Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giorgio Vergara Caffarelli

Dissipatività ed esistenza per il problema dinamico unidimensionale della viscoelasticità lineare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **82** (1988), n.3, p. 489–496.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1988_8_82_3_489_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1988.

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXII (1988), pp. 489-496

Fisica matematica. — *Dissipatività ed esistenza per il problema dinamico unidimensionale della viscoelasticità lineare* (*). Nota di GIORGIO VERGARA CAFFARELLI, presentata (**) dal Socio G. FICHERA.

ABSTRACT. - *Existence and dissipativity for the one-dimensional dynamic problem of the linear viscoelasticity.* We consider the one-dimensional dynamic problem for a linear viscoelastic material in the Sobolev space $H^{1,2}$. We prove the existence of the solution, for a suitable class of data and for convex relaxation function which has the equilibrium modulum strictly positive.

KEY WORDS: Viscoelasticity; Existence; Dissipativity.

RIASSUNTO. - In questa nota si completa la studio (iniziato in [1]) della caratterizzazione delle funzioni di rilassamento per le quali il problema dinamico della viscoelasticità lineare, con condizioni di spostamento nullo agli estremi, risulta ben posto nello spazio di Sobolev $H^{1,2}$. Precisamente, per un'opportuna classe di sollecitazioni esterne, si dimostra l'esistenza della soluzione, se le funzioni di rilassamento sono positive, convesse ed hanno il modulo di elasticità all'equilibrio strettamente maggiore di zero. Si stabilisce inoltre la relativa maggiorazione a priori.

1. In questa nota completiamo lo studio - iniziato nella nota [1] - della caratterizzazione delle funzioni di rilassamento per le quali il problema dinamico unidimensionale della viscoelasticità lineare, con condizioni di spostamento nullo agli estremi, risulti ben posto.

Consideriamo quindi il problema esaminato in [1], nel caso non omogeneo, in presenza cioè di una sollecitazione esterna $f(x,t)$. Si ha allora l'equazione integro-differenziale

$$(1) \qquad -\varrho u_{tt}(x,t) + G(0)\, u_{xx}(x,t) + \int_0^{+\infty} \dot{G}(s)\, u_{xx}(x,t-s)\, ds = f(x,t) \qquad \text{in } S$$

con le condizioni omogenee agli estremi

$$(2) \qquad u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \qquad \text{per } t < 0$$

essendo al solito $x \in [0,\ell]$, $t \in (-\infty,0)$ e $S = (0,\ell) \times (-\infty,0)$.

(*) Lavoro eseguito durante un soggiorno presso l'Università di Metz (Francia).
(**) Nella seduta del 23 aprile 1988.

Supporremo la funzione $G(s)$ positiva, convessa e tale che

$$\int_0^{+\infty} |\dot{G}(s)|\,ds < +\infty \qquad \& \qquad \lim_{s\to+\infty} G(s) = G(+\infty) > 0\,.$$

Diremo $W \subset H^{1,2}(S)$ lo spazio delle funzioni di $H^{1,2}(S)$ aventi tracce nulle sulle semirette $x = 0$, $x = \ell$, con $t < 0$ e, per $w \in W$, poniamo

$$\|w\|^2_W = \|w_x\|^2_{L^2(S)} + \|w_t\|^2_{L^2(S)}\,.$$

2. Stabiliremo innanzi tutto una maggiorazione a priori per le soluzioni in W del problema (1), (2) ossia per le funzioni $u(x,t)$ tali che

$$\iint_S \Big[\varrho u_t(x,t)\,\phi_t(x,t) - G(0)\,u_x(x,t)\,\phi_x(x,t) - \int_0^{+\infty} \dot{G}(s)\,u_x(x,t-s)\,ds\cdot\phi_x(x,t)\Big]\,dx\,dt = \tag{3}$$

$$= \iint_S f(x,t)\,\phi(x,t)\,dx\,dt$$

per ogni $\phi \in C^\infty_c((-\infty,0);\,H^1_0(0,\ell))$.

Considerato (cfr. [1]) lo sviluppo

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{\ell}x \tag{4}$$

in serie trigonometrica di soli seni della funzione $u(x,t)$, è subito visto che i coefficienti $\alpha_n(t)$ soddisfano l'equazione integrodifferenziale

$$\varrho\ddot{\alpha}_n(t) + G(0)\lambda_n\alpha_n(t) + \lambda_n\int_0^{+\infty}\dot{G}(s)\,\alpha_n(t-s)\,ds = \tag{5}$$

$$= f_n(t) \qquad \text{per } t < 0$$

essendo $\lambda_n = (n\pi/\ell)^2$ e $f_n(t)$ i corrispondenti coefficienti dello sviluppo di $f(x,t)$.

