Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giacomo Lenzi

Estensioni contraddittorie della teoria Ampia

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **83** (1989), n.1, p. 13–28.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1989_8_83_1_13_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1989.

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXIII (1989), pp. 13-28

Logica matematica. — *Estensioni contradditorie della teoria Ampia.* Nota (*) di

Giacomo Lenzi (*), presentata (**) dal Socio E. De Giorgi.

Abstract. — *Contradictory extensions of the ample theory.* First I briefly present the *A*-Theory, a non-reductionist, self-referential theory for the Foundations of Mathematics proposed by Clavelli, De Giorgi, Forti and Tortorelli in 1987.

Then, in §§2-4, I show the inconsistency of some extensions of the *A*-Theory, obtained by adding strong axioms on relations and operations (e.g. axioms giving the conjunction of relations, the composition of operations, etc.) and/or axioms giving some «combinatorial» relation.

Key words: Quality; Relation; Operation; Pair.

Riassunto. — Dopo una breve presentazione della teoria *A*, una teoria non riduzionista ed autoreferenziale dei fondamenti della matematica proposta da Clavelli, De Giorgi, Forti e Tortorelli nel 1987, si mostra l'inconsistenza di estensioni della teoria A ottenute aggiungendo forti assiomi su relazioni e operazioni (ad es. assiemi che danno la composizione di operazioni, la congiunzione di relazioni, ecc.) e/o assiemi che forniscono qualche relazione «combinatoria».

Introduzione: la teoria Ampia

L'oggetto di questo articolo è la *teoria Ampia* (abbr. teoria *A*) di M. Clavelli, E. De Giorgi, M. Forti e V. M. Tortorelli, apparsa in [1].

Precisamente in questo articolo, in accordo col programma di studio proposto nel cap. VI di [1], considereremo alcune estensioni della teoria A, e dimostreremo che sono *contradditorie*.

La teoria *A* è una teoria dei fondamenti della Matematica, adatta allo studio di molti problemi di autoriferimento.

Gli Autori di [1] partono dalla constatazione che le teorie fondazionali classiche (*ZF, GB,* ecc.), per evitare il pericolo di contraddizioni, introducono rigide gerarchie tra gli oggetti e quindi non riproducono le proprietà *autoreferenziali* del linguaggio matematico.

In particolare, nelle teorie classiche si ammettono oggetti che corrispondono alle strutture matematiche di base (insiemi, coppie, funzioni, ecc.), mentre i concetti usati nella discrizione di tali strutture (proprietà, relazioni, trasformazioni, ecc.) non compaiono come oggetti, ma sono introdotti solo nella metateoria.

Al contrario la teoria *A* introduce, accanto alle strutture di tipo tradizionale (*collezioni, sistemi, cardinali, proposizioni*), alcune entità corrispondenti a tali concetti «metateorici» (*qualità, relazioni, operazioni*), raggiungendo così un maggior potere di autoriferimento; ad es.:

1) si introduce la qualità di essere una qualità (che è una qualità autoreferente);

(*) Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Pisa, Via Buonarroti 2, 56100 Pisa, Italia.
(**) Nella seduta dal 14 gennaio 1989.

2) si introduce una relazione che vale tra ogni relazione r e ogni *coppia* (x, y) tali che r collega x a y;

3) si introduce un'operazione che manda ogni coppia (f, x) tale che l'operazione f è definita su x, nel risultato di f in x.

Tutti i tipi di oggetti di cui sopra sono considerati primitivi in A; in effetti, a differenza delle teorie fondamentali classiche, la teoria A è *non riduzionista*.

Inoltre non si postula che tali tipi di oggetti esauriscano tutti gli oggetti, né che siano disgiunti; invece si danno condizioni di *coerenza* sugli oggetti appartenenti a due o più di essi.

Nella teoria A, le strutture di carattere matematico (collezioni, sistemi e cardinali) sono *estensionali*, in accordo con le teorie classiche: questo facilita la manipolazione di oggetti matematici mediante operazioni. Invece, gli oggetti di carattere generale (quantità, relazioni e operazioni) sono *non estensionali* e, spesso, sono contraddistini da un significato speciale (cfr. gli esempi 1)-3) di prima); in particolare, le relazioni sono gli oggetti che raggiungono la massima espressività.

Secondo l'analisi degli autori di [1], una delle principali cause che portano alle antinomie classiche è la definizione di oggetti al tempo stesso molto «grandi» e molto espressivi; pertanto nella teoria A si adottano i seguenti accorgimenti:

— si definisce una notazione di cardinalità e si assume l'esistenza di una cardinalità massima;

— si trattano gli oggetti di cardinalità non massima (detti oggetti *piccoli*) secondo l'introduzione e l'uso corrente, ma si riserva maggiore cautela al caso di oggetti di cardinalità massima (*oggetti grandi*).

Infine, la teoria Ampia deve il suo nome alla vasta gamma di ampliamenti a cui è predisposta; il capitolo VI di [1] propone una serie di ampliamenti di vario tipo e difficoltà, corrispondenti ad altrettanti aspetti del problema dell'autoriferimento: ad esempio si propongono assiomi di comprensione (v. cap. VI, § 3), assiomi di scelta (§ 4), assiomi di aritmetica cardinale (§ 9), ecc.

In particolare, il presente articolo trae ispirazione dai §§ 5-6, ove si danno assiomi che postulano la *stabilità* degli oggetti non estensione rispetto a certe loro manipolazioni naturali (come la negazione di qualità, la composizione di operazioni, ecc.): molti degli ampliamenti che considereremo in questo articolo conterranno assiomi di stabilità di relazioni e operazioni.

Ringrazio il dott. M. Clavelli, il prof. M. Forti, il prof. E. De Giorgi e il dott. V. M. Tortorelli per aver incoraggiato la preparazione di quest'articolo.

