Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Dario Graffi, Mauro Fabrizio

Sulla nozione di stato per materiali viscoelastici di tipo «rate»

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **83** (1989), n.1, p. 201–208.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1989_8_83_1_201_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1989.

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXIII (1989), pp. 201-208

Fisica Matematica. — *Sulla nozione di stato per materiali viscoelastici di tipo «rate»* (*). Nota di DARIO GRAFFI e MAURO FABRIZIO (**), presentata dal Socio D. GRAFFI.

ABSTRACT. — *On the notion state for viscoelastic materials of «rate» type.* We consider a linear viscoelastic material for which the relaxation function is the sum of n-exponential functions. The state σ of these systems is not assigned by the pass history of $\boldsymbol{E}$ but it is enough to give the initial value of deformation tensor $\boldsymbol{E}$, of stress tensor $\boldsymbol{T}$ and of $(n-1)$ their derivatives. Finaly for these materials we have obtained one expression of free energy as a function of the finite dimention state σ.

KEY WORDS: Viscoelasticity; State; Free energy.

RIASSUNTO. — Si considera un materiale viscoelastico lineare in cui la funzione di rilassamento è la somma di n esponenziali. Lo stato σ di questi sistemi non è necessariamente assegnato dalla storia passata di $\boldsymbol{E}$, ma è sufficiente fornire il valore iniziale del tensore di deformazione $\boldsymbol{E}$, del tensore degli sforzi $\boldsymbol{T}$ e delle $(n-1)$ sue derivate. Infine per questi materiali abbiamo ottenuto una espressione dell'energia libera come una funzione dello stato di dimensione finita σ.

1. INTRODUZIONE.

L'equazione costittutiva di un materiale viscoelastico lineare è data, relativamente ad un assegnato punto materiale x, dalla seguente relazione fra il tensore degli sforzi di Cauchy $\boldsymbol{T}$ e il tensore di deformazione infinitesimo $\boldsymbol{E}$:

$$(1.1)\qquad \boldsymbol{T}(x,t) = \boldsymbol{G}(x,0)\,\boldsymbol{E}(x,t) - \int_{-\infty}^{t} \dot{\boldsymbol{G}}(x,t-\tau)\,\boldsymbol{E}(x,\tau)\,d\tau =$$
$$= \boldsymbol{G}(x,0)\,\boldsymbol{E}(x,t) - \int_{0}^{t} \dot{\boldsymbol{G}}(x,t-\tau)\,\boldsymbol{E}(x,\tau)\,d\tau - \int_{-\infty}^{0} \dot{\boldsymbol{G}}(x,t-\tau)\,\boldsymbol{E}(x,\tau)\,d\tau$$

dove $\boldsymbol{G}(x,0)$ e $\dot{\boldsymbol{G}}(x,s)$ sono dei tensori del quarto ordine che supporremo simmetrici, chiamati rispettivamente modulo elastico e funzione di rilassamento. Osserviamo che quando è possibile considerare nullo per ogni t l'ultimo termine:

$$\boldsymbol{I}_0(x,t) = \int_{-\infty}^{0} \dot{\boldsymbol{G}}(x,t-\tau)\,\boldsymbol{E}(x,\tau)\,d\tau$$

a secondo membro della (1.1) ([1]), l'equazione costitutiva originale si riduce al cosidetto caso di Volterra, perché l'illustre scienziato lo segnalò per primo. In queste ipotesi le equazioni integro-differenziali che reggono il comportamento di un corpo viscoelastico, sia nel caso quasi statico e sia in quello dinamico, ammettono, se corredate da opportune condizioni ai limiti, teoremi di esistenza, unicità e dipendenza continua [1, 2, 3]. Essendo il problema lineare si può provare facilmente che è possibile

(*) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività di ricerca del G.N.F.M. del C.N.R.
(**) Dipartimento di Matematica, Piazza Porta S. Donato, 5 - Bologna.
([1]) Ad esempio tale possibilità si presenta se si considera il caso in cui il campo $\boldsymbol{E}(x,t)$ è nullo nell'intervallo $(-\infty, 0)$.

