Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Umberto Ricciuti, Vincenzo Dipaola

Analisi generale delle vibrazioni libere trasversali dei gusci sferici ortotropi ribassati

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **82** (1988), n.4, p. 697–709.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1988_8_82_4_697_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1988.

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXII (1988), pp. 697-709

Meccanica dei solidi. — *Analisi generale delle vibrazioni libere trasversali dei gusci sferici ortotropi ribassati* (*). Nota (**) di UMBERTO RICCIUTI e VINCENZO DIPAOLA (***), presentata dal socio E. GIANGRECO.

ABSTRACT. — *General analysis of free transversal vibrations of spherical orthotropic shallow shells.* The problem of free transversal vibrations of spherical orthotropic shallow shells is solved in its generality. Such a problem had been dealt with in a preceding work within the limits of the field of axialsymmetric vibrations. The integration of motion equations is obtained by means of particular developments in series, which may be generated thanks to a suitable substitution of one of the indipendent variables.

KEY WORDS: Vibrations; Orthotropic; Shallow; Shells.

RIASSUNTO. — Si risolve nella sua generalità il problema delle vibrazioni libere trasversali dei gusci sferici ortotropi ribassati, che in un precedente Lavoro era stato affrontato limitatamente al campo delle vibrazioni assialsimmetriche. L'integrazione delle equazioni del moto è conseguita per serie mediante particolari sviluppi, generabili grazie ad un'opportuna sostituzione di una delle variabili indipendenti.

1. INTRODUZIONE

Scopo del presente Lavoro è la generalizzazione dell'analisi delle vibrazioni libere trasversali dei gusci sferici ortotropi ribassati, che in una precedente memoria [2] era stata svolta con riguardo alle sole vibrazioni assialsimmetriche. Le ipotesi di base sono perciò quelle indicate in tale memoria e nella [3]: si suppone in particolare che sia costante lo spessore del guscio, che l'ortotropia sia «di materiale» o ad essa riconducibile, che le relative direzioni principali coincidano, in ogni punto, con quelle dei meridiani e dei paralleli e che lungo le stesse direzioni risultino costanti i moduli di elasticità ed i coefficienti di Poisson e, conseguentemente, tutti i parametri di rigidezza.

L'intera trattazione viene svolta nell'ambito della teoria generale dei gusci ribassati [5] [7] ed in particolare di quella di E. Reissner relativa alle volte ribassate sferiche [11] [12]. Le equazioni del moto vengono dedotte, com'è lecito per l'analisi delle vibrazioni trasversali in strutture ribassate, trascurando i contributi delle forze d'inerzia tangenziali in rapporto a quelli delle forze trasversali. Si mostra come esse possano essere integrate, anche nel presente studio, per serie e che le maggiori difficoltà che si incontrano rispetto al caso delle vibrazioni assialsimmetriche, legate all'acquisizione della indipendenza degli sviluppi, possano essere rimosse mercé l'introduzione di una diversa variabile indipendente e di conseguenti particolari sviluppi che hanno la prerogativa di risultare linearmente indipendenti in ogni caso. Anzichè sotto complesse e molteplici forme, ciascuna correlata con particolari combinazioni dei va-

(*) Lavoro eseguito con il contributo C.N.R.
(**) Pervenuta all'Accademia il 29 settembre 1988.
(***) Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni, Università di Bari.

lori dei parametri in gioco, la soluzione può così essere espressa in un'unica forma, comoda anche sul piano applicativo, ed adatta in particolare allo studio tanto delle vibrazioni asimmetriche che di quelle assialsimmetriche. Peraltro la minore rapidità di convergenza che tali sviluppi presentano rispetto a quelli classici non gioca certo, oggi, a sfavore del loro impiego.

La trattazione è riferita al caso generale dei gusci aperti in sommità ed è valida per la ricerca delle autofrequenze e delle autofunzioni per condizioni di vincolo generiche ai due bordi.

2. Le equazioni del problema

Con riferimento alla fig. 1 siano:

R il raggio della superficie sferica;

r il raggio del generico parallelo;

θ la longitudine del generico meridiano;

r_e, r_i i raggi di base e di sommità del guscio;

u, v, w le componenti dello spostamento nelle direzioni dei meridiani, dei paralleli e della normale alla superficie;

p_r, p_θ, p le componenti del carico ordinatamente nelle medesime direzioni.

Siano inoltre:

N_r, N_θ, $N_{r\theta}$; M_r, M_θ, $M_{r\theta}$; T_r, T_θ le componenti membranali, flettenti, torcenti e taglianti dell'azione interna;

ε_r, ε_θ, $\gamma_{r\theta}$; χ_r, χ_θ, $\chi_{r\theta}$ le componenti estensionali e flessionali della deformazione;

h lo spessore del guscio;

E_r, E_θ, G, ν_r, ν_θ i moduli di elasticità ed i coefficienti di Poisson;

μ la densità superficiale di massa, supposta uniforme;

ω le pulsazioni delle vibrazioni libere;

m il numero dei meridiani nodali.