0. Generalità sul linguaggio della teoria A

Come abbiamo detto, nella teoria A si introducono vari tipi di oggetti; i tipi fondamentali sono i seguenti:

qualità (o proprietà), *relazioni* (binarie), *operazioni* (o trasformazioni), *coppie* (ordinate).

In effetti tali oggetti hanno un ruolo essenziale nelle seguenti quattro *espressioni* *fondamentali* del linguaggio di A:

(0.1) Quando q è una *qualità*, scriviamo qx intendendo che q è una *qualità di* x, o che x *ha la qualità* q.

(0.2) Quando r è una *relazione*, scriviamo $x\,r\,y$ intendendo che x è *nella relazione* r *con* y, o x è *collegato dalla relazione* r *a* y.

(0.3) Quando f è un'*operazione*, scriviamo $y = fx$ intendendo che f *trasforma* x *in* y; diciamo anche che fx è il *risultato* dell'operazione f applicata all'oggetto x.

(0.4) Quando z è una *coppia*, scriviamo $z = (x, y)$ intendendo che z è *la coppia avente* x *come prima e* y *come seconda componente*.

In questo senso le qualità, le relazioni, le operazioni e le coppie *descrivono* tutti gli oggetti di A.

L'esposizione degli assiomi di A è bastata sulle espressioni (0.1-4); inoltre gli assiomi della teoria menzionano un centinaio di oggetti speciali, cui corrispondono altrettante *costanti* del linguaggio di A (ad es., l'operazione identità è indicata con *id*, la relazione di appartenenza a collezioni è indicata con *rcoll*, ecc.).

Gli assiomi aggiuntivi che esporremo sono anch'essi basati sulle (0.1-4) ma, dato che introdurranno alcuni nuovi oggetti speciali, useranno altrettante nuove costanti (ad es. l'operazione che dà la composizione di operazioni sarà indicata con *comp*, ecc.).

1. ESPOSIZIONE PARZIALE DELLA TEORIA A

In questa sede non siamo interessati ad esporre l'intera teoria A, sia per ragioni di spazio (la teoria è costituita da oltre cento assiomi), sia perché le dimostrazioni d'inconsistenza che daremo in questo articolo non utilizzano l'intera teoria A, ma solo alcuni dei suoi assiomi più impegnativi.

Pertanto ci limiteremo a riportare, in questo paragrafo, una piccola parte della teoria A, e precisamente alcuni degli assiomi di A esposti nel capitolo I di [1].

Qui e nel seguito, gli assiomi saranno indicati con le stesse sigle di [1], ove si distinguono diciassette gruppi di assiomi, 1-17 (in [1], il gruppo 17 è indicato con 16 per un errore di stampa); gli assiomi che riporteremo in questo paragrafo fanno parte dei gruppi 1 e 2.

Anzittuto, chiamiamo *oggetti* tutte le entità interne della teoria A.

Gli assiomi 1.A-J di A introducono quattro tipi di oggetti fondamentali: le *qualità*, le *relazioni*, le *operazioni* e le *coppie*.

Ora, nella teoria A, le principali proprietà degli oggetti sono introdotte per mezzo di qualità, e le principali relazioni tra gli oggetti sono introdotte per mezzo di relazioni; così, gli assiomi suddetti introducono le seguenti qualità:

qobj	(qualità di essere un *oggetto*)
qqual	(qualità di essere una *qualità*)
qrel	(qualità di essere una *relazione*)
qop	(qualità di essere un'*operazione*)
qpair	(qualità di essere una *coppia*);

le seguenti relazioni sono legate ai precedenti tipi di oggetti:

robj	(relazione tra due oggetti qualsiasi)
rqual	(relazione tra un oggetto e ogni sua qualità)
rrel	(rel. tra una coppia e ogni relazione di cui «è nel grafico»)
rop	(rel. tra una coppia e ogni operazione di cui «è nel grafico»)
rfst	(rel. tra un oggetto e le coppie di cui è prima componente)
rsnd	(rel. tra un oggetto e le coppie di cui è seconda componente).

Gli assiomi 1.A-F determinano il significato di tali oggetti;

Assioma 1.A.
qobj, qqual, qrel, qop e qpair sono qualità.
robj, rqual, rrel, rop, rfst e rsnd sono relazioni.

Assioma 1.B.
Sia qobj x che x robj y valgono per tutti gli oggetti x e y.

Assioma 1.C.
L'oggetto q è una qualità se e solo se qqual q.
x rqual q se è solo se q è una qualità e q x.

Assioma 1.D.
L'oggetto r è una relazione se e solo se qrel r.
(x, y) rrel r se solo e se r è una relazione e x r y.

Assioma 1.E.
L'oggetto f è un'operazione se e solo se qop f.
(x, y) rop f se e solo se $y = f\ x$.

Assioma 1.F.
L'oggetto z è una coppia se e solo se qpair z.
$z = (x, y)$ se e solo se x rfst z e y rsnd z.

Gli assiomi successivi attribuiscono alle operazioni e alle coppie alcune delle loro proprietà naturali:

Assioma 1.G.
Se (x, y) rop f e (x, z) rop f allora $y = z$.

Assioma 1.H.
Dati due oggetti x e y, esiste un unico oggetto z tale che x rfst z e y rsnd z.

Assioma 1.I.
Se un oggetto z è una coppia allora esistono unici x e y tali che x rfst z e y rsnd z.

Assioma 1.J.
Se x rfst z oppure x rsnd z per qualche x, allora qpair z.

Il gruppo 1 di assiomi è completo dall'assioma 1.K, che introduce in A in concetto di *struttura*, e che non riportiamo in questa sede.

