Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Claudia Comi, Alberto Corigliano

Estensione di un teorema sull'adattamento in dinamica elasto-plastica

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **1** (1990), n.2, p. 151–159.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1990_9_1_2_151_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1990.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 1:151-159 (1990)

Meccanica dei solidi. — *Estensione di un teorema sull'adattamento in dinamica elasto-plastica.* Nota di CLAUDIA COMI e ALBERTO CORIGLIANO, presentata (*) dal Corrisp. G. MAIER.

ABSTRACT. — *An extension of a shakedown theorem in elastic-plastic dynamics.* Shakedown analysis in elastic-plastic dynamics is dealt with here on the following basis: a quite general constitutive model for the material behaviour is adopted, the model is based on an internal variables formulation which allows for a general nonlinear hardening law; discrete structural models described in terms of generalized variables are referred to. The contributions presented are as follows: some preliminary earlier results are extended to the general elastic-plastic model considered; a necessary and sufficient condition for shakedown is presented; a discussion on the determination of the safety factor concludes the paper.

KEY WORDS: Dynamic; Elastic plastic; Shakedown; Nonlinear programming.

RIASSUNTO. — Nell'articolo si tratta il problema dell'adattamento in dinamica elasto-plastica. La trattazione è fondata sulle seguenti basi: si adotta un legame costitutivo elasto-plastico di notevole generalità, basato su di una formulazione a variabili interne in grado di descrivere un comportamento incrudente genericamente non lineare; si fa riferimento ad un modello strutturale discreto, descritto mediante variabili generalizzate. I contributi presentati si possono così riassumere: si estendono risultati precedentemente ottenuti da Altri al caso del legame costitutivo elasto-plastico più generale qui considerato; si dimostra in questo ambito una condizione necessaria e sufficiente per l'adattamento; da ultimo si discutono le difficoltà computazionali relative al calcolo del fattore di sicurezza rispetto al mancato adattamento.

1. INTRODUZIONE

Nell'ambito dello studio dinamico di strutture in fase elasto-plastica, la teoria dell'adattamento (*shakedown*) rappresenta un settore di notevole interesse teorico ed applicativo. Tale teoria, della quale si può trovare un inquadramento nelle sintesi di König-Maier [1] e, più recentemente, di König [2], fornisce utili strumenti per la valutazione del grado di sicurezza di strutture soggette a carichi variabili ripetuti. La teoria dell'adattamento, insieme all'analisi limite ed alle tecniche di delimitazione a priori, si pone come efficace alternativa alle analisi evolutive passo-passo. L'onere computazionale derivante dall'esecuzione di una completa analisi evolutiva viene sostituito con quello dovuto alla soluzione di uno o più problemi di programmazione matematica.

Le origini della teoria sull'adattamento in dinamica elasto-plastica si possono individuare nei lavori di Ceradini [3,4] e di Corradi-Maier [5,6], estensioni rispettivamente dei contributi di Bleich-Melan e di Koiter-Neal-Symonds validi in assenza di effetti dinamici. Sviluppi successivi della teoria ed un'impostazione più generale si possono individuare nei lavori di Polizzotto [7,8] e di altri Autori. Inizialmente sviluppati con riferimento ad un materiale elastico-perfettamente plastico e con incrudimento lineare, i teoremi sull'adattamento dinamico sono stati recentemente estesi al caso di un legame costitutivo elasto-plastico incrudente, con incrudimento non

(*) Nella seduta del 10 febbraio 1990.

lineare [9, 10]. In questa nota si estendono i risultati di Maier-Novati [9] e di Comi *et al.* [10] ad una classe più generale di modelli costitutivi, descritta ad esempio in [11] e [12], e caratterizzata da due vettori di variabili interne duali, derivanti da un potenziale termodinamico. Con tali modelli costitutivi si può rappresentare il comportamento di una vasta categoria di materiali elasto-plastici stabili con incrudimento non lineare.

NOTAZIONE. Si adotta la notazione matriciale indicando matrici e vettori in grassetto. Una t indica trasposizione ed un punto $\dot{}$ derivazione rispetto al tempo.

