Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Juan Morales Rodríguez

Sopra i gruppi finiti non supersolubili a sottogruppi normali e quozienti propri supersolubili

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **1** (1990), n.2, p. 93–96.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1990_9_1_2_93_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1990.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 1:93-96 (1990)

Teoria dei gruppi. — *Sopra i gruppi finiti non supersolubili a sottogruppi normali e quozienti propri supersolubili.* Nota di JUAN MORALES RODRÍGUEZ, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

ABSTRACT. — *On finite nonsupersoluble groups in which all proper normal subgroups and proper quotients are supersoluble.* In this paper we study finite non supersoluble groups which have only one normal maximal subgroup and in which every proper normal subgroup and every proper epimorphic image is supersoluble.

KEY WORDS: Finite groups; Supersoluble groups; Normal subgroups; Epimorphic images.

RIASSUNTO. — In questa nota si studiano i gruppi finiti non supersolubili che hanno un solo sottogruppo normale massimale, e per cui ogni sottogruppo normale proprio e ogni immagine epimorfica propria è supersolubile.

1. In [1] ho caratterizzato i gruppi finiti risolubili G che godono delle seguenti proprietà:

a.1 G non è abeliano,

a.2 Ogni sottogruppo normale proprio di G è abeliano,

a.3 Ogni quoziente proprio di G è abeliano,

a.4 G ha solo un sottogruppo normale massimale.

La classe di questi gruppi coincide con la classe dei gruppi finiti tali che:

b.1 G' è l'unico sottogruppo normale proprio di G,

b.2 G' è un q-gruppo abeliano elementare (q-primo),

b.3 $[G:G'] = p$ (p-primo, $p \neq q$).

Si ha da *b*.1 che G' è normale minimale, quindi se G' ha ordine q^n con $n > 1$, G non è supersolubile e pertanto appartiene alla classe dei gruppi finiti risolubili tale che:

i) G non è supersolubile,

ii) Ogni sottogruppo normale proprio di G è supersolubile,

iii) Ogni quoziente proprio di G è supersolubile,

iv) G ha solo un sottogruppo normale massimale.

Notazione: Chiameremo *classe noSS* la classe dei gruppi finiti risolubili che godono delle proprietà i), ii), iii), iv).

In questa nota caratterizziamo la classe noSS e precisamente dimostriamo il seguente

(*) Nella seduta del 18 novembre 1989.

Teorema. Se G appartiene alla classe noSS, allora G ha una catena normale $1 < M \leqslant N < G$ tale che:

(1) M è l'unico sottogruppo normale minimale di G, ed è abeliano elementare d'ordine q^n, con q un numero primo ed $n > 1$,
(2) N è l'unico sottogruppo normale massimale di G, ed è supersolubile,
(3) G/M è supersolubile,
(4) M è il q-sottogruppo di Sylow di G,
(5) N è prodotto semidiretto di M per un q'-gruppo abeliano A, tale che se $A \neq 1$, ogni divisore primo di $|A|$ è minore di q,
(6) $[G:N] = p$, con p un numero primo tale che se $A \neq 1$, p è minore o uguale di ogni divisore primo di $|A|$ e per conseguenza $p < q$.
(7) I p-sottogruppi di Sylow di G sono ciclici.

Inversamente se G ha una catena normale $1 < M \leqslant N < G$, tale che se verifica (1), (2) e (3), allora G appartiene alla classe noSS.

2. Osservazioni

I. Se $A = 1$, si ha che $M = N = G'$ è l'unico sottogruppo normale proprio di G e quindi questa sottoclasse della classe noSS rientra nella classe dei gruppi finiti risolubili non abeliani con ogni sottogruppo normale proprio abeliano e ogni quoziente proprio abeliano.

II. Esempi:

a) Un esempio con $A = 1$ è $G = A_4$, si noti che in questo caso è $p > q$.

b) Un esempio con $A \neq 1$ e G/M ciclico è $G = [M]_\theta C_4$ ove C_4 è il gruppo ciclico d'ordine 4, $M = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ e θ è l'omomorfismo di C_4 in $GL(M)$ che porta il generatore c di C_4 in $\theta(c) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; in questo caso si ha che $A = \{1, c^2\}$ e $p = 2$.

c) Un esempio con $A \neq 1$ e G/M non ciclico è $G = [M]_\theta S_3$ ove $M = \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$ e θ è l'omomorfismo di S_3 in $GL(M)$ che porta $\alpha = (1,2,3)$ in $\theta(\alpha) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $b = (1,2)$ in $\theta(b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; in questo caso si ha che $A = <\alpha>$ e $p = 2$.

3. Dimostrazione del Teorema

Supponiamo che G abbia le proprietà (1), (2) e (3). Allora G *non è supersolubile* perché M è l'unico sottogruppo normale minimale e non è ciclico.

Ogni sottogruppo normale proprio è supersolubile perché N è l'unico sottogruppo normale massimale ed è supersolubile.

Ogni quoziente proprio di G è supersolubile perche se S è un sottogruppo normale proprio non banale di G, allora $M \leqslant S$, e quindi essendo G/S isomorfo a un quoziente di G/M, è supersolubile.

G ha solo un sottogruppo normale massimale per ipotesi.

Quindi G appartiene alla classe noSS.