pervenire agli stessi risultati anche quando il termine $\boldsymbol{I}_0(x,t)$, invece che nullo, è una quantità nota. In generale per conoscere tale termine occorre conoscere la storia di $\boldsymbol{E}(x,t)$ nell'intervallo $(-\infty, 0]$, questo comporta l'impossibilità pratica di determinare esattamente $\boldsymbol{I}_0(x,t)$. Uno degli obiettivi di questo lavoro è quello di mettere in evidenza che in alcuni significativi casi, come ad esempio quando

$$\dot{\boldsymbol{G}}(x,t) = \dot{\boldsymbol{G}}_0(x) \exp[-\alpha t] \qquad \alpha > 0$$

è possibile determinare il termine $\boldsymbol{I}_0(x,t)$ una volta noto all'istante $t=0$ il tensore degli sforzi $\boldsymbol{T}(x,0)$ e il tensore di deformazione $\boldsymbol{E}(x,0)$.

Più in generale proveremo che quando $\dot{\boldsymbol{G}}$ risulta una somma di n esponenziali decrescenti del tipo:

$$\dot{\boldsymbol{G}}(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \dot{\boldsymbol{G}}_k(x) \exp[-\alpha_k t] \tag{1.2}$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono scalari positivi diversi fra loro, allora l'integrale $\boldsymbol{I}_0(x,t)$ si ottiene in funzione oltre che di $\boldsymbol{T}(x,0)$, $\boldsymbol{E}(x,0)$ anche delle derivate $\boldsymbol{T}^{(s)}(x,0)$, $\boldsymbol{E}^{(s)}(x,0)$ fino all'ordine $s = n-1$. In altre parole mediante misure eseguite all'istante $t=0$ è possibile determinare il termine $\boldsymbol{I}_0(x,t)$ che rappresenta per $t \geq 0$ l'effetto della memoria sul corpo viscoelastico precedente l'istante $t=0$. Ciò è possibile perché, nel caso in cui $\dot{\boldsymbol{G}}$ è somma di esponenziali, l'equazione costitutiva (1.1) può essere sostituita da una equazione differenziale di tipo «rate» che contiene le derivate fino all'ordine n dei tensori $\boldsymbol{T}(x,t)$, $\boldsymbol{E}(x,t)$.

Proveremo anche che sempre nel caso in cui $\dot{\boldsymbol{G}}(x,t)$ è data da (1.2) è possibile determinare lo stato σ del sistema relativo ad un assegnato punto x anche mediante la $(n+1)$-upla:

$$\sigma = (\boldsymbol{E}(t), \boldsymbol{E}_{\alpha_1}(t), \ldots, \boldsymbol{E}_{\alpha_n}(t)) \tag{1.3}$$

dove

$$\boldsymbol{E}_{\alpha_k}(t) = \int_{-\infty}^{t} \exp[-\alpha_k(t-\tau)]\, \boldsymbol{E}(\tau)\, d\tau . \tag{1.4}$$

Proveremo infatti che questi coefficienti si ottengono in funzione di $\boldsymbol{T}(x,0)$, $\boldsymbol{E}(x,0)$ e delle loro derivate fino all'ordine $n-1$.

Si vede così chiaramente che quando l'equazione costitutiva di un materiale viscoelastico ha una funzione di rilassamento del tipo (1.2), il relativo stato si può ritenere di dimensione finita poiché è assegnato da una $(n+1)$-upla di tensori, invece che dalla funzione tensoriale $\boldsymbol{E}^t$ che rappresenta la storia del tensore di deformazione.

In questa ipotesi lo studio dell'evoluzione del sistema per mezzo delle relative equazioni differenziali comporterà la semplice assegnazione dello stato iniziale mediante la $(n+1)$-upla (1,3), invece che attraverso tutta la storia di $\boldsymbol{E}$ la cui determinazione presenta la difficoltà, anche concettuale, di dovere conoscere, come già osservato, tale campo fino a $-\infty$.