Proposizione 1. (Maggiorazione a priori per i coefficienti di Fourier). Se $f(x,t) \in L^1(S) \cap L^2(S)$ si ha:

$$|\dot{\alpha}_n(t)|^2 + \lambda_n|\alpha_n(t)|^2 \le \frac{4}{\varrho}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{G(+\infty)}\right)\left(\int_{-\infty}^{t}|f_n(\tau)|\,d\tau\right)^2. \tag{6}$$

Da ciò si ottiene la:

PROPOSIZIONE 2. (Maggiorazione a priori per la soluzione). Esiste una costante $c_0 > 0$ tale che se $f(x,t) \in L^1(S) \cap L^2(S)$ e $f_x(x,t) \in L^1(S)$ e se, posto

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{0}^{\ell} |f(x,\tau)|\, dx\, d\tau, \qquad F_1(t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{0}^{\ell} |f_x(x,\tau)|\, dx\, d\tau,$$

si ha $F(t), F_1(t) \in L^2(-\infty, 0)$, allora per ogni soluzione $u(x,t) \in W$ della (3) risulta

$$\|u\|_W \leqq c_0 \left(\|F\|_{L^2(-\infty,0)} + \|F_1\|_{L^2(-\infty,0)} \right). \tag{7}$$

Alla dimostrazione delle proposizioni è opportuno premettere due lemmi.

LEMMA 1. Se $f_n(t)$ appartiene ad $L^2(-\infty,0)$, presa una soluzione $\alpha_n(t)$ in $H^{1,2}(-\infty,0)$ dell'equazione (5) si ha

$$\frac{1}{2} \varrho \dot{\alpha}_n^2(t) + \frac{1}{2} \lambda_n G(+\infty) \alpha_n^2(t) \leqq \int_{-\infty}^{t} f_n(\tau) \dot{\alpha}_n(\tau)\, d\tau. \tag{8}$$

La dimostrazione di questo lemma si ottiene ripetendo, nel caso non omogeneo, quanto visto in [1] relativamente al caso omogeneo ed in particolare dimostrando che la funzione

$$\hat{V}(t) = V(t) - \int_{-\infty}^{t} f_n(\tau) \dot{\alpha}_n\, d\tau = \frac{\varrho}{2} \dot{\alpha}_n^2(t) +$$

$$+ \frac{G(+\infty)}{2} \lambda_n \alpha_n^2(t) - \frac{1}{2} \lambda_n \int_{0}^{+\infty} \dot{G}(s) (\alpha_n(t) - \alpha_n(t-s))^2\, ds - \int_{-\infty}^{t} f_n(\tau) \dot{\alpha}_n(\tau)\, d\tau$$

risulta non crescente e tale che $\lim_{t \to -\infty} \hat{V}(t) = 0$.

LEMMA 2. Siano $f(x,t)$, $f_x(x,t) \in L^1(S)$; allora detti, al solito, $f_n(t)$ i coefficienti dello sviluppo di $f(x,t)$ si ha:

$$\int_{-\infty}^{t} |f_n(\tau)|\, d\tau \leqq \frac{1}{n} \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{\ell} \int_{-\infty}^{t} \int_{0}^{\ell} |f(x,\tau)|\, d\tau\, dx + \int_{-\infty}^{t} \int_{0}^{\ell} |f_x(x,\tau)|\, d\tau\, dx \right]. \tag{9}$$

Dim. Per quasi ogni t in $(-\infty, 0)$ risulta

$$f_n(t) = -\frac{1}{n}\frac{2}{\pi}\int_0^\ell f(x,t)\frac{d}{dx}(\cos\frac{n\pi}{\ell}x)\,dx,$$

per cui

$$|f_n(t)| \leqq \frac{1}{n}\frac{2}{\pi}\left[|f(0,t)| + |f(\ell,t)| + \int_0^\ell |f_x(x,t)|\,dx\right].$$

D'altra parte

$$|f(0,t)| + |f(\ell,t)| \leqq 2|f(x,t)| + \int_0^\ell |f_x(y,t)|\,dy.$$

Da cui integrando rispetto a x su $(0,\ell)$ si ottiene la tesi.