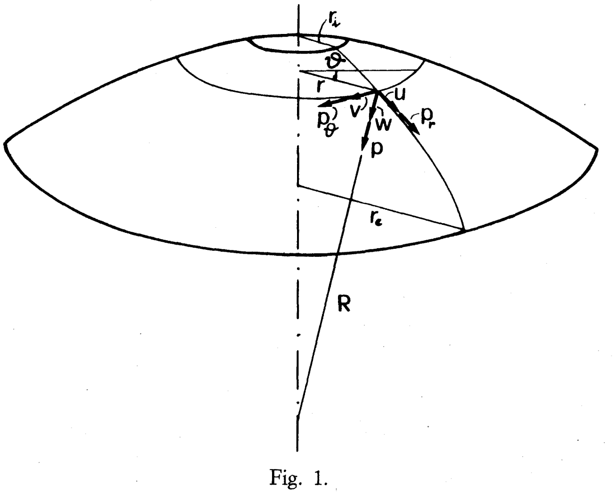

Fig. 1.

A base della trattazione devono porsi, in assenza di assialsimmetria, le seguenti equazioni generali di equilibrio [11]:

$$
(1)\qquad \begin{cases}
\dfrac{\partial(\rho N_r)}{\partial\rho} + \dfrac{\partial N_{r\theta}}{\partial\theta} - N_\theta + r_e\rho p_r = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial(\rho N_{r\theta})}{\partial\rho} + \dfrac{\partial N_\theta}{\partial\theta} + N_{r\theta} + r_e\rho p_\theta = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial(\rho T_r)}{\partial\rho} + \dfrac{\partial T_\theta}{\partial\theta} + \dfrac{r_e}{R}\rho(N_r + N_\theta) + r_e\rho p = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial(\rho M_r)}{\partial\rho} + \dfrac{\partial M_{r\theta}}{\partial\theta} - M_\theta - r_e\rho T_r = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial(\rho M_{r\theta})}{\partial\rho} + \dfrac{\partial M_\theta}{\partial\theta} + M_{r\theta} - r_e\rho T_\theta = 0\,,
\end{cases}
$$

ove è introdotta la variabile adimensionale:

$$
(2)\qquad \rho = \frac{r}{r_e}\,,
$$

le relazioni, anch'esse generali, tra componenti della deformazione e componenti dello spostamento:

$$
(3)\qquad \begin{cases}
\varepsilon_r = \dfrac{1}{r_e}\dfrac{\partial u}{\partial\rho} - \dfrac{w}{R} \\[2ex]
\varepsilon_\theta = \dfrac{1}{r_e}\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial\theta} + \dfrac{u}{\rho}\right) - \dfrac{w}{R} \\[2ex]
\gamma_{r\theta} = \dfrac{1}{r_e}\left[\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\theta} + \rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{v}{\rho}\right)\right]
\end{cases}
$$

$$
(4)\qquad \begin{cases}
\chi_r = \dfrac{1}{r_e^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial\rho^2} \\[2ex]
\chi_\theta = \dfrac{1}{r_e^2}\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial w}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right) \\[2ex]
\chi_{r\theta} = \dfrac{2}{r_e^2}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial w}{\partial\theta}\right)
\end{cases}
$$

ed i seguenti legami, tipici dei gusci ortotropi, che sussistono tra componenti dell'azione interna e componenti della deformazione [4]:

$$
(5)\qquad \begin{cases}
M_r = -(K_r\chi_r + K_\nu\chi_\theta) \\
M_\theta = -(K_\nu\chi_r + K_\theta\chi_\theta) \\
M_{r\theta} = -K_{r\theta}\chi_{r\theta}
\end{cases}
$$

$$
(6)\qquad \begin{cases}
\varepsilon_r = d_r N_r - d_\nu N_\theta \\
\varepsilon_\theta = -d_\nu N_r + d_\theta N_\theta \\
\gamma_{r\theta} = d_{r\theta} N_{r\theta}\,.
\end{cases}
$$

Nelle (5) e (6) figurano le rigidezze flessionali e torsionali K_r, K_θ, K_ν, $K_{r\theta}$, espresse dalle:

$$\text{(7)}\qquad \begin{cases} K_r = \dfrac{E_r h^3}{12(1-\nu_r\nu_\theta)} \\ K_\theta = \dfrac{E_\theta h^3}{12(1-\nu_r\nu_\theta)} \\ K_\nu = K_r\nu_\theta = K_\theta\nu_r \\ K_{r\theta} = \dfrac{Gh^3}{12} \end{cases}$$

ed i coefficienti estensionali della deformazione d_r, d_θ, d_ν, $d_{r\theta}$, forniti dalle:

$$\text{(8)}\qquad \begin{cases} d_r = \dfrac{1}{E_r h} \\ d_\theta = \dfrac{1}{E_\theta h} \\ d_\nu = d_r\nu_r = d_\theta\nu_\theta \\ d_{r\theta} = \dfrac{1}{Gh}\,. \end{cases}$$