2. UNA CLASSE DI MODELLI COSTITUTIVI A VARIABILI INTERNE

Il modello costitutivo adottato è definito dalle seguenti relazioni:

(1) $$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{e} + \boldsymbol{p}$$

(2*a, b*) $$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial U(\boldsymbol{e})}{\partial \boldsymbol{e}}; \qquad \boldsymbol{\chi} = \frac{\partial W(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}}$$

(3*a, b*) $$\dot{\boldsymbol{p}} = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^t}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi})\, \dot{\boldsymbol{\lambda}}; \qquad \dot{\boldsymbol{\eta}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\psi}^t}{\partial \boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi})\, \dot{\boldsymbol{\lambda}}$$

(4*a, b, c*) $$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) \leqslant \mathbf{0}; \qquad \dot{\boldsymbol{\lambda}} \geqslant \mathbf{0}; \qquad \boldsymbol{\phi}^t \dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0$$

(5*a, b*) $$\dot{D} = \boldsymbol{\sigma}^t \dot{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{\chi}^t \dot{\boldsymbol{\eta}} \geqslant 0 .$$

La (1) postula l'additività di deformazioni elastiche $\boldsymbol{e}$ e plastiche $\boldsymbol{p}$. Le equazioni (2*a, b*) definiscono gli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$ e le variabili interne statiche $\boldsymbol{\chi}$ come gradienti di potenziali delle quantità cinematiche corrispondenti (deformazioni elastiche $\boldsymbol{e}$ e variabili interne cinematiche $\boldsymbol{\eta}$, rispettivamente). In esse $U(\boldsymbol{e})$ rappresenta la densità di energia di deformazione elastica, $W(\boldsymbol{\eta})$ rappresenta la densità di energia di deformazione immagazzinata a causa di processi irreversibili avvenuti all'interno del materiale.

Le (3) definiscono le leggi evolutive delle variabili $\boldsymbol{p}$ ed $\boldsymbol{\eta}$, dipendenti dai gradienti dei potenziali plastici ψ_i e dai moltiplicatori plastici λ_i, variabili scalari non decrescenti secondo la relazione (4*b*). Il dominio elastico corrente è definito dalla (4*a*) che, insieme alle (4*b*) e (4*c*), individua la condizione di «carico» e «scarico». L'equazione (5*a*) definisce la dissipazione $\dot{D}$ come differenza tra lavoro plastico incrementale ed energia di deformazione immagazzinata incrementale; la diseguaglianza (5*b*) traduce in questo ambito il secondo principio della termodinamica [12]. È opportuno osservare che le funzioni di snervamento ϕ_i possono essere espresse, senza perdita di generalità, come differenza tra una funzione positivamente omogenea del primo ordine f_i ed una costante Y_i (limite di snervamento). Pertanto, per il teorema di Eulero si può scrivere:

(6) $$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^t}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi})\, \boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{\chi}^t}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi})\, \boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{Y}.$$

Mediante questo modello si possono rappresentare comportamenti incrudenti genericamente non lineari, ad esempio di tipo isotropo o cinematico, interpretando opportunamente le variabili interne (cfr. [12]).

Si assumono alcune restrizioni sul legame costitutivo, riconducibili ad un'ipotesi di stabilità secondo Drucker.

(*a*) I potenziali plastici ψ_i coincidono con le funzioni di snervamento ϕ_i; il legame costitutivo è cioè «associato».

(*b*) Le funzioni di snervamento sono differenziabili e convesse negli sforzi e nelle variabili interne (i simboli con apice e senza apice si riferiscono a punti generici nello spazio $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}$):

$$\phi_i(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\chi}) - \phi_i(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\chi}') \geqslant \frac{\partial \phi_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}^t}(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\chi}')\cdot(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}') + \frac{\partial \phi_i}{\partial \boldsymbol{\chi}^t}(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\chi}')\cdot(\boldsymbol{\chi}-\boldsymbol{\chi}')\,. \tag{7}$$

(*c*) Il potenziale $W(\boldsymbol{\eta})$ è funzione differenziabile e convessa:

$$W(\boldsymbol{\eta}) - W(\boldsymbol{\eta}') \geqslant \boldsymbol{\chi}'^t\cdot(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}')\,. \tag{8}$$

(*d*) Il potenziale $U(\boldsymbol{e})$ è una funzione quadratica:

$$U(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}^t \boldsymbol{E}\boldsymbol{e}/2\,; \qquad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{e}\,, \tag{9a, b}$$

dove $\boldsymbol{E}$ rappresenta la matrice dei moduli elastici, simmetrica e definita positiva.

Si considera nel seguito una versione del legame costitutivo in variabili generalizzate adatta per il problema discretizzato ad esempio mediante elementi finiti. Si definiscono le variabili generalizzate di elemento finito ($\overline{\boldsymbol{\sigma}}$, $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\overline{\boldsymbol{\chi}}$, $\overline{\boldsymbol{\eta}}$, $\overline{\boldsymbol{\phi}}$, $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$) che governano i campi corrispondenti mediante interpolazione. Ad esempio, per gli sforzi e le deformazioni si pone:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{N}_\sigma(\boldsymbol{x})\,\overline{\boldsymbol{\sigma}}\,; \qquad \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{N}_\varepsilon(\boldsymbol{x})\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{10a, b}$$

con $\boldsymbol{N}_\sigma(\boldsymbol{x})$ ed $\boldsymbol{N}_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ matrici di funzioni di interpolazione.