Dimostrazione delle proposizioni. Dalla (8) segue per ogni $\tau < t$

$$\frac{\varrho}{2}|\dot\alpha_n(\tau)|^2 \leqq \int_{-\infty}^{\tau} |f_n(\eta)|\,d\eta \sup_{\eta\leqq\tau} |\dot\alpha_n(\eta)|$$

e quindi passando al sup per $\tau \in (-\infty, t)$

$$\|\dot\alpha_n\|_{L^\infty(-\infty,t)} \leqq \frac{2}{\varrho}\|f_n\|_{L^1(-\infty,t)}.$$

Analogamente, essendo per (8)

$$\frac{G(+\infty)}{2}\lambda_n\|\alpha_n\|^2_{L\infty(-\infty,t)} \leqq \|f_n\|_{L^1(-\infty,t)}\cdot\|\dot\alpha_n\|_{L^\infty(-\infty,t)},$$

si ha

$$\sqrt{\lambda_n}\,\|\alpha_n\|_{L^\infty(-\infty,t)} \leqq \frac{2}{\sqrt{\varrho G(+\infty)}}\|f_n\|_{L^1(-\infty,t)};$$

quindi

$$|\dot\alpha_n(t)|^2 + \lambda_n|\alpha_n(t)|^2 \leqq \left(\frac{4}{\varrho^2} + \frac{4}{\varrho G(+\infty)}\right)\left(\int_{-\infty}^{t} |f_n(\tau)|\,d\tau\right)^2.$$

Dal lemma 2 possiamo concludere che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\dot\alpha_n(t)|^2 + \lambda_n|\alpha_n(t)|^2) \leqq c_1[F(t) + F_1(t)]^2,$$

da cui integrando per $t \in (-\infty, 0)$ e tenendo presente l'identità di Bessel, per l'ipotesi $u \in W$, si ha la tesi.

3. Costruiamo ora una successione di approssimanti. Ciò può esser fatto, ad esempio utilizzando il principio di esistenza dell'analisi lineare del prof. Fichera [2] applicato nel caso particolare degli spazi di Hilbert (cfr. [3], [4]). Ma nel nostro contesto, in cui consideriamo le equazioni integrodifferenziali ordinarie dei coefficienti dello sviluppo in serie, vogliamo dare una semplice costruzione diretta che, inoltre, si ricollega alla possibilità di approssimare operatori di Volterra singolari (aventi cioè come primo estremo di integrazione $-\infty$) con gli usuali operatori di Volterra. Come ben precisato nella nota [5] anche questo è un aspetto della problematica posta dal prof. Fichera.

Per ogni intero $N \in \mathbb{R}$ poniamo

$$f^{(N)}(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & \text{se } t > -N \\ 0 & \text{se } t \leqq -N \end{cases}$$

Considerando lo sviluppo di $f(x,t)$ e di $f^{(N)}(x,t)$ in serie trigonometriche di soli seni e detti $f_n(t)$, $f_n^{(N)}(t)$ i coefficienti, osserviamo preliminarmente che:

LEMMA 3. Se $f(x,t) \in L^2(S)$ allora posto

$$f^{[N]}(x,t) = \sum_{n=1}^{N} f_n^{(N)}(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x,$$

risulta

$$\lim_{N \to +\infty} f^{[N]}(x,t) = f(x,t) \qquad \text{in } L^2(S)$$

Dim. Poiché per l'identità del Bessel

$$\|f\|^2_{L^2(S)} = \frac{\ell}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} |f_n(t)|^2 dt,$$

la tesi segue dal fatto che la quantità:

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} f_n^{(N)}(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x - \sum_{m=1}^{N} f_m(t) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{\ell} x \right\|^2_{L^1(S)} =$$

$$= \frac{\ell}{2} \int_{-\infty}^{0} \sum_{n=1}^{N} \left[f_n^{(N)^2}(t) - 2 f_n^{(N)}(t) f_n(t) + f_n^2(t) \right] dt =$$

$$= \frac{\ell}{2} \int_{-\infty}^{-N} \sum_{n=1}^{N} f_n^2(t)\, dt \leqq \int_{-\infty}^{-N} \int_{0}^{\ell} |f(x,t)|^2 dt\, dx,$$

è infinitesima al divergere di N.

Per ogni $N \in \mathbb{N}$ consideriamo l'equazione integrodifferenziale

$$\varrho \ddot{\alpha}_n^{(N)}(t) + G(0)\lambda_n \alpha_n^{(N)}(t) + \lambda_n \int_0^{+\infty} \dot{G}(s)\alpha_n^{(N)}(t-s)\,ds = f_n^{(N)}(t) \tag{10}$$

per $t < 0$.

È ovvio che assumendo

$$\alpha_n^{(N)}(t) = 0 \qquad \text{per } t < -N \tag{11}$$

l'equazione (10) è identicamente soddisfatta nella semiretta $(-\infty, -N)$ e diviene

$$\varrho \ddot{\alpha}_n^{(N)}(t) + G(0)\lambda_n \alpha_n^{(N)}(t) + \lambda_n \int_{-N}^{t} \dot{G}(t-\tau)\alpha_n^{(N)}(\tau)\,d\tau = f_n^{(N)}(t) \tag{12}$$

per $t \in (-N, 0)$.