Il problema generale delle vibrazioni libere trasversali dei gusci ortotropi ribassati, come quello particolare delle vibrazioni assialsimmetriche, può essere formulato riducendone le incognite a due e identicandole con la componente w dello spostamento e con una funzione f degli sforzi membranali definita in guisa che:

$$\text{(9)}\qquad \begin{cases} N_r = \dfrac{RK_r}{r_e^4}\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right) \\ N_\theta = \dfrac{RK_r}{r_e^4}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} \\ N_{r\theta} = -\dfrac{RK_r}{r_e^4}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\right). \end{cases}$$

Il primo dei legami tra tali incognite può dedursi dalle (1) in cui, per le ipotesi innanzi precisate, si ponga preliminarmente:

$$\text{(10)}\qquad p_r = p_\theta = 0, \qquad p = -\mu\ddot{w}.$$

Osservato infatti che la prima coppia di tali equazioni risulta, in virtù delle (9), identicamente soddisfatta, si può trarre dalla terza, per sostituzione delle componenti taglianti T_r e T_θ dedotte dalle ultime due, l'equazione:

$$\text{(11)}\qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2(\rho M_r)}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial^2 M_{r\theta}}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial\theta} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial M_\theta}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 M_\theta}{\partial\theta^2} + \\ + \frac{r_e^2}{R}(N_r + N_\theta) - \mu r_e^2\ddot{w} = 0$$

che, a sua volta, tenute presenti le (4), (5), (9), si trasforma nella:

$$K_r\left(\frac{\partial^4 w}{\partial\rho^4}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial^3 w}{\partial\rho^3}\right)-\frac{K_\theta}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4}-\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}\right)+ \tag{12}$$

$$+\frac{2H}{\rho^2}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial\rho^2\partial\theta^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 w}{\partial\rho\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)-K_r\Delta_2 f+\mu r_e^4\ddot{w}=0$$

avendo posto:

$$\Delta_2(\cdot\cdot)=\frac{\partial^2(\cdot\cdot)}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\cdot\cdot)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2(\cdot\cdot)}{\partial\theta^2} \tag{13}$$

ed introdotto la «rigidezza globale»;

$$H=K_v+2K_{r\theta}\,. \tag{14}$$

Il secondo legame si può far scaturire invece dalla condizione di compatibilità:

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varepsilon_r}{\partial\theta^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varepsilon_r}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial\rho}\right)-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2(\rho\gamma_{r\theta})}{\partial\rho\partial\theta}+\frac{1}{R}\Delta_2 w=0 \tag{15}$$

che discende dalle (3) e che, per effetto delle (6) e (9), si trasforma nell'equazione:

$$d_\theta\left(\frac{\partial^4 f}{\partial\rho^4}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial^3 f}{\partial\rho^3}\right)-\frac{d_r}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 f}{\partial\theta^4}-\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right)+ \tag{16}$$

$$+\frac{2g}{\rho^2}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial\rho^2\partial\theta^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 f}{\partial\rho\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right)+\frac{r_e^4}{K_rR^2}\Delta_2 w=0$$

ove è introdotta la «deformabilità globale» g, definita dalla:

$$2g=d_{r\theta}-2d_v\,. \tag{17}$$

3. Il procedimento d'integrazione

Ricercando le soluzioni a variabili separate:

$$\begin{cases} w(\rho,\theta,t)=W(\rho)\cos m\,\theta e^{i\omega t}\\ f(\rho,\theta,t)=F(\rho)\cos m\,\theta e^{i\omega t}\end{cases}\qquad (m=0,1,2,\dots) \tag{18}$$

le equazioni (12) e (16), che governano il problema, si traducono in un sistema ordinario cui può darsi la forma:

$$\begin{cases} L_1(W)-L_2(F)-\gamma^4\rho^3W=0\\ L_1(F)+\alpha^4L_2(W)=0\end{cases}\qquad (0<\rho\leqslant 1) \tag{19}$$

introducendo gli operatori:

$$L_1(\cdot\cdot)=\rho^3\frac{d^4(\cdot\cdot)}{d\rho^4}+2\rho^2\frac{d^3(\cdot\cdot)}{d\rho^3}-A\left[\rho\frac{d^2(\cdot\cdot)}{d\rho^2}-\frac{d(\cdot\cdot)}{d\rho}\right]-B\frac{(\cdot\cdot)}{\rho}, \tag{20}$$

$$L_2(\cdot\cdot) = \rho^2 \frac{d}{d\rho}\left[\rho \frac{d(\cdot\cdot)}{d\rho}\right] - m^2 \rho(\cdot\cdot), \tag{21}$$

i parametri adimensionali:

$$\lambda = \left(\frac{K_\theta}{K_r}\right)^{1/2} = \left(\frac{E_\theta}{E_r}\right)^{1/2} = \left(\frac{d_r}{d_\theta}\right)^{1/2} = \left(\frac{\nu_\theta}{\nu_r}\right)^{1/2}, \tag{22}$$

$$\alpha = \frac{r_e}{(K_r d_\theta R^2)^{1/4}}, \tag{23}$$

$$\gamma = r_e \left(\frac{\mu\omega^2}{K_r}\right)^{1/4}, \tag{24}$$

assumendo H e g coincidenti rispettivamente col valore medio geometrico delle rigidezze flessionali K_r e K_θ e dei coefficienti estensionali d_r e d_θ [1]:

$$\begin{cases} H = \sqrt{K_r K_\theta} \\ g = \sqrt{d_r d_\theta} \end{cases} \tag{25}$$

e ponendo infine:

$$A = \lambda(\lambda + 2m^2); \qquad B = \lambda m[\lambda(2 - m^2) + 2]. \tag{26}$$

L'integrazione del sistema (19), per il quale $\rho = 0$ rappresenta un punto singolare regolare, può effettuarsi per serie a partire da sviluppi di W ed F generati in tale intorno. La struttura delle conseguenti equazioni indiciali è tale tuttavia da porre, in diversi casi fissati dalla particolarità dei valori dei parametri in gioco, complessi problemi circa l'acquisizione dell'indipendenza lineare degli integrali. Tali problemi, inesistenti nell'analisi delle vibrazioni assialsimmetriche dei gusci ortotropi, possono comunque essere risolti con procedimenti analoghi a quelli adottati nella nota [1] ma con l'obbligo di strutturare la soluzione sotto complesse e molteplici forme.

Notevolmente più semplice sul piano analitico e soprattutto più comodo su quello applicativo è il procedimento d'integrazione che qui si propone, basato sulla sostituzione della variabile ρ con la:

$$x = 1 - \rho, \tag{27}$$

che consente di ricercare gli integrali particolari sotto forma di sviluppi nell'intorno di $x = 0$, che è punto ordinario del sistema. Quest'ultima circostanza assicura infatti che tali sviluppi, oltreché convergenti in detto intorno, risultino linearmente indipendenti in ogni caso e permette perciò di esprimere, come già accennato, la soluzione generale in un'unica forma, adatta per qualsiasi combinazione dei

(1) Le espressioni (25) scaturiscono da una valutazione approssimata di $K_{r\theta}$ e $d_{r\theta}$, fatta secondo le:

$$K_{r\theta} = \sqrt{K_r K_\theta}(1 - \sqrt{\nu_r \nu_\theta})/2; \qquad d_{r\theta} = \sqrt{d_r d_\theta}(1 + \sqrt{\nu_r \nu_\theta})$$

che non coinvolgono il modulo di elasticità tangenziale G, di complessa determinazione per i materiali ortotropi, e che sono suggerite dall'analogia con formule valide per i materiali isotropi. Il loro impiego, corrente nella letteratura (Cfr. [6], pp. 125-127 e [8], p. 302), consente trattazioni sufficientemente approssimate per le applicazioni tecniche.

valori dei parametri e valida, in particolare, per l'analisi delle vibrazioni sia assialsimmetriche che asimmetriche.

Con la sostituzione (27) il sistema (19) diviene:

$$\begin{cases} \bar{L}_1(W) - \bar{L}_2(F) - \gamma^4(1-x)^3 W = 0 \\ \bar{L}_1(F) + \alpha^4 \bar{L}_2(W) = 0, \end{cases} \qquad (0 \leq x < 1) \tag{28}$$

essendo gli operatori (20) e (21) sostituiti dagli operatori:

$$\bar{L}_1(\cdot) = (1-x)^3 \frac{d^4(\cdot)}{dx^4} - 2(1-x)^2 \frac{d^3(\cdot)}{dx^3} - A\left[(1-x)\frac{d^2(\cdot)}{dx^2} + \frac{d(\cdot)}{dx}\right] - B\frac{(\cdot)}{1-x} \tag{29}$$

$$\bar{L}_2(\cdot) = (1-x)^3 \frac{d^2(\cdot)}{dx^2} - (1-x)^2 \frac{d(\cdot)}{dx} - m^2(1-x)(\cdot), \tag{30}$$

e può essere integrato ricercando sue soluzioni particolari nella forma anzidetta:

$$\begin{cases} W = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+s} \\ F = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^{j+k}. \end{cases} \tag{31}$$

I coefficienti e gli esponenti caratteristici degli sviluppi (31) si derminano, grazie al principio di identità dei polinomi e senza difficoltà di ordine concettuale, introducendo le (31) stesse e lo sviluppo in serie di Mac Laurin della funzione $1/(1-x)$ nel sistema (28).

