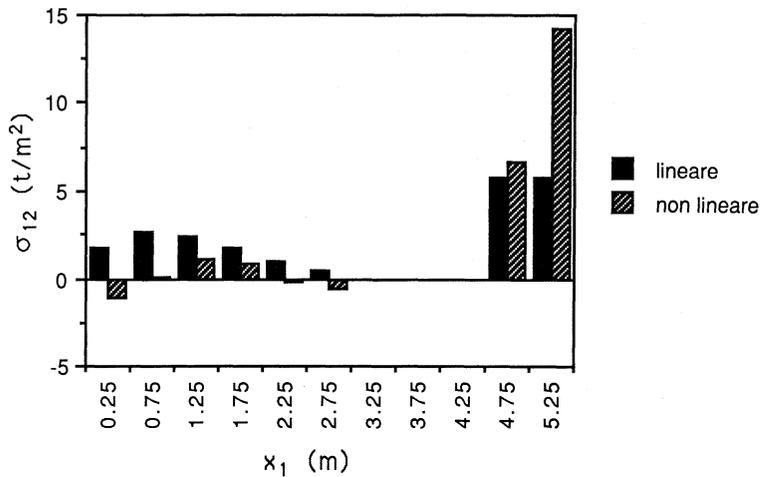


Fig. 17. - Spostamento orizzontale in sommità vs. F .



a)



b)

Fig. 18. - Tensioni (a) normali σ_{22} e (b) tangenziali σ_{12} per $x_2 = 0.25$ m ($F = 11$ t).

Il quarto esempio di calcolo riguarda un pannello murario rettangolare con due aperture come mostrato in fig. 16, soggetto al peso proprio di intensità γ , ad un carico verticale uniformemente distribuito q applicato sulla base superiore ed ad una forza concentrata orizzontale F in sommità. I dati utilizzati per il calcolo sono: materiale: $E = 200\,000$ t/m², $\nu = 0$, $\gamma = 2$ t/m²; geometria: $a = 5.5$ m, $b = 5$ m, $c = 1$ m, $d = 1.5$ m, $e = 2$ m; carico: $q = 20$ t/m, $F = 0 \sim 11$ t. La discretizzazione è stata realizzata utilizzando 11×10 elementi a 4 nodi. Per gli elementi in corrispondenza delle aperture sono

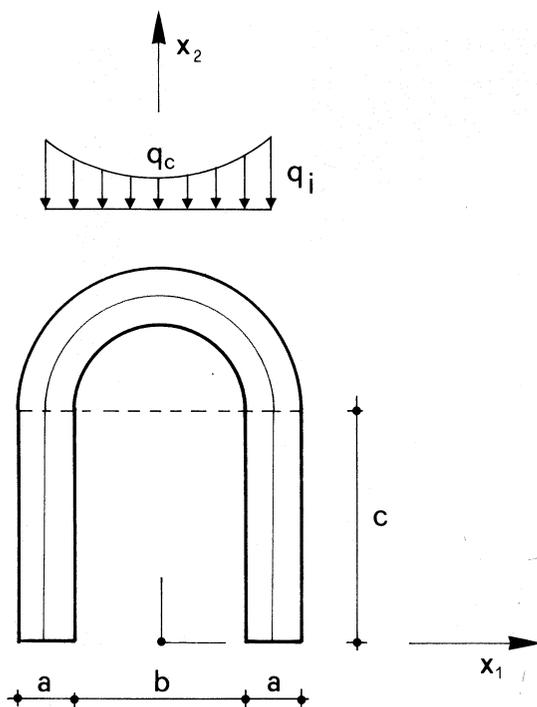


Fig. 19. - Schema di calcolo relativo all'arco su piedritti.

