Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Antonio Vitolo, Umberto Zannier

Sugli insiemi piccoli in un gruppo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **82** (1988), n.3, p. 413–418.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1988_8_82_3_413_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1988.

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXII (1988), pp. 413-418

Algebra. — *Sugli insiemi piccoli in un gruppo.* Nota di ANTONIO VITOLO e UMBERTO ZANNIER, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

ABSTRACT. - *On small sets in a group.* A set S in a group G is said to be small if there exist infinitely many pairwise disjoint translates of S. In this note we prove in a elementary way that, under suitable assumption, G cannot be the union of finitely many small sets (and a slight generalization of this result).

KEY WORDS: Group theory; Combinatorial theory; Measure.

RIASSUNTO. - Un insieme S in un gruppo G si dice piccolo se esistono infiniti traslati di S a due a due disgiunti.

In questa nota dimostriamo in modo elementare che, sotto opportune ipotesi, G non può essere l'unione di un numero finito di insiemi piccoli (e una generalizzazione di questo risultato).

INTRODUZIONE ED ENUNCIATO DEL TEOREMA

Un sottoinsieme S in un gruppo abeliano G si dice «piccolo» se esiste una sequenza infinita $\{g_j\}$ in G tale che i traslati $S + g_j$ siano a due a due disgiunti.

È chiaro che se esiste una misura μ su G, invariante per traslazione, e tale che S è misurabile ed inoltre $0 < \mu(G) < \infty$, allora la misura di un tale S è necessariamente nulla, e dunque G non può essere unione finita di insiemi piccoli misurabili.

L'esistenza di una tale misura è però una condizione assai restrittiva: anche quando il gruppo G è dotato di una topologia per cui risulta compatto, nel qual caso disponiamo della misura di Haar, che soddisfa $0 < \mu(G) < \infty$ (vedi [1]), non è detto che gli insiemi piccoli siano misurabili (un controesempio si può costruire quando $G = \{z \in C, |z| = 1\}$).

Il professor D. Dikranjan, dell'Università di Sofia, ha dunque posto tempo fa (conversazione privata) il problema di dimostrare che G non è unione finita di insiemi piccoli, con metodi elementari, e in un contesto del tutto generale.

Scopo di questa nota è ottenere con argomentazioni combinatorie questo risultato, che anzi viene generalizzato in due direzioni

a) il principio di cui sopra viene espresso in forma quantitativa anche per insiemi che possiedono solo un numero finito di traslati disgiunti.

b) con opportune restrizioni su tali insiemi, il risultato viene esteso al caso di

(*) Nella seduta del 23 aprile 1988.

gruppi non abeliani (alcune restrizioni sono indispensabili poiché, come vedremo, il Teorema non vale in generale).

Prima di enunciare il Teorema introduciamo alcune notazioni.

Sia G un gruppo, S un suo sottoinsieme.

Diciamo che S è normale se $gSg^{-1} = S \; \forall g \in G$.

Poniamo inoltre

$$\mu(S) = \mu_G(S) = \inf \frac{1}{r}$$

dove l'inf è preso sugli interi r per cui esistono $g_1, \ldots, g_r$ tali che gli insiemi $S g_j$ siano a due a due disgiunti.

Osserviamo che, se H è un sottogruppo di G allora

$$\mu(H) = \frac{1}{[G:H]}$$

Dimostreremo il seguente

TEOREMA: *Siano H un sottogruppo normale di G,* $S_1, \ldots S_m$ sottoinsiemi normali di G tali che

$$H \subset \bigcup_{i=1}^{m} S_i$$

Allora

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(S_i) \geq \mu(H) = \frac{1}{[G:H]}$$

Osservazioni

(i) La condizione di normalità degli S_i ci sembra naturale, per non dover distinguere fra traslati destri e sinistri.

D'altra parte, come osservato nel corso dell'introduzione, il Teorema non vale per i gruppi non abeliani senza ipotesi aggiuntive sugli S_i.

Costruiremo in effetti un gruppo G e due sottoinsiemi S_0, S_1 piccoli (con infiniti traslati destri a due a due disgiunti) e tali che $S_0 \cup S_1 = G$.

Sia G il gruppo libero su due lettere a,b. Ogni elemento g di G diverso dall'identità e si può scrivere in modo unico come

$$g = y_1 \ldots y_k \qquad (K \geq 1) \qquad (^*)$$

in cui ciascun y_i è una potenza non nulla di a oppure di b e dove se y_i è ad esempio una potenza di a allora y_{i-1} e y_{i+1} sono entrambi potenze di b (e similmente con b al posto di a).

(Questa è precisamente la forma «normale» di g, come spiegato in [2]).

Definiamo

$$S_0 = \{e\} \cup \{g \in G : y_k \text{ in } (^*) \text{ è potenza di } a\}$$

$$S_1 = \{g \in G : y_k \text{ in } (^*) \text{ è potenza di } b\}$$

Evidentemente $S_0 \cup S_1 = G$.
Inoltre è facile verificare che gli insiemi

$$S_0 b^p,\ p \in N, \text{ sono a due a due disgiunti}$$

e così pure gli insiemi

$$S_1 a^p,\ p \in N$$

cosicché S_0 ed S_1 sono piccoli.

(ii) Anche la condizione che H sia un sottogruppo, e non un qualsiasi sottoinsieme è ineliminabile anche nel caso in cui G è abeliano: supponiamo ad esempio che S_1 sia un sottogruppo di indice 2 in G, e che $g \in G \backslash S_1$. Poniamo $S_2 = \{g\}$, $H = S_1 \cup S_2$.