Nell'ultima parte del lavoro ritroveremo l'espressione dell'energia libera ottenuta da Day [4] e discussa da Graffi in [5] e mediante la nuova nozione di stato σ data da (1,3) proveremo che è possibile esprimere tale energia libera in funzione della sola σ invece che di $\boldsymbol{E}^t$.

2. Consideriamo un materiale viscoelastico lineare rappresentato da una equazione costitutiva del tipo (1.1). Supporremo che i tensori simmetrici $G(x,0)$ e $\dot{G}(x,s)$ godano delle seguenti proprietà:

i) $G(x,0)$ è un tensore definito positivo nel senso che:

$$G(x,0)\,E\cdot E > 0 \quad \text{per tutti } E \in \mathrm{Lin}(V)\ ^{(2)} \text{ e } E \neq 0 \tag{2.1}$$

ii) (*Principio di Fading Memory*)

$$\begin{gathered}\dot{G}(x,\cdot) \in L^1(0,\infty),\\ \lim_{s\to\infty} s^2\,\dot{G}(x,s) = 0\end{gathered} \tag{2.2}$$

iii) la funzione di rilassamento così definita:

$$G(x,s) = G(x,0) - \int_0^s \dot{G}(x,\tau)\,d\tau \tag{2.3}$$

risulta un tensore simmetrico e tale che esiste il limite:

$$G(x,\infty) = \lim_{x\to\infty} G(x,s) \tag{2.4}$$

inoltre $G(x,\infty)$ è un tensore simmetrico definito positivo per cui:

$$G(x,\infty)\,E\cdot E > 0 \qquad \text{per tutti } E \in \mathrm{Lin}(V). \tag{2.5}$$

Come accennato, in questo lavoro considereremo funzioni $\dot{G}(x,s)$ del tipo (1.2). Da cui in base a (2.3) si ha:

$$G(x,s) = G(x,0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\dot{G}_k(x)}{\alpha_k}\left(\exp[-\alpha_k s] - 1\right) \tag{2.6}$$

con $G(x,0)$ e $G(x,\infty) = G(x,0) - \sum_{k=1}^{n} \dot{G}_k(x)/\alpha_k$ tali da verificare i)-iii), dove i tensori $\dot{G}_k(x)$ risultano definiti positivi.

Iniziamo studiando il caso $n = 1$ sempre relativamente ad un assegnato punto x che per brevità verrà sottointeso:

$$\begin{aligned}T(t) &= G(0)\,E(t) - \dot{G}\int_{-\infty}^{t} \exp[-\alpha(t-\tau)]\,E(\tau)\,d\tau =\\ &= G(0)\,E(t) - \dot{G}\int_0^t \exp[-\alpha(t-\tau)]\,E(\tau)\,d\tau - \dot{G}\int_{-\infty}^{0} \exp[-\alpha(t-\tau)]\,E(\tau)\,d\tau\end{aligned}$$

in tale caso per le proprietà dell'esponenziale abbiamo:

$$T(t) = G(0)\,E(t) - \dot{G}\int_0^t \exp[-\alpha(t-\tau)]\,E(\tau)\,d\tau - \dot{G}\exp[-\alpha t]\int_{-\infty}^{0} \exp[\alpha\tau]\,E(\tau)\,d\tau \tag{2.7}$$

pertanto poiché

$$T(0) = G(0)\,E(0) - \dot{G}\int_{-\infty}^{0} \exp[\alpha\tau]\,E(\tau)\,d\tau$$

(2) Con Lin (V) indichiamo l'insieme dei tensori del secondo ordine nello spazio euclideo tridimensionale V.