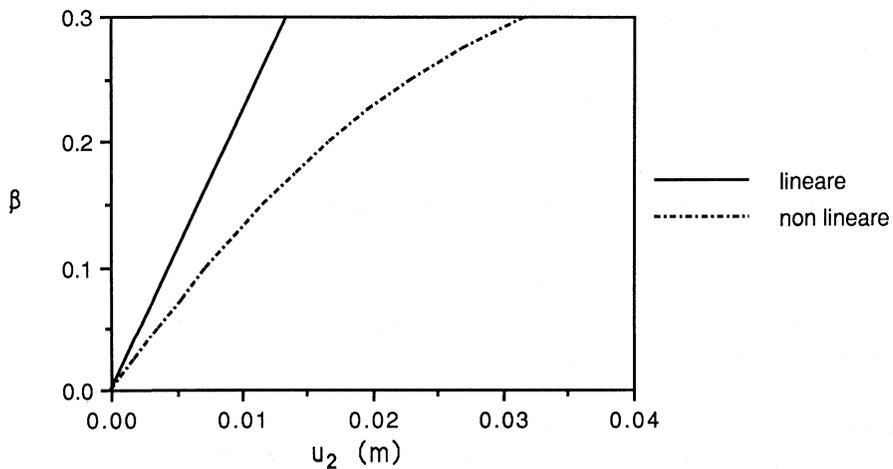


Fig. 20. - Spostamento orizzontale della sezione in chiave dell'arco vs. β .

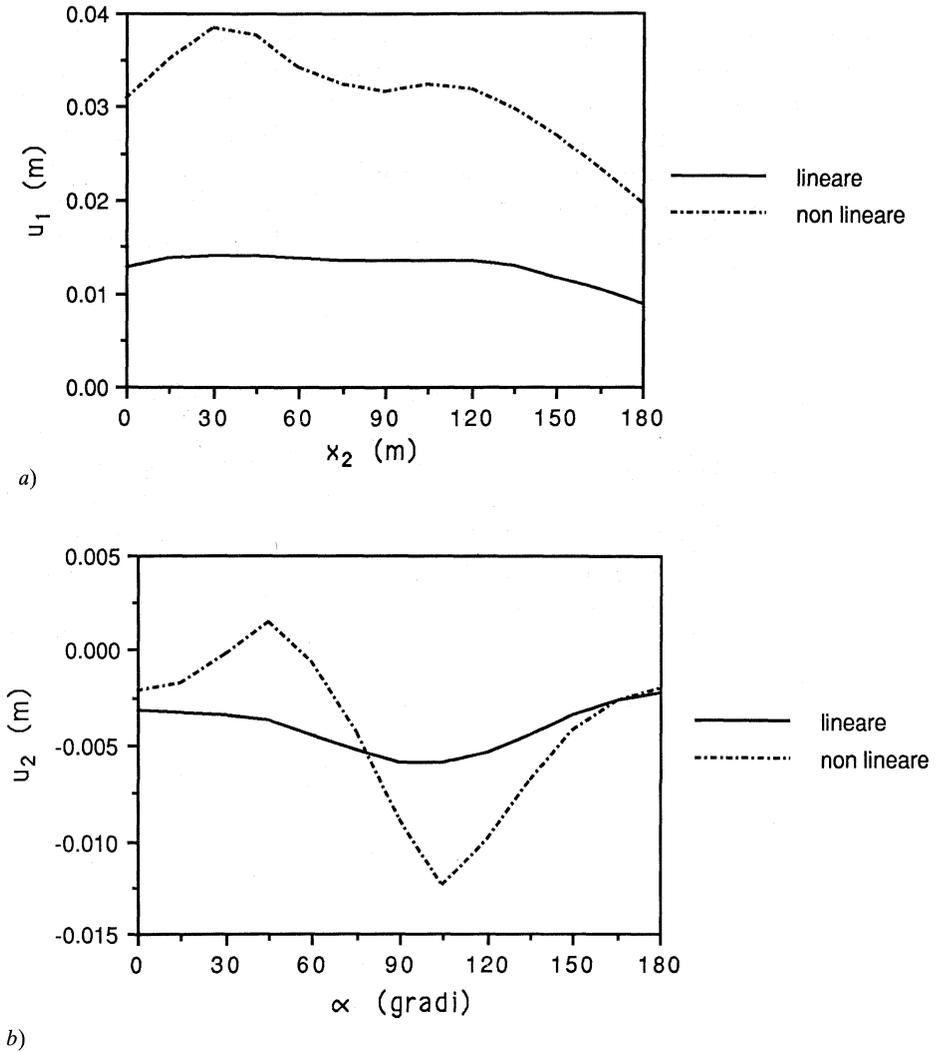


Fig. 21. - Spostamenti orizzontali (a) e verticali (b) della linea media dell'arco vs. anomalia α computata in senso antiorario.

stati assunti valori nulli delle costanti elastiche. In fig. 17 si riporta il valore dello spostamento orizzontale del nodo dove è applicata la forza orizzontale contro F , ottenuti utilizzando il modello lineare e quello non lineare. In fig. 18 sono riportati i valori delle tensioni normali σ_{22} e tangenziali σ_{12} alla base del pannello ($x_2 = 0.25$ m) per gli schemi di calcolo considerati.