Nel successivo gruppo 2 di assiomi non compaiono nuovi tipi di oggetti, ma compaiono le seguenti qualità e relazioni:

qinjop (qualità di essere un'*operazione iniettiva*)

rid, rnid (relazioni di *uguaglianza e disuguaglianza*)

rdom, *rval* (relazioni fra un oggetto e le operazioni di cui «sta nel *dominio*» e «sta nell'*immagine*», rispettivamente)

inoltre si introducono le prime operazioni, tra le quali abbiamo:

id, diag (*identità, diagonalizzazione*)

p_1, p_2 (*prima e seconda proiezione* di coppie)

invrel, invop (*inversione* di relazioni e di operazioni iniettive).

Le precedenti qualità, relazioni e operazioni sono così descritte:

ASSIOMA 2.A.
x rid y se e solo se $x=y$, *e x rnid y se e solo se* $x \neq y$.

ASSIOMA 2.B.
id $x=x$ *e diag* $x=(x,x)$ *per ogni oggetto x.*

ASSIOMA 2.C.
$p_1 z$ *è la prima e* $p_2 z$ *è la seconda componente di ogni paio z, cioè* $p_1(x,y)=x$, $p_2(x,y)=y$.

ASSIOMA 2.D.
qinjop è una qualità.
qinjop f se e solo se f è un'operazione e $fx=fy$ *implica* $x=y$.

ASSIOMA 2.E.
rdom e rval sono relazioni.
x rdom f se e solo se f è un'operazione e $y=fx$ *per qualche y.*
y rval f se e solo se f è un'operazione e $y=fx$ *per qualche x.*

Quando *x rdom f*, diremo che *x sta del dominio* dell'operazione *f* o che *f* è *definita su x* (abbr. $f \downarrow x$); quando *x rval f*, diremo che *x sta nell'immagine di f*, o che *x* è *un valore di f* (abbr. $f \uparrow x$).

ASSIOMA 2.F.
invrel è *un'operazione. invrel* $\downarrow r$ *e invrel* $\uparrow r'$ *se e solo se r e r' sono operazioni.*
x (*invrel r*)*y se e solo se y r x.*
Inoltre invrel (*invrel r*) $= r$ *per ogni relazione r.*

ASSIOMA 2.G.
invop è *un'operazione, invop* $\downarrow f$ *e invop* $\uparrow g$ *se e solo se f e g sono operazioni iniettive.*
$y=$ (*invop f*) x *se e solo se* $x=f\,y$.
Inoltre invop (*invop f*) $=f$ *per ogni operazione iniettiva f.*

Diremo che *invrel r* (abbr. r^{-1}) è la *relazione inversa* di *r* e che *invop f* (abbr. f^{-1}) è l'*operazione inversa* di *f*.

Infine vogliamo accennare alle proprietà della struttura delle *collezioni* e di quella dei *sistemi* in *A*.

Le collezioni, caratterizzate dalla qualità *qcoll*, hanno proprietà analoghe agli insiemi e alle classi delle più usuali teorie fondazionali, come *ZF* e *GB*; l'*appartenenza* a collezioni è data dalla ralazione *rcoll*: così, *quando* C è una collezione, si scrive $x\,rcoll\,C$ (abbr. $x \in C$) intendendo che x è un *elemento* della collezione C.

La relazione *rcoll* è *estensionale*, ossia due collezioni con gli stessi elementi sono uguali.

Tra le collezioni esiste una collezione senza elementi, $\emptyset$ (detta *collezione vuota*; $\emptyset$ è unica per l'estensionalità di *rcoll*).

Le più semplici collezioni non vuote sono i *singoli* e i *duetti*: per ogni oggetto x esiste il suo singolo, $\{x\}$, e per ogni coppia (x, y) esiste il suo duetto, $\{x, y\}$.

Inoltre, si postula che molte delle tradizionali manipolazioni di insiemi (unione, intersezione, differenza, parti, ecc.) si possono eseguire quantomeno sulle collezioni piccole, di modo che le collezioni piccole hanno una struttura simile a quella degli insiemi di ZF.

I sistemi, caratterizzati dalla qualità *qsys*, sono l'analogo dei sistemi indicizzati comunemente usati in Matematica; la relazione fondamentale dei sistemi è quella di *appartenenza al grafico, rsys* (almeno in prima istanza, però, non si intende che il grafico di un sistema sia un oggetto della teoria).

Così, quando s è un sistema, si scrive $(i, x)\,rsys\,S$ (abbr. iSx) intendendo che i è un *indice* del sistema S e che x è un valore del sistema S associato a i.

La relazione *rsys è estensionale*: due sistemi con gli stessi indici, e che associano a ciascun indice gli stessi valori, sono uguali.

Tra i sistemi esiste un sistema senza indici, ϕ (detto anche *sistema vuoto*; ϕ è unico per l'estensionalità di *rsys*).

I sistemi in cui ogni indice ha un solo valore sono particolarmente interessanti; tali sistemi si dicono *sistemi univalenti.*

Quando S è un sistema univalente, si scrive $x = S_i$ anziché iSx; così, per ogni indice di S, l'oggetto S_i è ben definito, e si chiama la *proiezione* di S all'indice i.

I sistemi univalenti le cui proiezioni sono collezioni (o risp. sistemi, coppie, ecc.) si dicono sistemi *di* collezioni (*di* sistemi, *di* coppie, ecc.).

I più semplici sistemi non vuoti sono i *sistemi unitari*, ossia i sistemi univalenti con un solo indice; per ogni coppia (i, x) esiste il sistema unitario $S = \begin{pmatrix} i \\ x \end{pmatrix}$ tale che $x = S_i$.

Per ogni sistema S esiste il *sistema inverso* di S, S^{-1}, caratterizzato dalla seguente, naturale proprietà:

$$xS^{-1}y \Leftrightarrow ySx .$$

Inoltre, si postula che molte delle tradizionali manipolazioni dei sistemi indicizzati (composizione, trasposizione, prodotto fibrato, prodotto tensoriale, ecc.) si possono eseguire quantomeno sui sistemi piccoli di A; in tal modo la struttura dei sistemi piccoli è simile a quella degli insiemi di coppie di ZF.