possiamo riscrivere (2.7) nel modo seguente:

$$T(t) = G(0)\,E(t) + (T(0) - G(0)\,E(0)) \exp[-\alpha t] - \dot{G} \int_0^t \exp[-\alpha(t-\tau)]\,E(\tau)\,d\tau \tag{2.8}$$

da tale espressione risulta evidente che per determinare il tensore degli sforzi $T(t)$ è sufficiente conoscere il valore della storia di E relativa solo all'intervallo $[0, t]$ insieme con il valore iniziale del tensore degli sforzi $T(0)$. Inoltre se chiamiamo *processo di velocità di deformazione* la funzione:

$$\dot{E}_{[0,t)} : [0, t) \rightarrow \mathrm{Sim}\,(V)$$

definita per ogni $\tau \in [0, t)$ come:

$$\dot{E}_{[0,t)}(\tau) = \frac{d}{d\tau} E(\tau)$$

allora per determinare all'istante t il tensore degli sforzi $T(t)$ mediante la formula (2.8), è sufficiente assegnare all'istante iniziale la coppia di valori $\sigma_0 = (E(0), T(0))$, che chiamiamo *stato*, e il processo $\dot{E}_{[0,t)}$. Infatti mediante $E(0)$ e $\dot{E}_{[0,t)}$ possiamo determinare $E(\tau)$ nell'intervallo $[0, t]$ e quindi per mezzo di (2.8) anche il tensore $T(t)$. Pertanto scriveremo l'equazione (2.8) in maniera compatta

$$T(t) = T(\sigma_0, \dot{E}_{[0,t)})\,.$$

La definizione dello stato può avvenire anche mediante l'utilizzazione di una diversa variabile. Osserviamo infatti che nel caso particolare in cui $n = 1$ e $\alpha_k = \alpha$ lo stato iniziale può essere caratterizzato anche dalla coppia $\sigma_0 = (E(0), E_\alpha(0))$ poiché tale coppia, mediante l'equazione (2.7), è in grado di determinare lo stato $(E(0), T(0))$.

Passando al caso generale, in cui la funzione di rilassamento G è assegnata come in (2.6), otteniamo mediante un procedimento analogo al precedente:

$$\begin{aligned} T(t) = G(0)\,E(t) - \sum_{k=1}^{n} \dot{G}_k \int_{-\infty}^{t} \exp[-\alpha_k(t-\tau)]\,E(\tau)\,d\tau = \\ = G(0)\,E(t) - \sum_{k=1}^{n} \dot{G}_k \int_0^t \exp[-\alpha_k(t-\tau)]\,E(\tau)\,d\tau - \\ - \sum_{k=1}^{n} \dot{G}_k \exp[-\alpha_k t] \int_{-\infty}^{0} \exp[\alpha_k \tau]\,E(\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

quindi considerando la derivata s-esima calcolata per un generico t si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d^s}{dt^s} T(t) = G(0) \frac{d^s}{dt^s} E(t) - \sum_{k=1}^{n} (-\alpha_k)^s \dot{G}_k \int_{-\infty}^{t} \exp[-\alpha_k(t-\tau)]\,E(\tau)\,d\tau - \\ - \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=0}^{s-1} \dot{G}_k(-\alpha_k)^r \frac{d^{s-1-r}}{dt^{s-1-r}} E(t)\,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Questa equazione ci fornisce per $t = 0$ e per ogni $s = 0, 1, \ldots, n-1$, il sistema:

$$-\sum_{k=1}^{n} (-\alpha_k)^s \dot{G}_k E_{\alpha_k}(0) = T_0^{(s)} - G(0)\,E_0^{(s)} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=0}^{s-1} \dot{G}_k(-\alpha_k)^r E_0^{(s-1-r)} \tag{2.10}$$

dove abbiamo posto:

$$(2.11)\qquad E_{\alpha_k}(0)=\int_{-\infty}^{0}\exp[\alpha_k\tau]\,E(\tau)\,d\tau\qquad T_0^{(s)}=\frac{d^s}{dt^s}T(t)\Big|_{t=0}\qquad E_0^{(s)}=\frac{d^s}{dt^s}E(t)\Big|_{t=0}.$$