Si impone poi un'eguaglianza di tipo energetico per il prodotto scalare di variabili generalizzate duali ($\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ ed $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\overline{\boldsymbol{\chi}}$ ed $\overline{\boldsymbol{\eta}}$, $\overline{\boldsymbol{\phi}}$ e $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$) nella forma:

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}^t\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \int_V \boldsymbol{\sigma}^t(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})\,dV\,. \tag{11}$$

Da questa relazione, e da analoghe per le altre coppie di variabili, si deducono delle condizioni sulla modellazione ed un legame tra le funzioni $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x})$ assunte per coppie di variabili duali. Questo consente di conservare per il discreto alcune significative proprietà del continuo (in particolare la simmetria di alcune matrici). Si riporta qui solamente il legame costitutivo per il solido discretizzato, legame espresso mediante variabili generalizzate, dedotto da quello puntuale mediante modellazioni del tipo (10) e loro «inverse» e assumendo le ipotesi (*a*)-(*d*) prima enunciate:

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overline{\boldsymbol{e}} + \overline{\boldsymbol{p}}\,; \qquad \overline{\boldsymbol{\sigma}} = \overline{\boldsymbol{E}}\,\overline{\boldsymbol{e}}\,; \qquad \overline{\boldsymbol{\chi}} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{\boldsymbol{\eta}}}(\overline{\boldsymbol{\eta}}) \tag{12a, b, c}$$

$$\dot{\overline{\boldsymbol{p}}} = \frac{\partial \overline{\boldsymbol{\phi}}^t}{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}}}(\overline{\boldsymbol{\sigma}},\overline{\boldsymbol{\chi}})\,\dot{\overline{\boldsymbol{\lambda}}}\,; \qquad \dot{\overline{\boldsymbol{\eta}}} = -\frac{\partial \overline{\boldsymbol{\phi}}^t}{\partial \overline{\boldsymbol{\chi}}}(\overline{\boldsymbol{\sigma}},\overline{\boldsymbol{\chi}})\,\dot{\overline{\boldsymbol{\lambda}}} \tag{13a, b}$$

$$\overline{\boldsymbol{\phi}} = \overline{\boldsymbol{\phi}}(\overline{\boldsymbol{\sigma}},\overline{\boldsymbol{\chi}}) \leqslant \boldsymbol{0}\,; \qquad \dot{\overline{\boldsymbol{\lambda}}} \geqslant \boldsymbol{0}\,; \qquad \overline{\boldsymbol{\phi}}^t\,\dot{\overline{\boldsymbol{\lambda}}} = 0\,. \tag{14a, b, c}$$

Per approfondimenti riguardanti lo studio del problema elasto-plastico mediante l'uso di variabili generalizzate si rinvia a [13, 14].

Nel seguito, per semplicità di notazione, si ometteranno i soprasegni, intendendo sempre riferirsi al solido discretizzato per elementi finiti.

3. Problema strutturale dinamico: risposta reale e fittizia

Si considera una struttura discretizzata, soggetta a carichi variabili nel tempo $\boldsymbol{P}(t)$. La risposta dinamica della struttura è governata dalle relazioni (12)-(14) del legame costitutivo e dalle equazioni:

$$\boldsymbol{C}^t \boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{P}(t) - \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{V}\dot{\boldsymbol{u}}(t) \tag{15}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0\,; \qquad \dot{\boldsymbol{u}}(0) = \dot{\boldsymbol{u}}_0 \tag{16a, b}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{u}(t)\,. \tag{17}$$

L'equazione (15) esprime l'equilibrio dinamico della struttura. Con $\boldsymbol{u}$ si è indicato il vettore di spostamenti nodali, coordinate libere del sistema; $\boldsymbol{M}$ indica la matrice delle inerzie e $\boldsymbol{V}$ quella degli smorzamenti di natura viscosa. Le (16) assegnano le condizioni iniziali; l'equazione (17) esprime la compatibilità del sistema nell'ipotesi di piccole deformazioni (linearità geometrica), $\boldsymbol{C}$ è la matrice di congruenza.

