Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Renata Grimaldi

Sur l’existence d’une infinité continue de structures asymptotiques sur $\mathbb{R}^n$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **82** (1988), n.3, p. 445–449.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1988_8_82_3_445_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1988.

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXII (1988), pp. 445-449

Geometria differenziale. – *Sur l'existence d'une infinité continue de structures asymptotiques sur* $\mathbb{R}^n$ (*). Nota di RENATA GRIMALDI (**), presentata (***) dal Corrisp. E. VESENTINI.

ABSTRACT. – It is shown the existence of an uncountable infinity of asymptotic structures (i.e. equivalence's classes of quasi-isometric riemannian metrics) on the non compact manifold $\mathbb{R}^n$.

KEY WORDS: Riemannian metrics; Quasi-isometries; Growth-type.

RIASSUNTO. – *Sull'esistenza di una infinità continua di strutture asintotiche su* $\mathbb{R}^n$. Si dimostra l'esistenza di una infinità continua di strutture asintotiche (cioè classi di equivalenza di metriche riemanniane quasi-isometriche) sulla varietà non compatta $\mathbb{R}^n$.

INTRODUCTION

Soit V une variété différentiable de classe C^∞. Tous les éléments introduits sont supposés de classe C^∞. Dans un article précédent [1], j'ai appelé «*structures asymptotiques*» de V les classes d'equivalence de métriques riemmanniennes quasi-isométriques sur V, où deux métriques riemanniennes g et g′ sur V s'appellent *quasi-isométriques* (voir aussi [2] et [3] s'il existe un difféomorphisme $f: V \to V$ et deux constantes positive λ et μ telles que:

$$\lambda \|v\|_g \leq \|f_* v\|_{g'} \leq \mu \|v\|_g \qquad \forall v \in TV. \tag{1}$$

On dénote $\mathfrak{A}(V)$ l'ensemble des structures asymptotiques de V; si V est compacte, on sait (voir [3], [4]) qu'il existe seulement une structure asymptotique sur V. Si $V = \mathbb{R}^2$, j'ai demontré (voir [1] que l'ensemble $\mathfrak{A}(\mathbb{R}^2)$ a la puissance du continu. Plus précisément, j'ai montré l'existence d'une famille continue $\{g_\alpha\}$, $\alpha \in]1,2[$, de métriques riemanniennes distinctes sur $\mathbb{R}^2$ complètes, conformes à la métrique euclidienne et non quasi-isométriques entre elles: elles ont, en effet, des types de croissance (pour la définition, voir ci-dessous) différents.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A del C.N.R. e col contributo del M.P.I.

(**) Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, via Archirafi 34, Università di Palermo.

(***) Nella seduta del 12 marzo 1988.

Le but de cette Note est montrer que ce résultat est valable pour $\mathbb{R}^n$ également; i.e., en utilisant les métriques g_α déjà considerées sur $\mathbb{R}^2$, on montre l'existence d'une infinité continue de métriques riemanniennes complètes sur $\mathbb{R}^n$ qui ont des types de croissance différents et donc non quasi-isométriques entre elles.

L'auteur désire exprimer sa gratitude à Monsieur André Lichnerowicz pour son encouragement et pour ses utiles suggestions et également à Messieurs E. Calabi et V. Poénaru pour de fructueuses discussions.

1. *Le type de croissance des variétés produit.*

Nous rappelons ici (voir, par exemple, [5]) qu'on appelle «*type de croissance*» d'une fonction $f_1(t)$ réelle, positive, croissante, définie pour tout numero réel $t \geqslant b$, avec $b \in \mathbb{R}$, la classe d'equivalence de f_1 pour la relation de *réciproque dominance*, où f_1 domine f_2 s'il existe des constantes a, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et γ telles que $f_1(t) \geqslant \alpha f_2(\beta t + \gamma)$, pour tout $t \in [a, +\infty[$; en outre, le type de croissance d'une variété riemannienne (V, g), connexe et complète, est defini comme étant celui de la fonction réelle (qui s'appelle «fonction croissance» de (V, g) dans le point p) $F_p(r) = \text{volume}_{(g)} B(p,r)$, où $B(p,r)$ est la boule géodésique fermée de centre p et de rayon r. Cette fonction dépend du point p, mais son type de croissance est indépendant du choix du point.