Fissando i due diversi legami:

$$k = s + 2 \tag{32}$$

$$k = s - 2 \tag{33}$$

tra k ed s, si deducono otto integrali linearmente indipendenti, distinti in due gruppi di quattro ciascuno.

Il primo, corrispondente alla scelta (32), è rappresentato dalle serie:

$$\begin{cases} W_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(i)} x^{j+s_i} \\ F_i = \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{(i)} x^{j+s_i+2} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{34}$$

in cui è

$$s_1 = 0; \quad s_2 = 1; \quad s_3 = 2; \quad s_4 = 3 \tag{35}$$

ed i cui coefficienti, posto:

$$a_0^{(i)} = 1,$$

si valutano tramite le formule ricorrenti ([2]):

$$a_j^{(i)} = \frac{[3(j+s_i)-10]a_{j-1}^{(i)}}{j+s_i} - \frac{\{(j+s_i-4)[3(j+s_i)-11]-A\}a_{j-2}^{(i)}}{\prod_{h=0}^{1}(j+s_i-h)} + \tag{36}$$

$$+ \frac{\left\{(j+s_i-4)\left[\prod_{h=4}^{5}(j+s_i-h)-A\right]+A\right\}a_{j-3}^{(i)}}{\prod_{h=0}^{2}(j+s_i-h)} + \frac{b_{j-4}^{(i)}}{\prod_{h=0}^{1}(j+s_i-h)} +$$

$$- \frac{[3(j+s_i)-11]b_{j-5}^{(i)}}{\prod_{h=0}^{2}(j+s_i-h)} + \frac{1}{\prod_{h=0}^{3}(j+s_i-h)}\left\{B\sum_{h=0}^{j-4} a_h^{(i)} + \right.$$

$$+\{(j+s_i-4)[3(j+s_i)-13]-m^2\}b_{j-6}^{(i)} - [(j+s_i-5)^2-m^2]b_{j-7}^{(i)} +$$

$$\left. +\gamma^4(a_{j-4}^{(i)}-3a_{j-5}^{(i)}+3a_{j-6}^{(i)}-a_{j-7}^{(i)})\right\} \qquad (j \geqslant 7)$$

$$b_j^{(i)} = -\frac{\alpha^4 a_j^{(i)}}{\prod_{h=1}^{2}(j+s_i+h)} + \frac{[3(j+s_i)-4]b_{j-1}^{(i)}}{j+s_i+2} + \frac{[3(j+s_i)-5]a_{i-1}^{(i)}}{\prod_{h=0}^{2}(j+s_i+h)} + \tag{37}$$

$$- \frac{\{(j+s_i-2)[3(j+s_i)-5]-A\}b_{j-2}^{(i)}}{\prod_{h=1}^{2}(j+s_i+h)} + \frac{(j+s_i-2)\left[\prod_{h=2}^{3}(j+s_i-h)-A\right]b_{j-3}^{(i)}}{\prod_{h=0}^{2}(j+s_i+h)} +$$

$$+ \frac{1}{\prod_{h=0}^{3}(j+s_i-1+h)}\left\{B\sum_{h=0}^{j-4} b_h^{(i)} - \alpha^4\{(j+s_i-2)[3(j+s_i)-7]-m^2\}a_{j-2}^{(i)} + \right.$$

$$\left. +\alpha^4[(j+s_i-3)^2-m^2]a_{j-3}^{(i)}\right\} \qquad (j \geqslant 4).$$

Il secondo gruppo corrisponde alla scelta (33) ed è costituito dalle serie:

$$\begin{cases} W_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(i)} x^{j+s_i} \\ F_i = \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{(i)} x^{j+s_i-2} \end{cases} \qquad (i=5,6,7,8) \tag{38}$$

([2]) Per brevità sono riportate le sole formule valide per il calcolo di $a_j^{(i)}$ e $b_j^{(i)}$ «a regime», ossia rispettivamente per $j \geqslant 7$ e $j \geqslant 4$. La valutazione degli stessi coefficienti rispettivamente per $j = 1, 2, \dots 6$ e $j = 0, 1, 2, 3$ si esegue ancora con le (36) e (37), sopprimendovi però di volta in volta i termini per i quali l'indice richiamato risulta negativo. Analoga precisazione deve intendersi fatta per le successive formule (40) e (41).

per le quali è:

(39) $$s_5 = 2; \qquad s_6 = 3; \qquad s_7 = 4; \qquad s_8 = 5$$

ed i cui coefficienti, posto:

$$b_0^{(i)} = 1,$$

si valutano mediante le:

(40) $$b_j^{(i)} = \frac{[3(j+s_i)-16]b_{j-1}^{(i)}}{j+s_i-2} - \frac{\{(j+s_i-6)[3(j+s_i)-17]-A\}b_{j-2}^{(i)}}{\prod_{h=2}^{3}(j+s_i-h)} +$$
$$+ \frac{\left\{(j+s_i-6)\left[\prod_{h=6}^{7}(j+s_i-h)-A\right]+A\right\}b_{j-3}^{(i)}}{\prod_{h=2}^{4}(j+s_i-h)} - \frac{\alpha^4 a_{j-4}^{(i)}}{\prod_{h=2}^{3}(j+s_i-h)} +$$
$$+ \frac{\alpha^4[3(j+s_i)-17]a_{j-5}^{(i)}}{\prod_{h=2}^{4}(j+s_i-h)} + \frac{1}{\prod_{h=2}^{5}(j+s_i-h)}\left\{B\sum_{h=0}^{j-4} b_h^{(i)} + \right.$$
$$\left. -\alpha^4\{(j+s_i-6)[3(j+s_i)-19]-m^2\}a_{j-6}^{(i)} + \alpha^4[(j+s_i-7)^2-m^2]a_{j-7}^{(i)}\right\} \qquad (j \geqslant 7)$$

(41) $$a_j^{(i)} = \frac{b_j^{(i)}}{\prod_{h=0}^{1}(j+s_i-h)} + \frac{[3(j+s_i)-10]a_{j-1}^{(i)}}{j+s_i} - \frac{[3(j+s_i)-11]b_{j-1}^{(i)}}{\prod_{h=0}^{2}(j+s_i-h)} +$$
$$- \frac{\{(j+s_i-4)[3(j+s_i)-11]-A\}a_{j-2}^{(i)}}{\prod_{h=0}^{1}(j+s_i-h)} + \frac{\left\{(j+s_i-4)\left[\prod_{h=4}^{5}(j+s_i-h)-A\right]+A\right\}a_{j-3}^{(i)}}{\prod_{h=0}^{2}(j+s_i-h)} +$$
$$+ \frac{1}{\prod_{h=0}^{3}(j+s_i-h)}\left\{B\sum_{h=0}^{j-4} a_h^{(i)} + \{(j+s_i-4)[3(j+s_i)-13]-m^2\}b_{j-2}^{(i)} + \right.$$
$$\left. -[(j+s_i-5)^2-m^2]b_{j-3}^{(i)} + \gamma^4(a_{j-4}^{(i)} - 3a_{j-5}^{(i)} + 3a_{j-6}^{(i)} - a_{j-7}^{(i)})\right\} \qquad (j \geqslant 7).$$

La soluzione generale del sistema (19) è dunque espressa da combinazioni del tipo:

(42) $$\begin{cases} W = \sum_{i=1}^{8} C_i W_i \\ F = \sum_{i=1}^{8} C_i F_i \end{cases}$$

essendo C_i costanti arbitrarie.

4. Ricerca delle autofrequenze

Sulla base delle (18) e (42) è possibile determinare le autofrequenze per gusci comunque vincolati ai due bordi. In particolare, utilizzando anche le note soluzioni relative ai casi d'isotropia [9], [10], si possono analizzare i gusci che risultino chiusi in sommità da calotte isotrope.

A titolo esemplificativo si esaminano in dettaglio due situazioni di vincolo. Nella prima il bordo esterno è ritenuto appoggiato, nella seconda incastrato; in entrambe si ipotizza che il bordo interno risulti libero.

Le condizioni da considerare per il bordo esterno sono perciò le:

$$w = M_r = u = v = 0 \qquad (\rho = 1) \tag{43}$$

nella prima ipotesi e le:

$$w = \frac{\partial w}{\partial \rho} = u = v = 0 \qquad (\rho = 1) \tag{44}$$

nella seconda. Quelle relative al bordo interno sono invece rappresentate in entrambi i casi dalle:

$$M_r = T_r + \frac{1}{r_e \rho} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} = N_r = N_{r\theta} = 0 \qquad (\rho = \rho_i = r_i/r_e). \tag{45}$$

Tutte le precedenti condizioni si possono esprimere in funzione delle incognite w ed f del problema. È sufficiente a tal fine considerare preliminarmente che alle ultime due delle (43) possono sostituirsi, in virtù della prima e delle relazioni (3), le:

$$\begin{cases} \varepsilon_\theta = 0 \\ \rho \dfrac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial \rho} - \varepsilon_r - \dfrac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{\rho}{R} \dfrac{\partial w}{\partial \rho} = 0 \end{cases} \qquad (\rho = 1) \tag{46}$$

ed, analogamente, che le ultime due delle (44) sono sostituibili, per effetto delle prime due e delle stesse (3), con le:

$$\begin{cases} \varepsilon_\theta = 0 \\ \rho \dfrac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial \rho} - \varepsilon_r - \dfrac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \qquad (\rho = 1), \tag{47}$$

tener presente poi che T_r può essere espresso, sulla scorta della quarta delle (1), in funzione di M_r, $M_{r\theta}$, M_θ ed usufruire infine delle (4), (5), (6), (9).