L'ultimo esempio tratta un portale costituito da due piedritti sormontati da un arco circolare a tutto sesto, come mostrato in fig. 19. Il pendolo orizzontale ha il compito di eliminare la spinta dell'arco. L'arco è soggetto, oltre al peso proprio di intensità γ , ad

un carico verticale parabolico q ed orizzontale βq che simula l'effetto istantaneo del sisma agenti sulla line media. I dati di calcolo sono: materiale: $E = 100\,000\text{ t/m}^2$, $\nu = 0$, $\gamma = 2\text{ t/m}^2$; geometria: $a = 2\text{ m}$, $b = 6\text{ m}$, $c = 8\text{ m}$; carico: $q_i = 7,5\text{ t/m}$, $q_c = 5\text{ t/m}$, $\beta = 0 - 0,03$. Come nei due esempi di calcolo precedenti, i risultati numerici sono stati confrontati con quelli ottenuti utilizzando il modello lineare. In fig. 20 è riportato l'andamento dello spostamento orizzontale della sezione in chiave dell'arco in funzione del coefficiente β ed in fig. 21 sono mostrati i diagrammi degli spostamenti orizzontali e verticali per il valore di $\beta = 0,03$.

CONCLUSIONI

L'analisi strutturale di elementi in materiale non resistente a trazione può essere affrontata per via numerica utilizzando la procedura proposta. La formulazione agli elementi finiti, per la quale allo stato attuale non sono disponibili teoremi di convergenza al problema continuo, negli esperimenti numerici di test, ovvero i primi due esempi di calcolo svolti, ha fornito risultati apprezzabili. Lo sforzo si dovrà allora concentrare da una parte sulla possibilità di formulare teoremi di convergenza del modello discretizzato almeno per casi particolari, dall'altro di trovare nuove soluzioni esatte da utilizzare come *benchmark* per formulazioni agli elementi finiti. Contemporaneamente sarà utile indagare numericamente sulla influenza della discretizzazione e del tipo di elemento rispetto alla capacità di convergenza della procedura e di bontà della soluzione approssimata.

RINGRAZIAMENTI

Questo lavoro è stato possibile grazie al supporto finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. BENVENUTO, *La Scienza delle Costruzioni*. Editore Sansoni, 1981.
- [2] A. KOOHARIAN, *Limit Analysis of Voussoir and Concrete Arches*. J. Amer. Concrete Inst., 24, 1952.
- [3] J. HEYMAN, *The Safety of Masonry Arches*. Int. J. Mech. Sci., 2, 1969.
- [4] O. C. ZIENKIEWICZ - S. VALLIAPPAN - I. P. KING, *Stress Analysis of Rock as a NO TENSION Material*. Geotechnique, 18, 1968.
- [5] M. COMO - M. LEMBO, *Sulla Modellazione Termomeccanica delle Attività di una Caldera: Deformazioni e Fratturazioni allo Stato Eruttivo ed Applicazioni al Bradismo Flegreo*. Atti del Convegno Nazionale Meccanica dei Materiali e delle Strutture, Roma (25-27/10/1989).
- [6] G. ROMANO - M. ROMANO, *Sulla Soluzione di Problemi Strutturali in Presenza di Legami Costitutivi Unilaterali*. Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 67, 1979, 104-113.
- [7] G. ROMANO - M. ROMANO, *Elastostatics of Structures with Unilateral Conditions on Stress and Displacement Fields*. Proc. II Meeting on Unilateral Problems in Structural Analysis, edited by G. Del Piero and F. Maceri, CISM Courses and Lectures n. 288, Springer-Verlag, 1985.
- [8] G. ROMANO - E. SACCO, *Materiali non Resistenti a Trazione: Equazioni Costitutive e Metodi di Calcolo*. Atti Istituto di Scienza delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria di Napoli, Pubblicazione n. 350, 1984.
- [9] S. DI PASQUALE, *Questioni di Meccanica dei Solidi Non Reagenti a Trazione*. Atti VI Congresso Nazionale AIMETA, Genova Ottobre 1982.