On sait aussi (voir, par exemple, [4]) que le type de croissance d'une variété riemannienne est *invariant par quasi-isométrie*: en effet, si $f:(V,g) \to (V',g')$ est une quasi-isométrie, par les inégalités (1) on a:

$$B'(f(p), \lambda r) \subset f(B(p, r)) \subset B'(f(p), \mu r).$$

Soient, maintenant, $(M, \tilde{g})$ et $(N, \bar{g})$ deux variétés riemanniennes de dimension m et n et avec des coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^m)$ et $(y^1, \ldots y^n)$ respectivement, et soit $V = M \times N$ la variété produit, munie de la métrique produit $g = \tilde{g} + \bar{g}$; i.e., localement, si $\tilde{g} = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j$ et $\bar{g} = \bar{g}_{ab} y^a y^b$, alors

$$g = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j + \bar{g}_{ab} dy^a dy^b,$$

où les $\tilde{g}_{ij}$ dépendent seulement des coordonnées x^i et les $\bar{g}_{ab}$ seulement des coordonnées y^a.

On la suivante:

PROPOSITION 1 – *Le type de croissance de la variété* (V, g) *est celui de la fonction volume du produit de deux boules géodésiques fermées respectivement de* $(M, \tilde{g})$ *et de* $(N, \bar{g})$.

DÉMONSTRATION. – Soit $p = (x,y)$ un point de $V = M \times N$ et soit $B(p,r) =$

$\{p' = (x',y') \in M \times N \mid d(p',p) \leq r\}$, où d est la distance, sur V, induite par la métrique g.

Par définition, le type de croissance de (V,g) est celui de la fonction $F_p(r) =$ volume$_{(g)}$ $B(p,r)$.

On considère, maintenant, la fonction

$$\varphi(r) \overset{\text{def.}}{=} \text{volume}_{(g)}\,(\tilde{B}(x,r) \times \bar{B}(y,r)),$$

$$\text{où } \tilde{B}(x,r) = \{x' \in M \mid \tilde{d}(x',x) \leq r\},\ \bar{B}(y,r) = \{y' \in N \mid \bar{d}(y',y) \leq r\}$$

et $\tilde{d}$ et $\bar{d}$ sont les distances induites, respectivement, sur M et sur N par les métriques $\tilde{g}$ et $\bar{g}$.

On peut montrer, par des calculs faciles, qu'on a

$$\max\{\tilde{d}(x',x),\ \bar{d}(y',y)\} \leq d(p',p) \leq \tilde{d}(x',x) + \bar{d}(y',y)$$

et, en utilisant ces inégalités, on montre qu'on a:

$$B(p,r) \subset \tilde{B}(x,r) \times \bar{B}(y,r) \subset B(p,2r).$$

Il s'ensuit que $F_p(r) \leq \varphi(r) \leq F_p(2r)$, pout tout $r > 0$; alors les fonctions F_p et φ sont réciproquement dominées et donc elles ont le même type de croissance.

REMARQUE 1 - Puisqu'on sait bien que volume $_{(g)}(\tilde{B}(x,r) \times \bar{B}(y,r)) =$ (volume $_{(\tilde{g})}\tilde{B}(x,r))\cdot$(volume$_{(\bar{g})}\bar{B}(y,r)$, on a $\varphi(r) = \tilde{F}_x(r)\cdot\bar{F}_y(r)$, où $\tilde{F}_x(r)$ est la fonction croissance de $(M,\tilde{g})$ dans le point x et $\bar{F}_y(r)$ est celle de $(N,\bar{g})$ dans le point y.

On peut alors dire que le type de croissance d'une variété produit est celui de la fonctions produit des fonctions croissance de M et N respectivement.

Observer que *la* fonction croissance de $M \times N$ n'est pas le produit des fonctions croissance de M et N.

REMARQUE 2 - La même chose est valable pour le produit d'un nombre fini de variétés riemanniennes.

2. *Construction d'une famille continue de métriques riemanniennes non quasi-isométriques sur* $\mathbb{R}^n$.

On considère, maintenant, les espaces $\mathbb{R}^n$ et on distingue le cas n paire du cas n impaire.

Premier cas - Soit n paire; alors $n = 2m$ et on peut considérer

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2m} = \underbrace{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \ldots \times \mathbb{R}^2}_{\text{m fois}}.$$

Sur $\mathbb{R}^2$ il existe (voir [1]), pour chaque $\alpha \in]1,2[$, une métrique g_α complète, conforme à la métrique euclidienne et qui a le même type de croissance de la fonction $E_\alpha(t) = t^\alpha$, i.e. elle est à croissance polynomiale exacte de degré α (en suivant la terminologie de [5]).

Alors, sur $\mathbb{R}^{2m}$, nous considerons la métrique produit

$$\hat{g}_\alpha = \underbrace{g_\alpha + g_\alpha + \ldots + g_\alpha}_{\text{m fois}},$$

qui est complète aussi, pour le théorème de Hopf-Rinow.