Poiché il determinante dei coefficienti del sistema (2.10) nelle variabili E_{α_k} è proporzionale al determinante di Vandermonde

$$(2.12)\qquad V=\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n\\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

ed essendo gli esponenti $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ per ipotesi tutti fra loro differenti, il determinante (2.12) sarà non nullo. Pertanto il sistema (2.8) si può risolvere, quindi i coefficienti $E_{\alpha_k}(0)$ risultano quantità note in funzione di $T_0^{(s)}$ e $E_0^{(s)}$; con $s=0,1,\dots,n-1$. Inoltre se è noto e regolare il processo $\dot{E}_{[0,t)}$, possiamo determinare le derivate $E_0^{(s)}$, mediante $\dot{E}_{[0,t)}$. Pertanto risulta sufficiente conoscere i valori $E(0)$, $T_0^{(s)}$ $(s=0,1,2,\dots n-1)$ e il processo $\dot{E}_{[0,t)}$ per determinare il tensore degli sforzi T all'istante t. In altre parole possiamo dire che i valori E_0, $T_0^{(s)}$ sono in grado di riassumere la storia del sistema fino all'istante $t=0$ alfine della sua evoluzione. Pertanto se indichiamo con σ la $(n+1)$-upla:

$$(2.13)\qquad \sigma(t)=(E(t),T(t),T^{(1)}(t),\dots,T^{(n-1)}(t))$$

che in seguito chiameremo stato del sistema viscoelastico, possiamo costruirci, utilizzando (2.7), una funzione del tipo

$$(2.14)\qquad \hat{\rho}(\sigma_0,\dot{E}_{[0,t)})=\sigma(t)$$

che assegna il valore dello stato σ all'istante t una volta noto il σ_0 iniziale e il processo $\dot{E}_{[0,t)}$. Inoltre risulterà sempre da (2.9):

$$(2.15)\qquad T(t)=\hat{T}(\sigma_0,\dot{E}_{[0,t)}).$$

Possiamo pertanto concludere che per assegnare lo stato σ di un materiale viscoelastico lineare che presenta una funzione di rilassamento del tipo (1.2), non è necessario conoscere la storia E^t del tensore di deformazione infinitesima, ma è sufficiente assegnare la $(n+1)$-upla (2.13). Quindi lo stato è di dimensione finita, poiché risulta un elemento di $(\mathrm{Sim}(V))^{n+1}$.

Il discorso ora fatto per $t=0$ si può immediatamente estendere al caso di un t generico. Ciò vuol dire che i tensori $E_{\alpha_k}(t)$ si possono esprimere linearmente mediante T, $T_{(t)}^{(1)},\dots,T_{(t)}^{(n-1)},\dots,E(t),E_{(t)}^{(1)},\dots,E_{(t)}^{(n-1)}$ invece che attraverso la storia E^t. Sostituendo ora tale dipendenza nel sistema (2.9) quando $s=n$ otteniamo un sistema lineare del tipo:

$$(2.16)\qquad B_0\frac{d^nT}{dt^n}+B_1\frac{d^{n-1}T}{dt^{n-1}}+\dots+B_nT=A_0\frac{d^nE}{dt^n}+A_1\frac{d^{n-1}E}{dt^{n-1}}+\dots+A_nE$$

dove i coefficienti B_i, A_i sono dei tensori costanti del quarto ordine. Nell'equazione (2.16) non compaiono termini di memoria, in altre parole la relazione costitutiva (1.1) è stata scritta come una equazione di tipo «rate». Ciò risulta possibile in virtù della particolare espressione (2.6) della funzione di rilassamento G.

È interessante ora osservare che la caratterizzazione dello stato σ può avvenire anche mediante la scelta di un differente insieme di oggetti, infatti se definiamo σ mediante la nuova $(n+1)$-upla

$$\sigma(t) = (\boldsymbol{E}(t), \boldsymbol{E}_{\alpha_1}(t), \dots \boldsymbol{E}_{\alpha_n}(t)) . \tag{2.17}$$

Con $\boldsymbol{E}_{\alpha_k}$ espressa da (1.4) allora da tale definizione segue in modo evidente la proprietà (2.14) e la relazione (2.15).