Le autofrequenze si determinano ricercando gli zeri di una funzione di γ che si identifica col determinante delle equazioni di vincolo. Simboleggiando tale funzione con la:

$$G(\gamma) = \det |g_{ni}| \qquad (n, i = 1, 2, \ldots, 8), \tag{48}$$

è agevole verificare che risulta:

$$\begin{cases} g_{1i} = W_i \\ g_{2i} = W_i'' - \nu_\theta (W_i' + m^2 W_i) \\ g_{3i} = F_i'' + \nu_\theta (F_i' + m^2 F_i) \\ g_{4i} = F_i''' - [A + \nu_\theta (m^2 - 1)] F_i' - m^2 \lambda (\lambda + 2) F_i, + \alpha^4 W_i' \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 8); \; (x = 0) \tag{49}$$

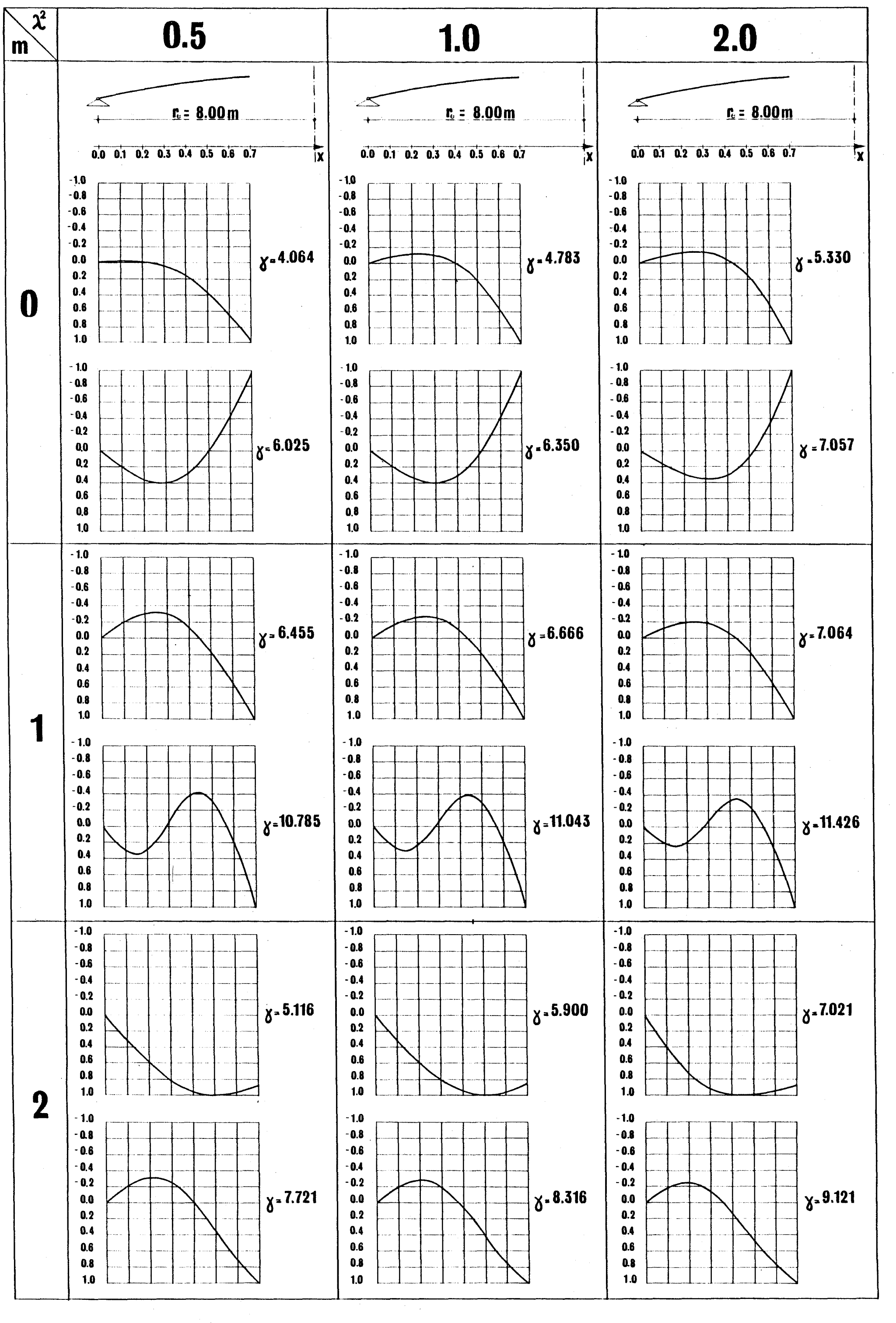
χ²
m
0.5
1.0
2.0
r = 8.00m
0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7
x
0
1
2
γ=4.064
γ=4.783
γ=5.330
γ=6.025
γ=6.350
γ=7.057
γ=6.455
γ=6.666
γ=7.064
γ=10.785
γ=11.043
γ=11.426
γ=5.116
γ=5.900
γ=7.021
γ=7.721
γ=8.316
γ=9.121