2. Postulati di stabilità e comprensione per relazioni

I risultati di inconsistenza che daremo in questo paragrafo usano in modo essenziale, oltre alla parte di base della teoria A che abbiamo riportato nel § 1, anche la particolare codifica del concetto di *estensione* nella teoria A.

Ora, in [1] si considerano le coppie del tipo (r, x), ove r è una relazione (tali coppie sono dette *paia relazionali*), allo scopo di codificare l'estensione dell'oggetto x rispetto alla relazione r: così, ad esempio, quando q è una qualità, il paio relazionale $(rqual, q)$ rappresenta l'estensione di q; quando S è un sistema, il paio relazionale $(rsys, S)$ rappresenta il grafico di S, ecc.

Dopo aver introdotto le paia relazionali, mediante la qualità *qrepa*, la teoria A dà una relazione di *inclusione generalizzata* tra paia relazionali, *rginc*, su ispirazione della tradizionale relazione di inclusione tra insiemi; la relazione *rginc* è introdotta nell'assioma 10.C in questo modo:

ASSIOMA 10.C
rginc è una relazione tra paia relazionali.
$(r, x)\, rginc\, (r', x')$ *se e solo se* $t\, r\, x$ *implica* $t\, r'\, x'$.

Quando r e r' sono relazioni, scriveremo $(r, x) < (r', x')$ per $(r, x)\, rginc\, (r', x')$, e diremo che (r, x) è *estensionalmente incluso* in (r', x').

La relazione *rginc* è estremamente espressiva; ad es., a partire da *rginc* si costruiscono espressioni che sono una versione indiretta della negazione e della congiunzione di relazioni, e quindi *rginc* supplisce alla mancanza di tali naturali manipolazioni nella teoria A. Infatti, dall'assioma 10.C segue:

$$(r, y) < (rnid, x) \Leftrightarrow \neg\, (x\, r\, y) \tag{2.1}$$

$$(rcoll, \{r, r'\}) < (rrel^{-1}, (x, y)) \Leftrightarrow x\, r\, y \wedge x\, r'\, y. \tag{2.2}$$

L'inserimento della relazione *rginc*, dunque, aumenta di molto le possiblità espressive della teoria A, e quindi porta a seri problemi di consistenza.

I problemi diventano ancora maggiori considerando le estensioni di A ottenute con due tipi di aggiunte, e cioè:

— postulanti di stabilità e comprensione per relazioni;
— postulati di esistenza di relazioni puramente «combinatorie» del tipo di *rfst* e *rsnd*.

In effetti, combinando opportunamente postulati dei due tipi suddetti, si costruiscono relazioni contraddittorie; ad esempio in [1] si rivela che, usando i postulati AR.1, 2, 4 (v. [1], cap. VI, § 6) si costruisce una relazione r «di Russell» tale che, date due relazioni qualsiasi r_1 e r_2, si ha:

$$r_1\, r\, r_2 \Leftrightarrow \neg\, (r_2\, r_2\, r_1)$$

da cui, prendendo $r_1 = r_2 = r$, segue:

$$r\, r\, r \Leftrightarrow \neg\, (r\, r\, r)\,.$$

Tutti i risultati di inconsistenza del presente paragrafo si dimostrano mediante la costruzione di varianti della precedente «relazione di Russell».

I postulati di stabilità che considereremo riguardano la *congiunzione di relazioni* (data dall'operazione *conjr*) e la *composizione di relazioni* (operazione *comprel*); inoltre considereremo un *principio di comprensione per relazioni* (nel quale useremo l'operazione *assrel*).

Tali postulati corrispondono ad altrettanti ampliamenti proposti in [1] (eventualmente riformulati in modo più conveniente per noi), ma saranno qui numerati in modo indipendente da [1].

Consideriamo dunque i seguenti postulati:

ER.1 (*congiunzione di relazioni*)

conjr è *un'operazione che trasforma ogni coppia di relazioni in una relazione.*

$$conjr\,(r', r'') = r \Rightarrow (x\,r\,y \Leftrightarrow x\,r'\,y \wedge x\,r''\,y).$$

conjr è *idempotente, associativa e commutativa e si ha*:

$$conjr\,(r'^{-1}, r''^{-1}) = (conjr\,(r', r''))^{-1}.$$

ER.2 (*composizione di relazioni*)

comprel è *un'operazione che trasforma ogni coppia di relazioni in una relazione.*

$$comprel\,(r', r'') = r \Rightarrow (x\,r\,y \Leftrightarrow \exists t\,(x\,r''\,t \wedge t\,r'\,y)).$$

comprel è *associativa e si ha*:

$$comprel\,(r'^{-1}, r''^{-1}) = comprel\,(r''\,r')^{-1}$$

$$comprel\,(r, rid) = comprel\,(rid, r) = r.$$

ER.3 (*principio di comprensione per relazioni*)

assrel è *un'operazione che trasforma ogni paio relazionale* z *tale che* $z < (rqual, qpair)$ *in una relazione.*

$$assrel\,(r', x) = r \Rightarrow (t\,rrel\,r \Leftrightarrow t\,r'\,x).$$

$$assrel\,(rrel, r) = r.$$

In base a ER.1, l'operazione *conjr* ha le proprietà di una congiunzione di relazioni; pertanto porremo $r' \wedge r'' = conjr\,(r', r'')$ e diremo che $r' \wedge r''$ è la *congiunzione* di r' e r''.

Analogamente, in base a ER.2, *comprel* ha le proprietà di una composizione di relazioni, e quindi porremo $r' \circ r'' = comprel\,(r', r'')$ e diremo che $r' \circ r''$ è la *composizione* di r' e r''.

Infine *assrel* associa a ogni paio relazionale z la cui estensione è costituita di coppie, una relazione il cui «grafico» coincide con l'estensione di z; scriveremo *ra* z per *assrel* z, e diremo che *ra* z è la *relazione associata* a z.