3. Prima di enunciare il Principio di Dissipazione relativa ai Sistemi Meccanici, definiamo un *processo di stati* mediante la coppia $(\sigma, \dot{\boldsymbol{E}}_{[0,t)})$ che attraverso la funzione

$$\hat{\rho}(\sigma, \dot{\boldsymbol{E}}_{[0,\tau)}) = \sigma(\tau)$$

individua tutti gli stati $\sigma(\tau)$ che si ottengono partendo da σ ed eseguendo il processo $\dot{\boldsymbol{E}}_{[0,t)}$ fino all'istante $\tau \in [0,t)$. Chiameremo *processo ciclico* una coppia $(\sigma, \dot{\boldsymbol{E}}_{[0,t)})$ tale che:

$$\hat{\rho}(\sigma, \dot{\boldsymbol{E}}_{[0,t)}) = \sigma \text{ (}^3\text{)}$$

PRINCIPIO DI DISSIPAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

Se $(\sigma, \dot{\boldsymbol{E}}_{[0,T)})$ *è un processo ciclico, per cui* $\hat{\rho}(\sigma, \dot{\boldsymbol{E}}_{[0,T)}) = \sigma$ *allora*

$$\oint_0^T \boldsymbol{T}(\sigma, \dot{\boldsymbol{E}}_{[0,t)}) \cdot \dot{\boldsymbol{E}}(t)\, dt \geq 0 \tag{3.1}$$

dove $\dot{\boldsymbol{E}}_{[0,t)}$ *è la restrizione di* $\dot{\boldsymbol{E}}_{[0,T)}$ *all'intervallo* $[0,t)$.

Possiamo provare che come conseguenza di questo Principio è possibile stabilire il teorema seguente (vedi [7]):

TEOREMA. *Segue dal Principio di Dissipazione* (3.1) *che deve esistere almeno una funzione* ψ *dello stato* σ *tale che se* σ_1, σ_2 *e* $\dot{\boldsymbol{E}}_{[0,T)}$ *sono tali per cui* $\hat{\rho}(\sigma_1, \dot{\boldsymbol{E}}_{[0,T)}) = \sigma_2$ *allora:*

$$\psi(\sigma_2) - \psi(\sigma_1) \leq \int_0^T \boldsymbol{T}(\sigma_1, \dot{\boldsymbol{E}}_{[0,t)}) \cdot \dot{\boldsymbol{E}}(t)\, dt . \tag{3.2}$$

COROLLARIO. Per ogni t in cui il processo $\boldsymbol{E}(t)$ è continuo e differenziabile si ha:

$$\dot{\psi}(\sigma_t) \leq \boldsymbol{T}(\sigma_1, \dot{\boldsymbol{E}}_{[0,t)}) \cdot \dot{\boldsymbol{E}}(t) . \tag{3.3}$$

Stabiliamo ora in altro modo l'esistenza di una funzione energia libera ψ con la proprietà (3.2). Questa dimostrazione ha il vantaggio di pervenire all'esistenza di ψ mediante un metodo costruttivo che parte dall'esame della potenza $\mathcal{P} = \boldsymbol{T} \cdot \dot{\boldsymbol{E}}$.

Nell'ipotesi che la funzione di rilassamento sia:

$$\dot{G}(t) = \sum_{k=1}^{n} \dot{G}_k \exp[-\alpha_k(t)],$$

(3) Per un materiale viscoelastico, ogni processo che si realizza mediante una storia periodica è ciclico su ogni periodo. Inoltre è provato in [6] che è sufficiente formulare il Principio di Dissipazione solo sulle storie periodiche per ottenere tutte le restrizioni che questo Principio comporta.

si ha per ogni istante t:

$$(3.4)\qquad T(t)\cdot\dot{E}(t)=G_0E(t)\cdot\dot{E}(t)-\int_{-\infty}^{t}\sum_{k=1}^{n}\dot{G}_k\exp\left[-\alpha_k(t-\tau)\right]E(\tau)\,d\tau\cdot\dot{E}(t)=$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{G_0E(t)\cdot E(t)}{2}\right)-\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\dot{G}_k\left(\int_{-\infty}^{t}\exp\left[-\alpha_k(t-\tau)\right]E(\tau)\,d\tau\cdot E(t)\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\dot{G}_k\alpha_k\int_{-\infty}^{t}\exp\left[-\alpha_k(t-\tau)\right]E(\tau)\,d\tau\cdot E(t)+\sum_{k=1}^{n}\dot{G}_kE(t)\cdot E(t)\,.$$