Adesso supponiamo che G appartenga alla classe noSS e proveremo che G ha le proprietà (1)-(7):

G ha solo un sottogruppo normale minimale M perché se M_1 ed M_2 sono sottogruppi normali minimali di G diversi, allora G/M_1 e G/M_2 sono supersolubili e quindi $G \simeq G/(M_1 \cap M_2)$ è supersolubile contro l'ipotesi. *M, essendo un sottogruppo normale minimale del gruppo risolubile G, è un gruppo abeliano elementare d'ordine q^n, con q numero primo.* Giacché G non è supersolubile e G/M è supersolubile, si ha $n>1$.

Sia N l'unico sottogruppo normale massimale di G. Essendo G risolubile si ha che $[G:N]=p$, *con p numero primo.*

Se $|N| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$, con p_i primi $i = 1, 2, \dots, r$ e $p_1 < p_2 < \dots < p_r$, il p_r sottogruppo di Sylow P di N è normale in N perché N è supersolubile. Poiché P è caratteristico in N ed N normale in G, anche P è normale in G e si ha che $1 < M \leqslant P \leqslant N < G$, perché M è l'unico sottogruppo normale minimale di G. Poiché $|M| = q^n$ e $|P| = p_r^{a_r}$, si ha $q = p_r$, quindi *q è il divisore primo più grande dell'ordine di N.*

N' è nilpotente perché N è supersolubile, quindi ogni sottogruppo di Sylow di N' è caratteristico in N' e quindi normale in G, perché N' è caratteristico in N ed N è normale in G. Poiché P è il q-sottogruppo di Sylow di N ed M è l'unico sottogruppo normale minimale di G, si ha che N' è un q-sottogruppo di N e quindi $N' = 1$ o $M \leqslant N' \leqslant P$. In ogni caso N/P è un q'-gruppo abeliano.

Sia A un q-complemento di N. Allora $N = PA$ con $P \cap A = \langle 1 \rangle$ e quindi $A \simeq N/P$ è abeliano.

Se $A \neq 1$, q è maggiore di ogni divisore primo di $|A|$ perché $p \nmid |N/P|$ e $q = p_r$ è maggiore od uguale ad ogni divisore primo di $|N|$.

Poiché G/P è supersolubile, ed N/P è l'unico sottogruppo normale massimale di G/P e $[G/P : N/P] = [G:\mathrm{N}] = p$, si ha che p è minore od uguale di ogni divisore primo di $|G/P|$ e di ogni divisore primo di $|N/P|$ e per conseguenza *p è minore di q e P risulta essere il q-sottogruppo di Sylow di G* perché $|G| = [G:N]|N| = p\, p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$ e $p \leqslant p_1 < p_2 < \dots < p_r = q$.

Se fosse $\phi(G) \neq 1$, sarebbe $G/\phi(G)$ supersolubile, quindi G supersolubile, contro l'ipotesi. Pertanto è $\phi(G) = 1$. Essendo $P \lhd G$, è $\phi(P) \leqslant \phi(G) = 1$, quindi $\phi(P) = 1$. Ne segue che P, coincidendo con $P/\phi(P)$, è un *q-sottogruppo abeliano elementare.*

Supponiamo che $M < P$ e sia H un q'-sottogruppo di Hall di G. Allora $G = PH$, $P \cap H = \langle 1 \rangle$, $P \lhd G$, e ogni elemento di H induce in P un automorfismo che lascia invariante $M < P$. Poiché $q \nmid |H|$, per il teorema di Maschke, esiste un complemento L di M in P che è lasciato fermo da ogni elemento di H, cioè $P = M \times L$ con $H \leqslant N_G(L)$ e poiché $P \leqslant N_G(L)$ perché P è abeliano, segue che L è normale in $PH = G$ contraddicendo il fatto che M è l'unico sottogruppo normale minimale di G. Quindi $M = P$, cioè *l'unico sottogruppo normale minimale M di G è il q-sottogruppo di Sylow di G.* Ed essendo $N = PA$ con $P \cap A = 1$ e A abeliano, si ha che *N è prodotto semidiretto di M per il q'-gruppo abeliano A.*

Per ultimo proveremo che i p-sottogruppi di Sylow di G sono ciclici. Essendo G/M

supersolubile e $|G/M| = p\, p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r} / p_r^{a_r} = p\, p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_{r-1}^{a_{r-1}}$ con p, $p_j \neq p_r = q$, $j = 1, 2, \ldots, r-1$, se $A \neq 1$ allora $p \leqslant p_1 < p_2 < \ldots < p_{r-1}$ e G/M ha un p-complemento di Sylow normale H/M. Quindi H è un p-complemento di Sylow normale di G. Poiché G ha un solo sottogruppo normale massimale, segue che G/H, essendo un p-gruppo, è ciclico; ma G/H è isomorfo a un p-sottogruppo di Sylow di G, onde i *p-sottogruppi di Sylow di G* sono ciclici. Se $A = 1$, è ovvio che i p-sottogruppi di Sylow di G sono ciclici.

Ricerca eseguita durante l'anno sabatico dell'autore presso l'Istituto Matematico Ulisse Dini della Università di Firenze con l'aiuto economico della D.G.A.P.A. de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Bibliografia

[1] J. Morales Rodríguez, *Sopra alcune classi di gruppi minimali non-P.* Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 76, fasc. 6, 1984, 334-338.

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias - Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad Universitaria - 04510 México D.F. (Messico).