Inoltre nel seguito, in analogia con le operazioni, quando r è una relazione scriveremo $r \downarrow x$ per $\exists y$: $x\ r\ y$ e scriveremo $r \uparrow x$ per $\exists y$: $y\ r\ x$.

(A rigore, dato che uno stesso oggetto della teoria A può essere insieme una relazione e un'operazione, per giustificare il doppio uso dei simboli $\downarrow$ e $\uparrow$ occorre un assioma di *compatibilità* tra tipi di oggetti diversi; d'altronde, nella teoria A un tale assioma è presente, ed è precisamente l'assioma 9.A di [1]).

Infine, diremo che un paio relazionale (r, x) è *vuoto* se e solo se $\neg\,(r \uparrow x)$, cioè $\neg\,(\exists t$: $trx)$.

Notiamo che, se v è un paio relazionale vuoto, allora si ha:

$$w < v \Leftrightarrow w \text{ è } \textit{un paio relazionale vuoto}.$$

I risultati d'inconsistenza che dimostreremo in questo paragrafo sono riuniti nel seguente teorema:

TEOREMA 2.1.
Le seguenti estensioni della teoria A sono contraddittorie:

i) A + ER.1 + «*Esiste una relazione* $reqp_1$ *tale che* $z\ reqp_1\ w \Leftrightarrow z = (x, y) \wedge w = (x, y')$».

ii) A + ER.2 + «*Esiste una relazione rdiag tale che* $\forall x, y$: $x\ rdiag\ y \Leftrightarrow y = (x, x)$».

iii) A + ER.3.

Si nota che le relazioni $reqp_1$ e *rdiag* dei punti i) e ii) sono rispettivamente una *relazione d'equivalenza rispetto all'operazione* p_1 e una *relazione diagonale*: in questo senso $reqp_1$ e *rdiag* hanno un carattere di *relazioni combinatorie*.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA:

i) Consideriamo la relazione

$$r_1 = reqp_1 \wedge rsnd^{-1} \wedge rginc .$$

Risulta che, se r e r' sono due relazioni, allora si ha:

$$(r', x')\, r_1 (r, x) \Leftrightarrow r' = r, \qquad x' = (r, x)\ e\ (r, (r, x)) < (r, x)$$

e quindi:

$$r_1 \uparrow (r, x) \Leftrightarrow (r, (r, x)) < (r, x) . \tag{2.3}$$

Poniamo ora $c = (rid, (rnid, \phi))$.

Osserviamo che le due relazioni *rid* e *rnid* sono sicuramente diverse tra loro, in quanto si ha:

$$rid\ rid\ rid, \qquad \neg\,(rnid\ rnid\ rnid) .$$

Tenendo conto di ciò, in base alla (2.3) si verifica che il paio relazionale (r_1, c) è vuoto.

Prendiamo ora $(r, x) = (r_1, c)$ in (2.3): essendo (r_1, c) vuoto otteniamo:

$$r_1 \uparrow (r_1, c) \Leftrightarrow \neg\,[r_1 \uparrow (r_1, c)]$$

che è una contraddizione.

ii) Consideriamo la relazione

$$r_2 = rdiag^{-1} \circ rginc^{-1} \circ rdiag.$$

Per ogni relazione r, si ha:

$$rnid\, r_2\, r \Leftrightarrow \exists u, v\!: u\, rdiag^{-1}\, r \wedge u <^{-1} v \wedge rnid\ rdiag\ v$$

e quindi:

$$rnid\, r_2\, r \Leftrightarrow (r, r) < (rnid, rnid)$$

da cui, per la (2.1):

$$rnid\, r_2\, r \Leftrightarrow \neg\,(rnid\, r\, r) .$$

Infine, prendendo $r = r_2$ nella formula precedente si ottiene:

$$rnid\, r_2\, r_2 \Leftrightarrow \neg\, (rnid\, r_2\, r_2)$$

che è una contraddizione.

iii) Anzitutto, fissate due relazioni r e r', cosideriamo il paio relazionale

$$z(r, r') = (rginc^{-1}, (rcoll, \{r, r'\}))\,.$$

Si verifica facilmente che:

$$z(r, r') < (rqual, qpair)$$

quindi, per ER.3, si ha $assel \downarrow z(r, r')$: posto allora

$$\underline{r} = ra\, z(r, r')$$

dalla (2.2) segue:

$$rrel^{-1}\, \underline{r}\, z \Leftrightarrow z = (x, y)\,, \qquad x\, r\, y \quad e \quad x\, r'\, y\,. \tag{2.4}$$

Ora, ovviamente si ha

$$(rrel^{-1}, \underline{r}) < (rqual, qppair)$$

e quindi $assrel \downarrow (rrel^{-1}, \underline{r})$; quindi, posto

$$r \underline{\wedge} r' = ra\, (rrel^{-1}, \underline{r})$$

dalla (2.4) segue:

$$x(r \underline{\wedge} r')\, y \Leftrightarrow x\, r\, y \wedge x\, r'\, y\,.$$

(dunque il simbolo $\underline{\wedge}$ dà una «congiunzione di relazioni»).

Consideriamo ora il paio relazionale

$$b = (rginc, (rcoll, \phi))\,.$$

Osserviamo che è $b < (rqual, qpair)$ e quindi $ra\, b$ esiste; sia allora

$$r_3 = (ra\, b) \underline{\wedge}\, rid\,.$$

Risulta che r_3 ha la seguente proprietà:

$$u\, r_3\, v \Leftrightarrow qrel\, v\,, \qquad u = v \;e\; \neg\, (v \uparrow v)$$

da cui segue, per ogni relazione r:

$$r_3 \uparrow r \Leftrightarrow \neg\, (r \uparrow r)\,.$$

da cui infine, prendendo $r = r_3$, si ottiene:

$$r_3 \uparrow r_3 \Leftrightarrow \neg\, (r_3 \uparrow r_3)$$

che è una contraddizione. Q.E.D.