La risposta del sistema, in termini di sforzo $\boldsymbol{\sigma}(t)$, può essere interpretata come somma di due quantità:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}^E(t) + \boldsymbol{\sigma}^p(t)\,. \tag{18}$$

In questa relazione $\boldsymbol{\sigma}^p(t)$ rappresenta la risposta statica alle deformazioni plastiche $\boldsymbol{p}(t)$, interpretate come distorsioni variabili nel tempo; tale risposta può essere espressa in funzione delle deformazioni plastiche mediante una matrice $\boldsymbol{Z}$, costante, semidefinita negativa, dipendente solo dalla rigidezza elastica e dalla geometria del sistema:

$$\boldsymbol{\sigma}^p(t) = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{p}(t)\,; \qquad \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}^t\boldsymbol{E}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{C}^t\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\,. \tag{19a, b}$$

Lo sforzo $\boldsymbol{\sigma}^E(t)$ è definito dalla relazione (18) stessa e dipende sia dalla risposta elasto-dinamica della struttura ai carichi esterni ed alle condizioni iniziali assegnate, sia dall'effetto dinamico delle deformazioni plastiche. Si osserva che in assenza di effetti dinamici il termine $\boldsymbol{\sigma}^E(t)$ viene a coincidere con la risposta elastica ai carichi esterni.

Per la deduzione di quanto segue, si considera una risposta fittizia $\boldsymbol{\sigma}^*(t)$ espressa nella seguente forma:

$$\boldsymbol{\sigma}^*(t) = \boldsymbol{\sigma}^{*E}(t) + \boldsymbol{\sigma}^{*p} = \boldsymbol{\sigma}^{*E}(t) + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{p}^* \tag{20a, b}$$

dove $\boldsymbol{\sigma}^{*E}(t)$ rappresenta la risposta elasto-dinamica della struttura ottenuta assoggettando il sistema ai carichi reali $\boldsymbol{P}(t)$ ed a condizioni iniziali fittizie:

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0^*\,; \qquad \dot{\boldsymbol{u}}(0) = \dot{\boldsymbol{u}}_0^* \tag{21a, b}$$

e $\boldsymbol{\sigma}^{*p}$ rappresenta la risposta elastica, statica derivante dall'applicazione di distorsioni costanti $\boldsymbol{p}^*$.

4. Diseguaglianza centrale

Assumendo la validità delle ipotesi (*a*)-(*d*) sul legame costitutivo e trascurando lo smorzamento, dal confronto tra la risposta reale e fittizia si deduce la seguente proposizione.

Proposizione 1. Se esistono dei sistemi fittizi di deformazioni plastiche costanti $\boldsymbol{p}^*$, variabili interne costanti $\boldsymbol{\chi}^*$ (o $\boldsymbol{\eta}^*$ essendo le variabili interne legate dalla relazione (12*c*)), condizioni iniziali $\boldsymbol{u}_0^*$, $\dot{\boldsymbol{u}}_0^*$ ed un vettore di costanti arbitrarie $\boldsymbol{\beta}$ tali che:

$$\boldsymbol{\phi}^* + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\sigma}^{*E}(\tau) + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{\chi}^*) + \boldsymbol{\beta} \leqslant \boldsymbol{0} \qquad \forall \tau \in \overline{0 \quad t} \tag{22a, b}$$

risulta:

$$\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{\lambda}(t) \leqslant [\mathcal{E}(\Delta\boldsymbol{\sigma}^E) + \mathcal{K}(\Delta\dot{\boldsymbol{u}})]_0 - \boldsymbol{p}^{*t}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{p}^*/2 - W(\boldsymbol{\eta}^*) + \boldsymbol{\chi}^{*t}\boldsymbol{\eta}^*, \tag{23}$$

dove con Δ si è indicata la differenza tra corrispondenti quantità del processo reale e fittizio, con $\mathcal{E}$ l'energia elastica e con $\mathcal{K}$ l'energia cinetica:

$$[\mathcal{E}(\Delta\boldsymbol{\sigma}^E)]_t = \Delta\boldsymbol{\sigma}^{E^t}(t)\,\boldsymbol{E}^{-1}\Delta\boldsymbol{\sigma}^E(t)/2\,; \qquad [\mathcal{K}(\Delta\dot{\boldsymbol{u}})]_t = \Delta\dot{\boldsymbol{u}}^t(t)\,\boldsymbol{M}\Delta\dot{\boldsymbol{u}}(t)/2\,. \tag{24a, b}$$

Dimostrazione. In base all'ipotesi (22) ed alla relazione di complementarietà (14*c*), si ha:

$$\boldsymbol{\beta}^t \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) \leqslant (\boldsymbol{\phi}(t) - \boldsymbol{\phi}^*(t))^t \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)\,. \tag{25}$$