- [10] M. COMO - A. GRIMALDI, *A Unilateral Model for the Limit Analysis of Masonry Walls*. Proc. II Meeting on *Unilateral Problems in Structural Analysis*, edited by G. Del Piero and F. Maceri, CISM Courses and Lectures n. 288, Springer-Verlag, 1985.
- [11] A. BARATTA - B. TOSCANO, *Stati Tensionali in Pannelli di Materiale Non Resistente a Trazione*. Atti VI Congresso Nazionale AIMETA, Genova Ottobre 1982.
- [12] M. GIAQUINTA - E. GIUSTI, *Researches on the Equilibrium of Masonry Structures*. Arch. Rat. Mech. Anal., 88, 1985.
- [13] G. DEL PIERO, *Constitutive Equation and Compatibility of the External Loads for Linear Elastic Masonry-Like Materials*. Atti Istituto di Meccanica Teorica ed Applicata, Università degli Studi di Udine, IMTA/055, 1987.
- [14] G. ROMANO - E. SACCO, *Sul Calcolo di Strutture Non Reagenti a Trazione*. Atti VII Congresso Nazionale AIMETA, Trieste Ottobre 1984.
- [15] C. ALESSANDRI, *Un Modello agli Elementi di Contorno per l'Analisi Statica di Pareti in Muratura*. Atti VIII Congresso Nazionale AIMETA, Torino Ottobre 1986.
- [16] D. ABRUZZESE - A. GRIMALDI - E. SACCO, *Indagine Numerica su Alcuni Problemi di Materiali Non Resistenti a Trazione*. Atti Dipartimento di Ingegneria Civile Edile, Università degli Studi di Roma «Tor Vergata», DICE/14, 1987.
- [17] T. PANZECA - C. POLIZZOTTO, *An Extension of the Hamilton Principle to No-Tension Materials*. Int. J. Mech. Sci., 30, 1988.
- [18] P. VILLAGGIO, *Stress Diffusion in Masonry Walls*. J. Struct. Mech., 9 (4), 1981.
- [19] M. ANGELILLO - L. GILIBERTI, *Statica delle Strutture Murarie*. Giornale del Genio Civile, fasc. 7-8-9, 1988.
- [20] A. M. GENNAI - C. PADOVANI, *Constitutive Equations for Masonry-Like Materials*. III German-Italian Symposium on *the Applications of Mathematics in Industry and Technology*, Siena (18-22/6/1988).
- [21] G. ROMANO - E. SACCO, *Sulla Proprietà di Coassialità del Tensore di Fessurazione*. Atti Istituto di Scienza delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria di Napoli, pubblicazione n. 351, 1984.
- [22] M. ANGELILLO, *Recent Results in the Theory of Elastic No-Tension Materials*. IV Meeting on *Unilateral Problems in Structural Analysis*, Capri (13-16/6/1989), in corso di stampa.
- [23] M. COMO, *On the Equilibrium and Collapse of Masonry Bodies*. IV Meeting on *Unilateral Problems in Structural Analysis*. Capri (13-16/6/1989), in corso di stampa.
- [24] M. GURTIN, *The Linear Theory of Elasticity*. Handbuch der Physik, vol. 2, Springer-Verlag, 1972.
- [25] A. GRIMALDI - E. SACCO, *Energia Complementare e Metodo Penalty Per Problemi Elastici Unilaterali*. Atti IX Congresso Nazionale AIMETA, Bari Ottobre 1988.
- [26] J. NEČAS - I. HLAVÁČEK, *Mathematical Theory of Elastic and Elasto-Plastic Bodies: An Introduction*. Elsevier Scientific Publishing Company, 1981.

Dipartimento di Ingegneria Civile Edile
 II Università degli Studi di Roma - Tor Vergata
 Via O. Raimondo - 00173 ROMA