Si osserva che, nella dimostrazione del teorema 2.1, l'assioma 10.C è coinvolto in modo essenziale; congetturiamo che l'insieme dei postulati ER.1-3 siano compatibili con la teoria $A - 10.C$.

Complessivamente, il teorema 2.1 usa solo una parte degli assiomi della teoria A. Ad esempio, la seguente sottolista di assiomi risulta sufficiente per dimostrare il teorema (e non è la minima sottolista possibile):

1.A-J, 2.A-F, 4.C, 5.A, E, 10.C.

Tra gli assiomi suddetti, solo quelli appartenenti ai gruppi 1 e 2 e l'assioma 10.C sono esposti qui; per gli altri assiomi rimandiamo a [1].

Infine osserviamo che la dimostrazione del teorema 2.1 usa le manipolazioni di relazioni introdotte dai postulati ER.1-3, e non le corrispondenti operazioni: ad esempio, in i), ER.1 può essere sostituito da un enunciato più debole, del tipo «due qualsiasi relazioni ammettono una congiunzione», ecc.; tuttavia abbiamo dato agli assiomi ER.1-3 la forma di introduzione di altrettante operazioni per coerenza con l'uso della teoria A.

3. UNA RELAZIONE COMBINATORIA INCONSISTENTE CON LA TEORIA A.

Nel § precedente abbiamo visto che, aggiungendo alla teoria A alcuni postulati di stabilità o comprensione per relazioni, e assumendo in più l'esistenza di certe relazioni «combinatorie», si ottengono teorie inconsistenti.

In realtà, è possibile ottenere una teoria inconsistente aggiungendo ad A solamente una relazione combinatoria (un po' più complessa di quelle usate finora).

Allo scopo di enunciare e dimostrare il relativo teorema adottiamo una notazione speciale per le coppie iterate, ispirata alle convenzioni di Gödel. Precisamente poniamo:

$$(x, y) = (x, y)$$

$$(x_0, x_1, \dots, x_k) = (x_0, (x_1, \dots, x_k)) \qquad (k = 2, 3, \dots).$$

Diamo dunque il seguente:

TEOREMA 3.1.

La seguente teoria è contraddittoria:

A + «*Esiste una relazione rfib tale che*:

$$u\, \mathit{rfib}\, v \Leftrightarrow v = (a, b, c) \wedge u = (a, b, c, a, b, c)».$$

La relazione *rfib*, come vedremo, è ottenibile come *prodotto fibrato* iterato delle relazioni *rid* e *robj*.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA. Anzitutto si verifica che :

$$(3.1) \qquad (\mathit{rrel}^{-1}, r, x, y) < (\mathit{rnid}, \mathit{rrel}) \Leftrightarrow \neg\, (x\, r\, y).$$

Mediante *rfib* possiamo dare una condizione equivalente alla seguente proprietà dell'oggetto x:

$$(3.2) \qquad (\mathit{rginc}, \mathit{rnid}, \mathit{rginc}) <^{-1} (\mathit{rfib}, \mathit{rrel}^{-1}, x, \mathit{rfib}).$$

Infatti, essendo:

$$u\ rfib\ (rrel^{-1}, x, rfib) \Leftrightarrow u = (rrel^{-1}, x, rfib, rrel^{-1}, x, rfib)$$

la (3.2) si può riscrivere in questo modo:

$$(rrel^{-1}, x, rfib, rrel^{-1}, x, rfib) < (rnid, rginc^{-1})$$

ossia, per la (3.1):

$$\neg\ (rfib, rrel^{-1}, x, rfib) < x\,. \tag{3.2'}$$

Poniamo ora

$$z_0 = (rginc, rnid, rrel)\,.$$

Dato che (3.2) e (3.2′) sono equivalenti, si ha:

$$(rfib, rrel^{-1}, x, rfib) < z_0 \Leftrightarrow \neg\ [(rfib, rrel^{-1}, x, rfib) < x]$$

da cui, prendendo $x = z_0$, si ottiene:

$$(rfib, rrel^{-1}, z_0, rfib) < z_0 \Leftrightarrow \neg\ [(rfib, rrel^{-1}, z_0, rfib) < z_0]$$

che è una contraddizione. Q.E.D.

Come è per il teorema 2.1, il teorema 3.1 si dimostra usando solo una parte degli assiomi di A; la seguente sottolista di assiomi risulta sufficiente a dimostrare il teorema 3.1 (è non è la minima possibile):

1.A-J, 2.A-F, 10.C.

Dopo ripetuti tentativi, non siamo riusciti a provare l'inconsistenza con A di alcuna relazione «combinatoria» più semplice di *rfib*; riteniamo interessante il problema di stabilire se tali relazioni sono consistenti con A, singolarmente o tutte insieme (precisando opportunamente il senso delle espressioni «relazione combinatoria» e «semplicità di una relazione combinatoria»).

Consideriamo ora un ulteriore postulato di stabilità per relazioni, riguardante il *prodotto fibrato* (binario) di relazioni, che introduciamo mediante l'operazione *fibrel* nel seguente postulato:

ER.4 (*prodotto fibrato di relazioni*)

fibrel è un'operazione che trasforma ogni coppia di relazioni in una relazione.

$$fibrel\,(r', r'') = r \Rightarrow (t\,r\,z \Leftrightarrow z = (x, y) \wedge tr'\,x \wedge tr''\,y)\,.$$

In base a ER.4, l'operazione *fibrel* associa a due qualsiasi relazioni r' e r'' una relazione il cui grafico è il «prodotto fibrato» del grafico di r' e di quello di r''; pertanto, porremo $\langle r', r''\rangle = fibrel\,(r', r'')$ e diremo che $\langle r', r''\rangle$ è il *prodotto fibrato* di r' e r''.

Dal teorema 3.1 segue che ER.4 è inconsistente con A:

Corollario 3.2.