Osserviamo inoltre che

$$(3.5)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\dot{G}_k\alpha_k\int_{-\infty}^{t}\exp\left[-\alpha_k(t-\tau)\right]E(\tau)\,d\tau\cdot\int_{-\infty}^{t}\exp\left[-\alpha_k(t-\tau)\right]E(\tau)\,d\tau\right]=$$

$$=\dot{G}_k\alpha_k\int_{-\infty}^{t}\exp\left[-\alpha_k(t-\tau)\right]E(\tau)\,d\tau\cdot\left(E(t)-\int_{-\infty}^{t}\alpha_k\exp\left[-\alpha_k(t-\tau)\right]E(\tau)\,d\tau\right).$$

Combinando (3.4) con (3.5) si ha:

$$(3.6)\qquad T(t)\cdot\dot{E}(t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(G_0E(t)\cdot E(t))-\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n}\dot{G}_k\int_{-\infty}^{t}\exp\left[-\alpha_k(t-\tau)\right]E(\tau)\,d\tau\cdot E(t)\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\dot{G}_k\alpha_k\left(\int_{-\infty}^{t}\exp\left[-\alpha_k(t-\tau)\right]E(\tau)\,d\tau\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{t}\exp\left[-\alpha_k(t-\tau)\right]E(\tau)\,d\tau\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\dot{G}_k\left(\alpha_k\int_{-\infty}^{t}\exp\left[-\alpha_k(t-\tau)\right]E(\tau)\,d\tau-E(t)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\alpha_k\int_{-\infty}^{t}\exp\left[-\alpha_k(t-\tau)\right]E(\tau)\,d\tau-E(t)\right).$$

Poniamo

$$(3.7)\qquad \psi(t)=\frac{1}{2}G_0E(t)\cdot E(t)-\int_{-\infty}^{t}\sum_{k=1}^{n}\dot{G}_k\exp\left[-\alpha_k(t-\tau)\right]E(\tau)\,d\tau\cdot E(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\dot{G}_k\alpha_k\left(\int_{-\infty}^{t}\exp\left[-\alpha_k(t-\tau)\right]E(\tau)\,d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{t}\exp\left[-\alpha_k(t-\tau)\right]E(\tau)\,d\tau\right)$$

allora poiché l'ultima sommatoria in (3.6) è positiva, abbiamo sempre da (3.6) $\dot{\psi}\leq T\cdot\dot{E}$.

Pertanto la funzione ψ definita in (3.7) risulterà essere una energia libera per il sistema, in quanto verifica le condizioni i-ii-iii poste da Graffi in [5] per la sua caratterizzazione. In funzione delle variabili E_{α_k} definite in (2.18) l'energia libera ψ si scrive:

$$(3.8)\qquad \psi=\frac{1}{2}G_0E\cdot E-\sum_{k=1}^{n}\dot{G}_kE_{\alpha_k}\cdot E+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\dot{G}_k\alpha_kE_{\alpha_k}\cdot E_{\alpha_k}\,.$$

Bibliografia

[1] Fichera G., 1979. *Avere una memoria tenace crea gravi problemi.* Arch. Rational Mech. Anal., 70: 101-112.

[2] Duvaut G. - Lions J. L., 1972. *Les Inéquations en Méchanique et en Physique.* Dunod, Paris.

[3] Dafermos C. M., 1970. *On abstract Volterra equations with applications to linear viscoelasticity.* J. Diff. Equations, 7: 554-569.

[4] Day W. A., 1979. *The thermodynamics of materials with memory.* C.I.M.E., Liguori, Napoli: 55-91.

[5] Graffi D., 1982. *Sull'espressione analitica di alcune grandezze termodinamiche nei materiali con memoria.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 68: 17-29.

[6] Fabrizio M. - Morro A., 1988. *Viscoelastic relaxation functions compatible with thermodynamics.* J. Elasticity, 19: 63-75.

[7] Coleman B. D. - Owen D. R., 1974. *A mathematical foundation for thermodynamics.* Arch. Rational Mech. Anal., 54: 1-104.