Il secondo membro può essere trasformato sfruttando la relazione di convessità (7) e la legge di scorrimento delle variabili $\boldsymbol{p}$ ed $\boldsymbol{\eta}$ e, successivamente, ricordando la definizione (20) di $\boldsymbol{\sigma}^*$ e la interpretazione (18)-(19) data a $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}^*)^t \dot{\boldsymbol{\lambda}} &\leqslant (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)^t \dot{\boldsymbol{p}} - (\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\chi}^*)^t \dot{\boldsymbol{\eta}} = \\ &= (\boldsymbol{\sigma}^E - \boldsymbol{\sigma}^{*E})^t \dot{\boldsymbol{p}} + (\boldsymbol{Z}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{p}^*)^t \dot{\boldsymbol{p}} - (\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\chi}^*)^t \dot{\boldsymbol{\eta}}\,.\end{aligned} \tag{26a, b}$$

Essendo $\Delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \Delta\dot{\boldsymbol{e}} + \Delta\dot{\boldsymbol{p}}$ congruenti con $\Delta\dot{\boldsymbol{u}}$ e $(\boldsymbol{\sigma}^E - \boldsymbol{\sigma}^{*E})$ in equilibrio con $-\boldsymbol{M}\Delta\ddot{\boldsymbol{u}}$ (avendo trascurato lo smorzamento), il principio dei lavori virtuali permette di scrivere l'eguaglianza seguente:

$$(\boldsymbol{\sigma}^E - \boldsymbol{\sigma}^{E*})^t \Delta\dot{\boldsymbol{p}} = -(\boldsymbol{\sigma}^E - \boldsymbol{\sigma}^{*E})^t \Delta\dot{\boldsymbol{e}} - (\boldsymbol{M}\Delta\ddot{\boldsymbol{u}})^t \Delta\dot{\boldsymbol{u}}\,. \tag{27}$$

Sostituendo l'equazione (27) nella relazione (26), osservando che $\Delta\dot{\boldsymbol{p}} = \dot{\boldsymbol{p}}$ ($\boldsymbol{p}^*$ costante) ed integrando la (25) tra 0 e t si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_0^t \boldsymbol{\beta}^t \dot{\boldsymbol{\lambda}}(\tau)\,d\tau &\leqslant \int_0^t -(\boldsymbol{\sigma}^E - \boldsymbol{\sigma}^{*E})^t \Delta\dot{\boldsymbol{e}}\,d\tau + \int_0^t -\Delta\dot{\boldsymbol{u}}^t \boldsymbol{M}\Delta\ddot{\boldsymbol{u}}\,d\tau + \\ &+ \int_0^t \Delta\boldsymbol{p}^t \boldsymbol{Z}\Delta\dot{\boldsymbol{p}}\,d\tau + \int_0^t -(\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\chi}^*)^t \dot{\boldsymbol{\eta}}\,d\tau\,.\end{aligned} \tag{28}$$

Gli integrali che compaiono a secondo membro nella disequazione (28) possono essere maggiorati utilizzando il principio dei lavori virtuali ed essendo l'energia elastica e cinetica positive, la matrice $\boldsymbol{Z}$ semidefinita negativa ed il potenziale $W(\boldsymbol{\eta})$ convesso; si ottiene per ciascun integrale:

(29*a, b, c*) $$\int_0^t -\Delta\boldsymbol{\sigma}^{E^t}\Delta\dot{\boldsymbol{e}}\,d\tau = \int_0^t -\Delta\boldsymbol{\sigma}^{E^t}\boldsymbol{E}^{-1}\Delta\dot{\boldsymbol{\sigma}}^E\,d\tau = [\mathcal{E}(\Delta\boldsymbol{\sigma}^E)]_0 - [\mathcal{E}(\Delta\boldsymbol{\sigma}^E)]_t \leqslant [\mathcal{E}(\Delta\boldsymbol{\sigma}^E)]_0$$

(30*a, b*) $$\int_0^t -\Delta\dot{\boldsymbol{u}}^t\boldsymbol{M}\Delta\ddot{\boldsymbol{u}}\,d\tau = [\mathcal{K}(\Delta\dot{\boldsymbol{u}})]_0 - [\mathcal{K}(\Delta\dot{\boldsymbol{u}})]_t \leqslant [\mathcal{K}(\Delta\dot{\boldsymbol{u}})]_0$$

(31*a, b*) $$\int_0^t \Delta\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{Z}\Delta\dot{\boldsymbol{p}}\,d\tau = [\Delta\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{Z}\Delta\boldsymbol{p}/2]_t - [\Delta\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{Z}\Delta\boldsymbol{p}/2]_0 \leqslant -[\Delta\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{Z}\Delta\boldsymbol{p}/2]_0$$

