Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Jean-Pierre Vigué

Une remarque sur l'hyperbolicité injective

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **83** (1989), n.1, p. 57–61.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1989_8_83_1_57_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1989.

Atti. Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXIII (1989), pp. 57-61

Analisi matematica. — *Une remarque sur l'hyperbolicité injective.* Nota (*) di JEAN-PIERRE VIGUÉ (**), presentata dal Socio E. VESENTINI.

ABSTRACT. — *A remark about injective hyperbolicity.* In this Note, I prove that, in many cases, the injective Kobayashi pseudodistance, as defined by Hahn, is equal to the Kobayashi pseudodistance.

KEY WORDS: Intrinsic pseudodistances; Kobayashi pseudodistance; Injective Kobayashi pseudodistance; Injective hyperbolicity.

RIASSUNTO. — *Una nota sull'iperbolicità iniettiva.* In questa Nota viene dimostrato che, in diversi casi, la pseudodistanza iniettiva di Kobayashi definita da Hahn coincide con la pseudodistanza di Kobayashi.

1. INTRODUCTION ET DÉFINITIONS

Soit D un domaine d'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé E. Dans [2], K. Hahn définit, à la manière de Kobayashi, et en utilisant les applications holomorphes injectives du disque-unité Δ dans D, une pseudo-distance h_D sur D qui est contractante pour les applications holomorphes injectives.

Plus précisément, étant donnés deux points x et y de D, une chaîne analytique injective entre x et y est formée des données suivantes: un entier positif n, $(n+1)$ points $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ du disque-unité ouvert Δ, n fonctions holomorphes *injectives* $\varphi_j : \Delta \to D$ $(j = 1, \ldots, n)$ telles que $\varphi_1(\zeta_0) = x$, $\varphi_j(\zeta_j) = \varphi_{j+1}(\zeta_j)$, pour $j = 1, \ldots, n-1$, et que $\varphi_n(\zeta_n) = y$.

Si ω est la distance non-euclidienne sur le disque-unité Δ, on définit $h_D(x, y)$ comme la borne inférieure des sommes

$$\sum_{j=1}^{n} \omega(\zeta_{j-1}, \zeta_j),$$

prise sur toutes les chaînes analytiques injectives d'origine x et d'extrémité y dans D. La fonction

$$h_D : D \times D \to \mathbb{R}^+$$

définit une pseudodistance sur D appelée pseudodistance de Kobayashi injective, qui est contractante pour les applications holomorphes injectives, c'est-à-dire que, si $f: D \to D'$ est une application holomorphe injective, on a, pour tout $x \in D$, pour tout $y \in D$,

$$h_{D'}(f(x), f(y)) \leq h_D(x, y).$$

Sur la définition de h_D, il est clair que la pseudodistance de Kobayashi k_D (voir par exemple [1] pour la définition) est telle que

$$k_D \leq h_D.$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 17 agosto 1988.
(**) Membre de l'U.A. 213 «Analyse complexe et Géométrie» du C.N.R.S.

On dit alors que D est S-hyperbolique si h_D est une distance sur D qui définit la topologie de D. [Dans le cas de la dimension finie, pour que D soit S-hyperbolique, il suffit que h_D soit une distance sur D]. Il est clair que, si D est hyperbolique, D est S-hyperbolique. Dans [2], K. Hahn montre que $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est S-hyperbolique et non hyperbolique. Il est intéressant de savoir dans quelle mesure cette notion est aussi importante en dimension supérieure ou égale à 2. Dans son article [3], E. Vesentini montre en particulier le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Soit D un domaine d'un espace vectoriel complexe localement convexe séparé de dimension ≥ 2. Alors $\mathbb{C}^* \times D$ n'est pas S-hyperbolique.*

Dans cette Note, nous allons étudier la pseudodistance h_D sur la produit D de deux domaines bornés D_1 et D_2. Nous montrerons l'équivalence suivante:

(i) $D = D_1 \times D_2$ *est S-hyperbolique*;

(ii) D_1 *et* D_2 *sont hyperboliques.*

Ce résultat montre que la S-hyperbolicité est assez proche l'hyperbolicité dès que l'espace considéré est de dimension ≥ 2.