Fig. 2.

per la prima delle situazioni considerate,

$$(50)\qquad \begin{cases} g_{1i} = W_i \\ g_{2i} = W_i' \\ g_{3i} = F_i'' + \nu_\theta (F_i' + m^2 F_i) \\ g_{4i} = F_i''' - [A + \nu_\theta (m^2 - 1)]F_i' - m^2 \lambda(\lambda + 2)F_i \end{cases} \qquad (i = 1, 2, ..., 8); ((x = 0)$$

per la seconda e

$$(51)\qquad \begin{cases} g_{5i} = W_i'' - \nu_\theta \left(\dfrac{W_i'}{\rho_i} + m^2 \dfrac{W_i}{\rho_i^2} \right) \\ g_{6i} = W_i''' - \dfrac{W_i''}{\rho_i} - (A - m^2 \nu_\theta) \dfrac{W_i'}{\rho_i^2} - m^2 (\lambda^2 + 2\lambda - \nu_\theta) \dfrac{W_i}{\rho_i^3} \\ g_{7i} = F_i' + \dfrac{m^2 F_i}{\rho_i} \\ g_{8i} = F_i' + \dfrac{F_i}{\rho_i} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, ..., 8); (x = x_i = 1 - \rho_i)$$

per entrambe, avendo contrassegnato con gli apici le derivazioni rispetto ad x.

In fig. 2 sono illustrati i risultati di tre serie di esempi numerici svolti con riferimento ad un guscio dalle seguenti caratteristiche geometriche:

$$r_e = 8.00\text{ m}; \qquad r_i = 2.40\text{ m}; \qquad R = 35.2946\text{ m}; \qquad h = 0.25\text{ m},$$

supposto vincolato secondo la prima delle situazioni considerate.

Dei tre parametri elastici fondamentali, assunti coincidenti con E_r, ν_r, λ, si sono tenuti costanti il primo ed il secondo, per il quale è stato fissato il valore 0.1. Al terzo invece sono stati assegnati successivamente i valori $\lambda = 1/\sqrt{2}$, 1, $\sqrt{2}$, corrispondenti alle ipotesi che il modulo E_θ risulti pari alla metà, sia uguale o pari al doppio di E_r. Per ciascuna di tali ipotesi sono stati valutati i primi due autovalori γ e le corrispondenti autofunzioni assumendo ogni volta che il numero dei meridiani nodali sia pari a 0, 1, 2.

Bibliografia

[1] U. Ricciuti and A. Gentile (1984) – *Analisi al continuo delle vibrazioni libere della piastra circolare a graticcio. Soluzione generale*, «Atti dell'Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni», Univ. Bari. n. 181.

[2] U. Ricciuti and A. Gentile (1977) – *Analisi dinamica dei gusci sferici ortotropi ribassati. Le vibrazioni libere assialsimmetriche*, «Atti dell'Accademia Naz. dei Lincei, Rendiconti della Classe di Scienze fis., mat. e nat.», Serie VIII, Vol. LXIII, fasc. 3-4 (Sett.-Ott.) Ferie 1977.

[3] U. Ricciuti and A. Gentile (1975) – *Analisi statica del guscio sferico ortotropo ribassato*, «Giornale del Genio Civile», Fasc. 1°-2°-3°, Genn.-Febb.-Mar. 1975.

[4] A. Sollazzo and G. Prete (1970) – *Sulla teoria delle piastre curve sottili anisotrope*, «Annali della Facoltà d'Ingegneria», Università di Bari, Vol. VIII.

[5] A. Sollazzo (1968) – *Premesse alla teoria dei gusci ribassati*, «Tecnica Italiana», Anno XXXIII, n. 11, Novembre 1968.

[6] P. B. J. Gravina (1965) – *Sulla teoria della struttura di superficie piana anisotropa*, «Costruzioni in cemento armato, Studi e Rendiconti», Politecnico di Milano, Italcementi, Bergamo.

[7] V. V. Novozhilov (1964) – *Thin Shell Theory*, P. Noordhoff Ltd, Groningen, The Netherlands.

[8] K. Girkmann (1963) – *Flachentragwerke, Einfürhung in die elastoplastik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke*, «Sechste Auflage», Springer-Verlag, Wien.

[9] M. W. Johnson and E. Reissner (1958) – *On transverse vibrations of shallow spherical shells*, «Quarterly of Applied Mathematics», Vol. XV, No. 4, January.

[10] E. Reissner (1955) – *On axi-symmetrical vibrations of shallow spherical shells*, «Quarterly of Applied Mathematics», Vol. XIII, No. 3.

[11] E. Reissner (1946) – *Stresses and small displacements of shallow spherical shells. I*, «J. Math. and Phys.», 25, (pp. 80-85).

[12] E. Reissner (1946) – *Stresses and small displacements of shallow spherical shells. II*, «J. Math. and Phys.», 25, (pp. 279-300).