La teoria $A + \text{ER.4}$ *è contraddittoria.*

Dimostrazione. Consideriamo le seguenti relazioni:

$$r_1 = \langle rid, \langle robj, robj \rangle \rangle^{-1}$$
$$r_2 = \langle robj, \langle rid, robj \rangle \rangle^{-1}$$
$$r_3 = \langle robj, \langle robj, rid \rangle \rangle^{-1}.$$

Si verifica che:

$$z\, r_1\, a \Leftrightarrow z = (a, b, c)$$
$$z\, r_2\, b \Leftrightarrow z = (a, b, c)$$
$$z\, r_3\, c \Leftrightarrow z = (a, b, c)$$

quindi risulta che, nell'enunciato dal Teor. 3.1, possiamo porre:

$$rfib = \langle r_1, \langle r_2, \langle r_3, \langle r_1, \langle r_2, r_3 \rangle \rangle \rangle \rangle \rangle^{-1}$$

pertanto la tesi segue dal Teor.3.1. Q.E.D.

Analogamente al teor. 2.1, anche il cor. 3.2 può essere dimostrato assumendo solo l'esistenza del prodotto fibrato di due qualsiasi relazioni, anzichè il postulato ER.4; quest'ultimo è stato scelto perché la sua forma è coerente con l'uso della teoria A.

4. Postulati di stabilità per operazioni

I risultati di inconsistenza che daremo in questo paragrafo usano in modo essenziale, oltre alla parte di base della teoria A che abbiamo esposto nel § 1, anche la presenza, nella teoria A, di un'operazione che dà l'*immagine di collezioni tramite operazioni*.

Tale operazione è chiamata *hat* (che in inglese significa *cappello*) per il fatto che, in [1], l'immagine di una collezione C tramite un'operazione f si denota con $\hat{f}(C)$.

L'assioma che introduce *hat* nella teoria A è il seguente:

Assioma 15.E.

qop hat, e hat $x = y$ *se e solo se* $x = (f, C)$, f *è un'operazione,* C *e* y *sono collezioni, e* $t \in y$ *esattamente quando esiste un* $s \in C$ *tale che* $t = fs$.

Seguendo l'uso suddetto, scriveremo $\hat{f}(C)$ per *hat* (f, C).

L'operazione *hat* è molto espressiva; ad esempio, per ogni operazione f e per ogni x, risulta:

$$\hat{f}(C)(\{x\}) = \begin{cases} \{fx\}, & \text{se f} \downarrow \text{x} \\ \phi, & \text{se } \neg(f \downarrow x). \end{cases}$$

da cui:

$$\hat{f}(C)(\{x\}) = \phi \Leftrightarrow \neg(f \downarrow x)\,. \tag{4.1}$$

L'operazione *hat*, come la relazione *rginc*, è piuttosto problematica dal punto di vista della consistenza; in effetti, a causa di *hat*, la teoria A risulta inconsistente con alcuni postulati di *stabilità per operazioni*.

Dimostreremo i corrispondenti risultati di inconsistenza mediante la costruzione di un'operazione «di Curry» f tale che, per ogni operazione g:

$$f \downarrow g \Leftrightarrow \neg (g \downarrow g)$$

da cui, prendendo $g = f$, si ottiene:

$$f \downarrow f \Leftrightarrow \neg (f \downarrow f) .$$

I postulati di stabilità che considereremo danno la *composizione di operazioni* (introdotta mediante l'operazione *comp*), il *prodotto fibrato di operazioni* (*fib*) e la *separazione di operazioni* (*sep*).

Il postulato sulla composizione è l'assioma AO.1 di [1], e gli altri due sono modellati su altrettanti assiomi di A riguardanti i sistemi, come suggerito in [1].

Consideriamo dunque i seguenti postulati:

EO.1 (*composizione di operazioni*).
comp è un'operazione che trasforma ogni coppia di operazioni in un'operazione.
$comp(f, g) = h \Rightarrow [(h \downarrow x \Leftrightarrow (g \downarrow x \wedge f \downarrow gx)) \wedge (hx = f(gx))]$.
comp è associativa e $comp(id, f) = comp(f, id) = f$.

EO.2 (*prodotto fibrato di operazioni*).
fib è *un'operazione che trasforma ogni coppia di operazioni in un'operazione.*
$fib(f, g) = h \Rightarrow [(h \downarrow x \Leftrightarrow (f \downarrow x \wedge g \downarrow x)) \wedge (hx = (fx, gx))]$.

EO.3 (*separazione di operazioni*).
sep è *un'operazione che trasforma ogni operazione in un'operazione i cui valori sono operazioni di «grafico» non vuoto.*
$sep f = g \Rightarrow [u = (gx) y \Leftrightarrow u = f(x, y)]$.

In base a EO.1 l'operazione *comp* ha il significato di una composizione di operazioni; scriveremo $f \circ g$ per $comp(f, g)$.

In base a EO.2, l'operazione *fib* trasforma due qualsiasi operazioni f e g in un'operazione definita ove sia f che g lo sono, e i cui valori sono la coppia del corrispondente valore di f e del corrispondente valore di g; scriveremo $\langle f, g \rangle$ per $fib(f, g)$ e diremo che $\langle f, g \rangle$ è il *prodotto fibrato* di f e g.

Infine, il significato di EO.3 è il seguente: per ogni operazione f, l'operazione *sep f* assegna un'operazione a ogni elemento x della «prima proiezione del dominio» di f; per ogni tale x, poi, l'operazione $(sep f)\, x$ trasforma y in $f(x, y)$, quando quest'ultimo esiste; pertanto, *sep f* considera *separatamente* la prima e la seconda componente delle coppie del «grafico» di f.

I risultati d'inconsistenza che dimostreremo in questo paragrafo sono dati dal seguente teorema:

Teorema 4.1.
Le seguenti estensioni di A *sono contraddittorie*:

i) $A + \mathrm{EO.1}$

ii) $A + \mathrm{EO.2} + \mathrm{EO.3}$.