Pour la Proposition 1, le type de croissance de $\hat{g}_\alpha$ sera celui de la fonction

$$f_\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \underbrace{(A_\alpha(t))(A_\alpha(t))\ldots(A_\alpha(t))}_{\text{m fois}},$$

où $A_\alpha(t)$ est l'aire de la boule géodésique fermée de $(\mathbb{R}^2, g_\alpha)$ de centre l'origine et de rayon t; puisque $A_\alpha(t)$ a la même croissance de t^α, alors $f_\alpha(t)$ aura celle de la fonction $(t^\alpha)^m = t^{\alpha m}$ et donc, pour chaque $\alpha \in]1,2[$, la métrique $\hat{g}_\alpha$ a croissance polynomiale exacte de degré $m\alpha$.

Alors, si $\alpha' \neq \alpha''$, $\hat{g}_{\alpha'}$ et $\hat{g}_{\alpha''}$ ont des types de croissance différents.

Deuxième cas - Soit, maintenant, n impaire; alors $n = 2m + 1$ et on peut considérer:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2m+1} = \underbrace{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \ldots \times \mathbb{R}^2}_{\text{m fois}} \times \mathbb{R}$$

On sait (voir [5] que, sur $\mathbb{R}$, il existe (à isométrie près) une seule métrique riemannienne complète δ, qui a une croissance linéaire.

On considère, alors, sur $\mathbb{R}^{2m+1}$ la métrique produit (complète) $\hat{g}_\alpha$ donnée par:

$$\hat{g}_\alpha = \underbrace{g_\alpha + g_\alpha + \ldots + g_\alpha}_{\text{m fois}} + \delta$$

Le type de croissance de $\hat{g}_\alpha$ sera, pour la Proposition 1, celui de la fonction:

$$f_\alpha(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \underbrace{(A_\alpha(t))(A_\alpha(t))\ldots(A_\alpha(t))}_{\text{m fois}}(L_\delta(t)),$$

où $L_\delta(t)$ est la longueur, dans la métrique δ, de l'intervalle fermée de $\mathbb{R}$, de centre l'origine et taille t.

Donc, pour chaque $\alpha \in]1,2[$, $f_\alpha(t)$ aura la croissance de $(t^\alpha)^m \cdot t = t^{\alpha m+1}$, i.e. croissance polynomiale exacte de degré $m\alpha + 1$.

Alors, si $\alpha' \neq \alpha''$, $\hat{g}_{\alpha'}$ et $\hat{g}_{\alpha''}$ ont des types de croissance différents.

On a, ainsi, démontré la suivante

PROPOSITION 2 – *Sur* $\mathbb{R}^n$ *il existe une famille continue* $\{\hat{g}_\alpha\}$, $\alpha \in]1,2[$, *de métriques riemanniennes complètes telles que, si* $\alpha' \neq \alpha''$, $\hat{g}_{\alpha'}$, *n'est pas quasi-isométrique à* $\hat{g}_{\alpha''}$.

Puisque la propriété d'être complète est invariante par quasi-isométrie, on peut dire qu'il existe, sur $\mathbb{R}^n$, une infinité continue de structures asymptotiques complètes.

On peut faire, maintenant, la suivante

CONJECTURE – Sur une variété ouverte $\tilde{M}$ qui est le revêtement universel d'une variété riemannienne (M, g) connexe fermée (i.e. compacte sans bord), il existe une infinité continue de métriques riemanniennes ayantes des types de croissance différents et toutes conformes à l'unique métrique $\tilde{g}$ sur $\tilde{M}$ telle que le revêtement soit riemannien.

Puisque $\mathbb{R}^2$ est le revêtement universel du tore bidimensionnel plat, le cas etudié dans la Note [1] en est un cas particulier.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] R. GRIMALDI (1988) – *Sur l'existence d'une infinité continue de structures asymptotiques sur* $\mathbb{R}^2$, «Jour. de Math. pures et appliquées», *67*, 405-410.

[2] R. GRIMALDI (1986) – *Non esistenza di cusps nella geometria asintotica delle foglie*, «Atti. Accad. Lincei, Rend. Cl. Sc. Fis. Mat. Natur.», S. VIII, vol. LXXX, fasc. 5, 292-297.

[3] R. GRIMALDI (1983) – *Sulla geometria asintotica delle foglie di una foliazione*, «Rend. Circ. Mat. Palermo» serie II, *32*, 199-207.

[4] A. PHILLIPS, D. SULLIVAN(1981) – *Geometry of leaves*, «Topology», *20*, 209-218.

[5] C. GODBILLON (1986) – *Feuilletages. Études géométriques*, vol. II, Publications de l'IR.M.A de Strasbourg.