(32*a, b*) $$\int_0^t -(\boldsymbol{\chi}-\boldsymbol{\chi}^*)^t\,\dot{\boldsymbol{\eta}}\,d\tau = [W(\boldsymbol{\eta})]_0 - [W(\boldsymbol{\eta})]_t + \boldsymbol{\chi}^{*t}\boldsymbol{\eta}(t) - \boldsymbol{\chi}^{*t}\boldsymbol{\eta}(0) \leqslant$$
$$\leqslant [W(\boldsymbol{\eta})]_0 - \boldsymbol{\chi}^{*t}\boldsymbol{\eta}(0) - W(\boldsymbol{\eta}^*) + \boldsymbol{\chi}^{*t}\boldsymbol{\eta}^*.$$

Sostituendo le diseguaglianze (29)-(32) nella (28) ed assumendo $\boldsymbol{\lambda}(0)$, $\boldsymbol{\eta}(0)$, $\boldsymbol{p}(0)$, $W(0)$ nulli si ricava la diseguaglianza:

(33*a, b*) $$\int_0^t \boldsymbol{\beta}^t\,\dot{\boldsymbol{\lambda}}(\tau)\,d\tau = \boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\lambda}(t) \leqslant [\mathcal{E}+\mathcal{K}]_0 - \boldsymbol{p}^{*t}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{p}^*/2 - W(\boldsymbol{\eta}^*) + \boldsymbol{\chi}^{*t}\boldsymbol{\eta}^*$$

che coincide con la (23).

5. Teoremi di adattamento

Con il termine adattamento (*shakedown*) si intende il verificarsi di una situazione in cui, dopo sviluppo di deformazioni plastiche, la struttura si comporta elasticamente. Nell'ambito dei modelli qui considerati il cessare di fenomeni irreversibili è assicurato dalla limitatezza nel tempo dei moltiplicatori plastici

(34) $$\boldsymbol{\lambda}_\infty = \lim_{t\to\infty}\boldsymbol{\lambda}(t) < +\infty\,.$$

La condizione (34) assicura la limitatezza nel tempo dell'integrale della dissipazione definita dalla relazione (5*a*). Vale infatti la seguente catena di uguaglianze ottenute tenendo conto delle (13), (6) e (14*c*):

(35) $$D(t) = \int_0^t (\boldsymbol{\sigma}^t\dot{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{\chi}^t\,\dot{\boldsymbol{\eta}})\,d\tau = \int_0^t \boldsymbol{f}^t(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\chi})\,\dot{\boldsymbol{\lambda}}\,d\tau = \boldsymbol{Y}^t\boldsymbol{\lambda}(t)\,.$$

Assumendo quindi tale condizione come caratterizzante l'adattamento, nel rispetto delle ipotesi (*a*)-(*d*) sul legame costitutivo, si possono dimostrare le seguenti proposizioni, rispettivamente condizione sufficiente e necessaria per lo *shakedown*.

Proposizione 2. Se è possibile trovare un insieme di variabili fittizie $\boldsymbol{u}_0^*$, $\dot{\boldsymbol{u}}_0^*$, $\boldsymbol{p}^*$, $\boldsymbol{\chi}^*$ tali che risulti per ogni $\tau \geqslant 0$

(36) $$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\sigma}^{*E}(\tau) + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{\chi}^*) < \mathbf{0}$$

si ha adattamento in campo elastico.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione discende immediatamente dalla proposizione 1. L'ipotesi espressa dalla relazione (36) coincide con la condizione di validità della proposizione 1, assumendo $\boldsymbol{\beta} > \mathbf{0}$ e $t \rightarrow \infty$; è valida pertanto la diseguaglianza (23) che impone un confine superiore finito indipendente dal tempo ad una combinazione lineare $\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{\lambda}(t)$ dei moltiplicatori plastici. Essendo le componenti di $\boldsymbol{\beta}$ tutte positive e quelle di $\boldsymbol{\lambda}(t)$ non negative, ciò assicura la validità della relazione (34) e quindi il verificarsi di adattamento plastico.