Con le nostre notazioni è chiaro che

$$\mu(H) = 1, \qquad \mu(S_1) = \frac{1}{2}, \quad \mu(S_2) = \frac{1}{|G|}$$

da cui, per $|G| > 2$ otteniamo un controesempio.

Osserviamo ancora che il Teorema diventa banale se G è finito, anche nel caso più generale.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

Questa consisterà di due parti: nella prima verrà trattato il caso in cui $H = G$, mentre nella seconda si dedurrà il Teorema nella sua generalità da questa situazione particolare.

1ª parte: Supponiamo dunque $H = G$, e dimostriamo il Teorema per assurdo, assumendo pertanto

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(S_i) < 1 \tag{1}$$

Poiché $\mu(S_i)$ è 0 oppure il reciproco di un numero naturale, risulta dalle definizioni e dalla (1) che esistono interi positivi $r_1, \dots, r_m$ ed elementi di G $g_{i,j}$ $1 \le i \le m$, $1 \le j \le r_i$ tali che,

i) Per ogni i fissato gli insiemi

$$S_i g_{ij}^{-1} \qquad 1 \le j \le r_i$$

sono a due a due disgiunti

ii)

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{r_i} < 1$$

Definiamo, per una m-pla di interi $(j_1, ..., j_m)$ che soddisfano $1 \le j_i \le r_i$ per ogni i, elementi di G, $P(j_1, ..., j_m)$ mediante

$$P(j_1, ..., j_m) = g_{1,j_1} g_{2,j_2} \dots g_{m,j_m} \tag{2}$$

Il numero totale N di m-ple è ovviamente $r_1 \dots r_m$ che, per (ii) soddisfa:

$$N > \sum_{i=1}^{m} \prod_{\mu \neq i} r_\mu = \sum_{i=1}^{m} N_i \tag{3}$$

Poniamo inoltre, per $1 \le i \le m$

$$M_i = \#\{(j_1, ..., j_m), P(j_1, ..., j_m) \in S_i\}$$

Poiché

$$\bigcup_{i=1}^{m} S_i = G$$

chiaramente

$$\sum_{i=1}^{m} M_i \ge N$$

e per la (3) esiste un indice h, $1 \le h \le m$, tale che

$$M_h > N_h = r_1 \dots r_{h-1} r_{h+1} \dots r_m \tag{4}$$

Osserviamo che il numero delle m-ple $(j_1, ..., j_m)$ aventi l'h-ima componente fissata è ovviamente N_h, per cui, tenendo conto di (4) e ricordando la definizione di M_h otteniamo che:

« Esistono due m-ple

$$\xi_1 = (j_1, ..., j_{h-1}, x, j_{h+1}, ..., j_m)$$
$$\xi_2 = (j_1, ..., j_{h-1}, y, j_{h+1}, ..., j_m)$$

tali che $x \neq y$ e tali che $P(\xi_1)$ e $P(\xi_2)$ appartengono a S_h. »

Ponendo

$$\sigma_1 = \prod_{i=1}^{h-1} g_{i,j_i}, \qquad \sigma_2 = \prod_{i=h+1}^{m} g_{i,j_i}$$

$\tau_1 = g_{h,x}$, $\tau_2 = g_{h,y}$ si ha che

$$s_1 = \sigma_1\tau_1\sigma_2 \text{ e } s_2 = \sigma_1\tau_2\sigma_2 \text{ appartengono a } S_h$$

Per le normalità di S_h anche gli elementi
$\sigma_2\sigma_1\tau_1 = \sigma_2 s_1 \sigma_2^{-1}$ e $\sigma_2\sigma_1\tau_2 = \sigma_2 s_2 \sigma_2^{-1}$

Ma allora:

$$\sigma_2\sigma_1 \in S_h\tau_1^{-1} \cap S_h\tau_2^{-1}$$

contraddicendo (i)
La 1ª parte è così dimostrata.

2ª parte
Osserviamo anzitutto che, poiché $\mu(A) \leq \mu(B)$ se $A \subset B$ e poiché gli S_i ed H sono normali in G, possiamo supporre, cambiando eventualmente S_i con $S_i \cap H$, che gli S_i siano contenuti in H.

Supponiamo che $n = [G:H] < \infty$ (altrimenti il Teorema è ovvio).

Sia $S \subset H$; vogliamo dimostrare che

$$\mu_H(S) \leq n\mu(S) \tag{5}$$

Infatti siano $g_1, \ldots, g_r$ elementi di G tali che gli insiemi Sg_j sono a due a due disgiunti.

Esiste allora un insieme $A \subset \{1, 2, \ldots, r\}$ tale che

$$|A| \geq r/n$$

e tale che se i e j $\in$ A allora $g_i \equiv g_j \pmod{H}$.

Pertanto esistono $\sigma \in G$ ed elementi h_u di H, per $u \in A$, tali che

$$g_u = h_u\sigma \quad \text{per} \quad u \in A.$$

Ma gli insiemi $Sh_u\sigma$ $(u \in A)$ sono a due a due disgiunti e pertanto lo sono pure i sottoinsiemi di H Sh_u $(u \in A)$.

Dalle definizioni possiamo concludere che, se esistono r traslati disgiunti di S in G, si ha

$$\mu_H(S) \leq \frac{1}{|A|} \leq \frac{n}{r}$$

e dunque

$$\mu_H(S) \leq n \inf \frac{1}{r} = n\mu(S)$$

come volevasi.

Per la prima parte, essendo gli S_i normali in H si ha

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_H(S_i) \geq 1$$

da cui, per la (5) segue subito la tesi.

References

[1] Halmos P.R. – *Measure theory*. «Graduate Texts in Matemathics» Springer-Verlag (1958).

[2] Robinson D.J.S. – *A course in the theory of groups*. «Graduate Texts in Matemathics» Springer-Verlag (1982).