Une idée pour généraliser ces notions, du moins en dimension finie, serait de considérer des applications holomorphes injectives du polydisque Δ^n dans D, où $n = \dim D$.

Une partie de ce travail a été faite lors d'un séjour de l'auteur à la Scuola Normale Superiore di Pisa sur l'invitation du Professeur E. Vesentini, et je suis heureux de le remercier de son hospitalité.

2. Pseudodistance de Kobayashi injective sur un produit avec le disque-unité Δ

Théorème 2.1. *Soit Δ le disque-unité ouvert dans $\mathbb{C}$, et soit D un domaine d'un espace vectoriel topologique complexe localement convexe séparé de dimension ≥ 1. Alors, pour tout $(z_1, x_1) \in \Delta \times D$, pour tout $(z_2, x_2) \in \Delta \times D$, on a*:

$$h_{\Delta \times D}((z_1, x_1), (z_2, x_2)) = \max(k_\Delta(z_1, z_2), k_D(x_1, x_2)).$$

Démonstration. D'après la définition de $h_{\Delta \times D}$ et de $k_{\Delta \times D}$, il est clair que

$$h_{\Delta \times D} \geq k_{\Delta \times D}.$$

On sait d'autre part (voir par exemple [1]) que

$$k_{\Delta \times D} = \max(k_\Delta, k_D).$$

Ceci montre que

$$h_{\Delta \times D}((z_1, x_1), (z_2, x_2)) \geq \max(k_\Delta(z_1, z_2), k_D(x_1, x_2)).$$

Soient maintenant (z_1, x_1) et (z_2, x_2) deux points de $\Delta \times D$. Un nombre $\varepsilon > 0$ étant donné, il nous reste à montrer que

$$h_{\Delta \times D}((z_1, x_1), (z_2, x_2)) \leq \max(k_\Delta(z_1, z_2), k_D(x_1, x_2)) + \varepsilon.$$

Quitte à utiliser une chaîne de points entre (z_1, x_1) et (z_2, x_2), on peut supposer qu'il existe une application holomorphe $\varphi: \Delta \to D$ telle que $\varphi(0) = x_1$, $\varphi(\beta) = x_2$, avec $\beta \in \mathbb{R}_+$, et telle que

$$\omega(0, \beta) = k_D(x_1, x_2) + \varepsilon .$$

[Comme précédemment, ω est la distance non-euclidienne sur Δ].

Considérons un automorphisme analytique ψ de Δ tel que $\psi(0) = z_1$, $\psi(\gamma) = z_2$, avec $\gamma \in \mathbb{R}_+$. Distinguons deux cas:

a) $k_\Delta(y_1, y_2) \geq k_D(x_1, x_2) + \varepsilon$.

Alors, $\gamma \geq \beta$. Considérons l'application holomorphe F

$$\begin{aligned} &\Delta \to \Delta \times D \\ &z \mapsto \left(\psi(z), \varphi\left(\frac{\beta}{\gamma} z\right)\right). \end{aligned}$$

Comme ψ est un automorphisme analytique de Δ, F est injective. On a:

$$F(0) = (z_1, x_1), \qquad F(\gamma) = (z_2, x_2) ,$$

ce qui montre que

$$h_{\Delta \times D}((z_1, x_1), (z_2, x_2)) \leq k_D(z_1, z_2) .$$

Le résultat est démontré.

b) $k_\Delta(z_1, z_2) < k_D(x_1, x_2) + \varepsilon$.

Alors $\gamma < \beta$. Si $z_1 \neq z_2$, γ est non nul, et on définit l'application holomorphe F

$$\begin{aligned} &\Delta \to \Delta \times D \\ &z \mapsto \left(\psi\left(\frac{\gamma}{\beta} z\right), \varphi(z)\right). \end{aligned}$$

Il est clair que F est injective, et est telle que

$$F(0) = (z_1, x_1), \qquad F(\beta) = (z_2, x_2) .$$

On en déduit que

$$h_{\Delta \times D}((z_1, x_1), (z_2, x_2)) \leq k_D(x_1, x_2) + \varepsilon ,$$

et le résultat est démontré.