Si può facilmente dimostrare il

LEMMA 4. Se $f(x,t) \in L^1(S)$, per ogni coppia di interi n, $N \in \mathbb{N}$ esiste una funzione $\alpha_n^{(N)}(t)$, appartenente ad $L^\infty(-N,0)$ assieme alla sua derivata prima, che verifica le (11) e le (12) e quindi è soluzione in $H^{1,2}(-\infty,0)$ della (10).

Dim. Poiché dall'ipotesi segue $f_n^{(N)}(t) \in L^1(-\infty,0)$, effettuando una prima integrazione fra $-N$ e t con $t \in (-N,0)$ la (10) diviene

$$\varrho \dot{\alpha}_n^{(N)}(t) + \lambda_n \int_{-N}^{t} G(t-\tau)\alpha_n^{(N)}(\tau)\,d\tau = \int_{-N}^{t} f_n^{(N)}(\tau)\,d\tau .$$

Posto allora $H(s) = \int_0^s G(\sigma)\,d\sigma$ con una ulteriore integrazione si ha:

$$\alpha_n^{(N)}(t) = -\frac{\lambda_n}{\varrho}\int_{-N}^{t} H(t-\tau)\alpha_n^{(N)}(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\varrho}\int_{-N}^{t} d\tau \int_{-N}^{\tau} f_n^{(N)}(\eta)\,d\eta , \tag{13}$$

equazione di cui è ben nota la risolubilità nello spazio $L^\infty(-N,0)$, ad esempio mediante il metodo delle approssimazioni successive.
È infine evidente che una funzione $\alpha_n^{(N)}(t)$ verificante (11) e (13) risolve l'equazione (10).

Possiamo quindi dimostrare il

TEOREMA. *Nelle ipotesi della proposizione 2, ossia se* $f(x,t) \in L^1(S) \cap L^2(S)$, $f_x(x,t) \in L^1(S)$,

$F(t)$ e $F_1(t) \in L^2(-\infty,0)$ *esiste una* (*sola*) *soluzione* $u(x,t)$ *in* W *dell'equazione* (3) *ed inoltre vale la maggiorazione* (7).

Dim. Passiamo al limite sulla successione approssimante.
Posto

$$u^{[N]}(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{(N)}(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x,$$

essendo $|f_n^{(N)}(t)| \leqq |f_n(t)|$, dalla (6) si ha

$$|\dot{\alpha}_n^{(N)}(t)|^2 + \lambda_n |\alpha_n^{(N)}|^2 \leqq \frac{4}{\varrho}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{G(+\infty)}\right)\left(\int_{-\infty}^{t} |f_n(\tau)|\, d\tau\right)^2$$

e quindi, dal lemma 2,

$$\|u^{[N]}\|_W \leqq c_0(\|F\|_{L^2(-\infty,0)} + \|F_1\|_{L^2(-\infty,0)}). \tag{7}$$

Poiché la funzione $u^{[N]}$ risolve l'equazione

$$\iint_S \Big[-\varrho u^{[N]}(x,t)\phi_{tt}(x,t) + G(0) u^{[N]}(x,t)\phi_{xx}(x,t) + \left(\int_0^{+\infty} \dot{G}(s) u^{[N]}(x,t-s)\, ds\right)\phi_{xx}(x,t)\Big] dx\, dt = \iint_S f^{[N]}(x,t)\phi(x,t)\, dx\, dt$$

per ogni $\phi \in C_c^\infty((-\infty,0); \quad H_0^{1,2}(0,\ell) \cap H^{2,2}(0,\ell))$,

ed esiste una sottosuccessione - che indicheremo ancora con $\{u^{[N]}\}$ - convergente debolmente in W verso una funzione u di W, essendo la striscia illuminata S di larghezza finita, si può affermare che

$$\lim_{N\to+\infty} u^{[N]} = u \text{ in } L^2(S)$$

ove $u \in W$ è la soluzione del problema considerato.

Bibliografia

[1] Vergara Caffarelli G., (1988) *Dissipatività e unicità per il problema dinamico unidimensionale della viscoelasticità lineare*. «Atti Acc. Lincei Red. fis.» (8), LXXXII, 483-488.

[2] Fichera G., (1954) *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari*. Atti del Convegno Internazionale sulle Equazioni alle derivate parziali. Trieste, Ed. Cremonese, Roma (1955), 174-227.

[3] Vergara Caffarelli G., Capriz G., (1988) *Alcune osservazioni sul problema dinamico in viscoelasticità lineare*. Atti 8° Congresso AIMETA, Torino 1986.

[4] Vergara Caffarelli G., Capriz G., (1988) *Ulteriori osservazioni sul problema dinamico in viscoelasticità lineare*. Atti 9° Congresso AIMETA, Bari 1986.

[5] Fichera G., (1988)*Sui materiali elastici con memoria*. «Atti Acc. Lincei Rend. fis.», (8) LXXXII, 473-478.