PROPOSIZIONE 3. Se una struttura soggetta ad una certa storia di carico presenta adattamento, esiste un insieme di variabili fittizie $\boldsymbol{u}_0^*$, $\dot{\boldsymbol{u}}_0^*$, $\boldsymbol{p}^*$, $\boldsymbol{\chi}^*$ che soddisfa per ogni $\tau \geqslant \bar{t}$ la relazione:

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\sigma}^{*E}(\tau) + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{\chi}^*) \leqslant \mathbf{0}\,. \tag{37}$$

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi si ha adattamento; quindi, da un certo istante t^* in poi, le deformazioni plastiche cessano di svilupparsi. Si assumano come $\boldsymbol{p}^*$ e $\boldsymbol{\chi}^*$ i vettori di deformazioni plastiche e variabili interne statiche corrispondenti all'istante t^* e si identifichi $\bar{t}$ con t^*. Si consideri una risposta elasto-dinamica fittizia coincidente con la risposta reale del sistema per $\tau > t^*$: essa risulta univocamente definita per $\tau \geqslant 0$ e pertanto individua univocamente le condizioni iniziali fittizie.

6. FATTORE DI SICUREZZA RISPETTO ALL'INADATTAMENTO

Si definisce come fattore di carico α uno scalare non negativo che moltiplica tutte le azioni esterne assegnate $\boldsymbol{P}(t)$ e le condizioni iniziali $\boldsymbol{u}_0$, $\dot{\boldsymbol{u}}_0$. Il fattore di sicurezza α_s rappresenta il massimo valore del fattore di carico tale che si abbia *shakedown*. In base alla condizione necessaria e sufficiente di adattamento (proposizioni 2 e 3) il fattore α_s si può determinare risolvendo il seguente problema di massimo vincolato:

$$\alpha_s = \max_{\alpha, \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{\chi}^*, \boldsymbol{u}_0^*, \dot{\boldsymbol{u}}_0^*, \bar{t}} \{\alpha\} \tag{38a}$$

con i vincoli:

$$\boldsymbol{\phi}(\alpha\boldsymbol{\sigma}^{*E}(\tau) + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{\chi}^*) \leqslant \mathbf{0} \qquad \forall \tau \geqslant \bar{t}\,. \tag{38b}$$

L'ottimizzazione rispetto alle condizioni iniziali fittizie $\boldsymbol{u}_0^*$, $\dot{\boldsymbol{u}}_0^*$ ed a $\bar{t}$, richiederebbe in generale la conoscenza dell'espressione:

$$\boldsymbol{\sigma}^{*E}(\tau) = \boldsymbol{\sigma}^{E}(\boldsymbol{u}_0^*, \dot{\boldsymbol{u}}_0^*, \bar{t}; \tau)\,. \tag{39}$$

Tale espressione è nota solo in casi particolari. Per semplificare la soluzione del problema (38) si possono assegnare a priori le condizioni iniziali fittizie, ad esempio assumendole uguali a quelle reali (cfr. [9]), ottenendo un confine inferiore ad α_s.

Fissate le condizioni iniziali fittizie, la risposta $\boldsymbol{\sigma}^{*E}$ risulta essere funzione nota del tempo. Per rendere praticamente risolubile il problema (38) si deve eliminare dai vincoli la dipendenza dal tempo. A tal fine si considerano i valori massimi M_i e minimi m_i al variare di t di ogni componente $\sigma_i^{*E}(t)$:

$$m_i \leqslant \sigma_i^{*E}(t) \leqslant M_i \qquad \forall t\,. \tag{40a, b}$$

Queste diseguaglianze definiscono nello spazio degli sforzi generalizzati $\sigma_i^{*E}(t)$ un dominio convesso Ω (iper-parallelepipedo). Si dimostra, sfruttando la convessità delle ϕ_i e del dominio Ω, che la diseguaglianza (38*b*) è verificata $\forall t$ se si impone il rispetto della stessa negli n vertici di Ω. Questo procedimento porta alla scrittura di n disequazioni per ciascuna delle componenti di $\boldsymbol{\phi}$ (vettore di grandezze generalizzate). Il numero n di vertici del dominio Ω dipende a sua volta dal numero di componenti di sforzo $\boldsymbol{\sigma}$ che compaiono in ciascuna ϕ_i. Con scelte opportune delle variabili generalizzate e della modellazione (cfr. [13]) tale numero può essere considerevolmente ridotto.

Mediante l'eliminazione del tempo dai vincoli si ottiene un problema di programmazione non lineare convesso.

7. Osservazioni conclusive

In questa nota si è studiato il problema dello *shakedown* dinamico ottenendo delle condizioni di adattamento di validità generale che racchiudono in una forma unificata vari risultati precedenti sullo stesso argomento.

Si è considerata un'ampia classe di modelli costitutivi elasto-plastici a variabili interne. Con alcune ipotesi restrittive, riconducibili al rispetto del postulato di Drucker, si sono ottenute una condizione sufficiente ed una necessaria per l'adattamento. La trattazione è stata svolta con riferimento ad un continuo discretizzato, descritto mediante variabili generalizzate.