Dans le cas $z_1 = z_2$, il est sans doute encore possible de construire une application holomorphe injective $F: \Delta \to \Delta \times D$ telle que $F(0) = (z_1, x_1)$, $F(\beta) = (z_2, x_2)$. Cependant, il est beaucoup plus simple de construire une chaîne

$$(z_1, x_1), \qquad (z_1 + \eta, \varphi(\alpha)), \qquad (z_2, x_2) ,$$

où α appartient à l'intervalle $]0, \beta[$, et où η est un nombre complexe très petit. L'inégalité cherchée se déduit alors des résultats précédents et de l'inégalité triangulaire.

On déduit du théorème 2.1 le corollaire suivant.

Corollaire 2.2. *Soit D un domaine d'un espace vectoriel topologique complexe localement convexe séparé de dimension* ≥ 1. *Alors les propositions suivantes sont équivalentes*:

(i) $\Delta \times D$ *est S-hyperbolique*;

(ii) D *est hyperbolique.*

3. Pseudodistance de Kobayashi injective sur un produit

Proposition 3.1. *Soient* $D_1 \subset E_1$ *et* $D_2 \subset E_2$ *deux domaines d'espaces vectoriels topologiques complexes localement convexes séparés. Supposons que* $\dim E_2 \geq 1$, *et soit* $y \in D_2$. *Alors, pour tout* $x_1 \in D_1$, *pout tout* $x_2 \in D_1$, *on a*:

$$k_{D_1}(x_1, x_2) = h_{D_1 \times D_2}((x_1, y), (x_2, y)) .$$

Démonstration. Considérons la projection

$$p: D_1 \times D_2 \to D_1 .$$

On a:

$$k_{D_1}(x_1, x_2) \leq k_{D_1 \times D_2}((x_1, y), (x_2, y)) \leq h_{D_1 \times D_2}((x_1, y), (x_2, y)) .$$

D'autre part, comme E_2 est de dimension au moins 1, il existe une application holomorphe injective

$$i: D_1 \times \Delta \to D_1 \times D_2$$

telle que $i(x_1, 0) = (x_1, y)$, $i(x_2, 0) = (x_2, y)$.

On en déduit

$$h_{D_1 \times D_2}((x_1, y), (x_2, y)) \leq h_{D_1 \times \Delta}((x_1, 0), (x_2, 0)) = k_{D_1}(x_1, x_2) ,$$

d'après le théorème 2.1, ce qui montre la proposition 3.1.

Rappelons le résultat suivant de E. Vesentini [3], théorème 1: si D est un domaine S-hyperbolique d'un espace vectoriel topologique complexe localement convexe E, E est équivalent à un espace normé.

On peut alors énoncer le corollaire suivant.

Corollaire 3.2. *Soient* $D_1 \subset E_1$ *et* $D_2 \subset E_2$ *deux domaines contenus dans des espaces vectoriels complexes normés. Supposons que* $\dim E_1 \geq 1$ *et* $\dim E_2 \geq 1$. *Alors les propositions suivantes sont équivalents*:

(i) $D_1 \times D_2$ *est S-hyperbolique*;

(ii) $D_1 \times D_2$ *est hyperbolique*;

(iii) D_1 *et* D_2 *sont hyperboliques.*

Démonstration. Il est clair que (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i). La proposition 3.1 montre que (i) $\Rightarrow$ (iii).

4. Une remarque

Dans le cadre des domaines S-hyperboliques, on peut montrer un théorème d'unicité de H. Cartan pour les fonctions holomorphes injectives. Plus généralement, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 4.1. *Soit D un domaine S-hyperbolique d'un espace vectoriel normé E. Soit a un point de D et soit $f: D \to D$ une application holomorphe injective telle que $f(a) = a$, $f'(a) = \mathrm{id}$. Alors, $f \equiv \mathrm{id}$.*

Comme dans le cas des domaines hyperboliques [1], on se ramène au cas des domaines bornés: il suffit de remarquer que f laisse stable une boule pour h_D de centre a et de rayon suffisamment petit, et qu'une telle boule est isomorphe à un domaine borné.

REFERENCES

[1] FRANZONI T. and VESENTINI E., 1980. *Holomorphic maps and invariant distances.* North Holland, Amsterdam.

[2] HAHN K., 1981. *Some remarks on a new pseudo-differential metric.* Ann. Polonici Mathematici, 39: p. 71-81.

[3] VESENTINI E., *Injective hyperbolicity,* à paraître.