Se confrontiamo il teorema 4.1 col teorema 2.1 e col cor. 3.2, notiamo alcune analogie nel comportamento delle relazioni e delle operazioni: la composizione sembra possibile solo a prezzo di ipotesi innaturali, per le relazioni, ed è impossibile per le operazioni; il prodotto fibrato è impossibile per le relazioni e, per le operazioni, sembra possibile solo se si rinuncia a meccanismi di «smontaggio di coppie» come l'operazione *sep*.

Dimostrazione del teorema:

i) Anzitutto, la teoria A introduce un'operazione *generatrice di sistemi unitari, gus* (v. [1], cap. II, §2), e un'operazione che dà il *prodotto cartesiano di sistemi univalenti di collezioni, cart* (v. [1], cap. IV, § 1).

Risulta che l'operazione composta $cart \circ gus$ è iniettiva e quindi, per l'assioma 2.G, ammette un'inversa.

Posto allora

$$f_1 = (cart \circ gus)^{-1} \circ sing \circ gus \circ diag\,.$$

si verifica che, per ogni oggetto x, si ha:

$$f_1 x = (x, \{x\})$$

da cui, per ogni operazione g, si ricava:

$$(hat \circ f_1)\, g = \hat{g}(\{g\})$$

e quindi da (4.1) segue:

$$(hat \circ f_1)\, g = \phi \Leftrightarrow \neg\,(g \downarrow g)\,. \tag{4.2}$$

Sia ora f_2 un'operazione definita solo sull'insieme vuoto; nella teoria A, l'esistenza di una tale operazione si dimostra, ad es., usando l'essioma 11.F (e gli assiomi 6.A-E, 7.A-B, 11.A, E, G, che implicano che i singoli sono collezioni piccole); allo stesso modo si dimostra che, per ogni oggetto x, esiste un'operazione definita solo su x.

Consideriamo un'unlteriore operazione composta:

$$f_3 = f_2 \circ hat \circ f_1\,.$$

Da (4.2), per come abbiamo scelto f_2 segue, per ogni operazione g:

$$f_3 \downarrow g \Leftrightarrow \neg\,(g \downarrow g)$$

da cui, prendendo $g = f_3$, si ottiene:

$$f_3 \downarrow f_3 \Leftrightarrow \neg\,(f_3 \downarrow f_3)$$

che è una contraddizione.

ii) Consideriamo anzitutto la seguente operazione iniettiva, ottenuta come prodotto fibrato:

$$f_4 = \langle id, sing \rangle$$

(si noti che f_4 ha lo stesso grafico dell'operazione f_1 usata nella dimostrazione di i)).

Essendo l'operazione f_4 iniettiva, essa ammette un'inversa, che trasforma $(x, \{x\})$ in x per ogni oggetto x.

Consideriamo ora la seguente operazione, anch'essa come prodotto fibrato:

$$f_5 = \langle hat, f_4^{-1} \rangle\,.$$

L'operazione f_5 è iniettiva (e quindi invertibile) in quanto è il prodotto fibrato dell'operazione iniettiva f_4^{-1} con l'altra operazione; inoltre si verifica che, per ogni operazione g, si ha:

$$f_5 \uparrow (\phi, g) \Leftrightarrow \hat{g}(\{g\}) = \phi$$

da cui per (4.1) segue:

$$f_5 \uparrow (\phi, g) \Leftrightarrow \neg (g \downarrow g),$$

ossia, passando a f_5^{-1}:

$$f_5^{-1} \downarrow (\phi, g) \Leftrightarrow (g \downarrow g). \tag{4.3}$$

Ora, nella teoria A si dimostra in molti modi l'esistenza di operazioni non definite su se stesse: ad es., se f è un'operazione definita solo sull'operazione id (tali f esistono nella teoria A, per quanto abbiamo già osservato) allora è $id \neq f$ per ragioni ovvie, e quindi $\neg(f \downarrow f)$.

Ma allora, in base a EO.3, si ha:

$$sep f_5^{-1} \downarrow \phi.$$

Consideriamo infine la seguente operazione:

$$f_6 = (sep f_5^{-1})\, \phi.$$

In base a (4.3) si verifica che, per ogni operazione g, si ha:

$$f_6 \downarrow g \Leftrightarrow \neg (g \downarrow g)$$

da cui, ponendo $g = f_6$, segue:

$$f_6 \downarrow f_6 \Leftrightarrow \neg (f_6 \downarrow f_6)$$

che è una contraddizione. Q.E.D.

Come i teoremi che abbiamo dato in precedenza, anche il teorema 4.1 utilizza solo una parte degli assiomi della teoria A; la seguente lista di assiomi risulta sufficiente per dimostrare il teorema (e non è la minima possibile):

1.A-J, 2.A-J, 4.A-E, 5.A-E, 6.A-F, 7.A-B, 10.C, 11.A-H, 13.A, 15.E.

Tra gli assiomi suddetti, solo quelli appartenenti ai gruppi 1 e 2, il 10.C e il 15.C sono esposti qui; per gli altri assiomi rimandiamo a [1].

Infine osserviamo che nell'enunciato del teor. 4.1, analogamente al teor. 2.1 e al cor. 4.2, i postulati EO.1-3 possono essere sostituiti da altrettanti enunciati di eseguibilità di manipolazioni di operazioni (ad es. EO.1 può essere sostituito con «due qualsiasi operazioni ammettono una composizione», ecc.); tuttavia abbiamo preferito usare i postulati EO.1-3 perché la loro forma à più coerente con l'uso della teoria A.

Riferimento

[1] Clavelli M., De Giorgi E., Forti M. e Tortorelli V. M., 1988. *A self-reference oriented theory for the foundations of Mathemaitcs.* In *Analyse Mathématique et applications* Gauthier-Villars, Paris: 67-115.