Alcuni precedenti risultati in tema di adattamento in dinamica elasto-plastica si possono ottenere mediante specializzazione a partire da quelli presentati in questo lavoro. Ad esempio, nel caso di materiale elastico-perfettamente plastico, si può ottenere dalla proposizione 2 il teorema di Ceradini (in una versione relativa ad un continuo discretizzato). Nel caso di funzione di snervamento lineare a tratti, con incrudimento unicamente di tipo isotropo non lineare, ci si riconduce al caso trattato in [9]. Se anche la legge di incrudimento viene linearizzata, il problema di programmazione non lineare (37) si riduce ad un problema di programmazione lineare.

I risultati esposti, in particolare la proposizione 1, possono essere utilizzati per l'ottenimento di delimitazioni superiori a funzioni lineari delle variabili $\boldsymbol{\lambda}$ (cfr. [9]). Nei casi particolari citati, nei quali la funzione di snervamento è lineare a tratti, tra le funzioni lineari delle variabili $\boldsymbol{\lambda}$ sono comprese quantità di notevole interesse tecnico, come deformazioni plastiche e spostamenti residui. Ciò non sussiste nel presente, più generale, contesto dato che tali quantità non dipendono più soltanto dalle variabili $\boldsymbol{\lambda}$. L'ottenimento di delimitazioni superiori significative (*bounds*) anche nel presente contesto appare pertanto argomento di ulteriore studio.

L'approccio duale, cinematico, al problema dello *shakedown* dinamico, già affrontato da Corradi-Maier in [5,6] e da Polizzotto in [8], fornisce un criterio per il mancato adattamento ed un metodo duale a quello presentato per la determinazione del fattore di sicurezza. L'estensione di questi risultati all'ampia classe di modelli costitutivi qui adottata sarà oggetto di un lavoro parallelo.

Il secondo autore ringrazia la Fondazione Confalonieri per una borsa di studio a supporto dell'attività di ricerca.

Bibliografia

[1] J. A. König - G. Maier, *Shakedown analysis of elastoplastic structures: a review of recent developments.* Nuclear Engineering Design, vol. 66, 1981, 81-95.

[2] J. A. König, *Shakedown of elastic-plastic structures.* Elsevier, Amsterdam 1987.

[3] G. Ceradini, *Sull'adattamento dei corpi elastoplastici soggetti ad azioni dinamiche.* Giornale del Genio Civile, n. 415, 1969, 239-258.

[4] G. Ceradini, *Dynamic shakedown in elastic plastic bodies.* J. Engng. Mech. Div., Proc. ASCE, vol. 106, n. EM3, 1980, 481-499.

[5] L. Corradi - G. Maier, *Inadaptation theorems in the dynamics of elastic-workhardening structures.* Ingenieur Archiv., vol. 43, 1973, 44-57.

[6] L. Corradi - G. Maier, *Dynamic non-shakedown theorem for elastic perfectly-plastic continua.* J. of Mech. and Physics of Solids, vol. 22, 1974, 401-413.

[7] C. Polizzotto, *A unified treatment of shakedown theory and related bounding techniques.* S. M. Archives, vol. 7, 1982, 19-75.

[8] C. Polizzotto, *Dynamic shakedown by modal analysis.* Meccanica, vol. 19, 1984, 133-144.

[9] G. Maier - G. Novati, *Dynamic shakedown and bounding theory for a class of nonlinear hardening discrete structural models.* Int. J. of Plasticity, in corso di stampa.

[10] C. Comi - A. Corigliano - G. Maier, *Delimitazioni nell'adattamento dinamico e teoremi di estremo per passo finito olonomo in elastoplasticità con incrudimenti non lineari cinematico ed isotropo.* Omaggio a Giulio Ceradini, Università di Roma «La Sapienza», 1988, 237-248.

[11] B. Halphen - Q. S. Nguyen, *Sur les matériaux standards généralisés.* J. de Mécanique, vol. 14, n. 1, 1975, 39-63.

[12] J. Lemaitre - J. L. Chaboche, *Mécanique des matériaux solides.* Dunod, Paris 1985.

[13] C. Comi - G. Maier - U. Perego, *Generalized variables, time integration and extremum theorems in elastoplasticity with internal variables.* In preparazione.

[14] L. Corradi, *On compatible finite element models for elastic plastic analysis.* Meccanica, vol. 13, 1978, 133-150.

Dipartimento di Ingegneria Strutturale
Politecnico di Milano
Piazza L. da Vinci, 32 - 20133 Milano