Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Fabrizio Davì, Elio Sacco

Indipendenza dal modulo di Poisson degli stati elastici di una piastra sottile

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **82** (1988), n.2, p. 259–267.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1988_8_82_2_259_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1988.

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXII (1988), pp. 259-267

Meccanica dei solidi. – *Indipendenza dal modulo di Poisson degli stati elastici di una piastra sottile.* Nota di FABRIZIO DAVÌ e ELIO SACCO, presentata (*) dal Socio E. GIANGRECO.

ABSTRACT. — *Independence of Poisson's ratio for elastic states of the thin plate.* Conditions of total or partial independence of Poisson's ratio, are given for the elastic states solving the equilibrium problem of thin plates with generalized boundary conditions.

KEY WORDS: Plates; Linear Elasticity.

RIASSUNTO. — Per il problema elastostatico della piastra sottile inflessa con dati al bordo generalizzati, si determinano le condizioni di indipendenza parziale o totale dal modulo di Poisson dello stato elastico soluzione.

1. INTRODUZIONE

La soluzione di un problema elastostatico dipende, a parità degli altri dati, dai valori dei moduli di elasticità del materiale. Un problema di notevole interesse è la ricerca di particolari soluzioni non dipendenti, o parzialmente dipendenti, dalle peculiarità di risposta di un materiale isotropo riflesse nelle costanti di Lamè λ e μ (ovvero nelle costanti "tecniche" E, modulo di Young, e ν, modulo di Poisson).

Per un continuo tridimensionale linearmente elastico, tale problematica è stata affrontata da Carlson in una serie di lavori che risalgono ai primi anni settanta (*cf.* [1], [2], [3]); in questi lavori vengono determinate condizioni necessarie e sufficienti atte a garantire l'indipendenza della soluzione dalle costanti di Lamè, con condizioni al contorno di posizione, di trazione, o miste. Di recente Podio Guidugli e Sburlati hanno riformulato il problema di Carlson, considerando condizioni al contorno di tipo generalizzato *à la* Gurtin (*cf.* [4], § 40) e determinando le condizioni necessarie e sufficienti affinché il campo di spostamento o lo stato tensionale, o entrambi, siano indipendenti dal modulo di Poisson.

Nel presente lavoro si ricercano le condizioni di indipendenza dal modulo di Poisson della soluzione del problema elastostatico per la piastra sottile (1).

Per cominciare, il classico problema della piastra sottile inflessa viene riformulato in modo da renderne la struttura più nitida e conveniente ai presenti sviluppi e,

(*) Nella seduta del 20 novembre 1987.

(1) Una problematica simile era stata a suo tempo affrontata da Timoshenko e Woinowsky-Krieger (*cf.* [5], p. 97), i quali peraltro si limitano a fornire formule per il calcolo dei momenti flettenti al variare di ν, una volta che questi siano noti per un valore di ν assegnato, per particolari geometrie e condizioni al contorno.

in particolare, da ottenere una scrittura compatta delle condizioni al bordo tramite l'inclusione tra i dati al bordo di un operatore di proiezione, specializzando il quale si rinvengono le usuali condizioni, nonché infinite altre.

Successivamente vengono determinate le condizioni necessarie e sufficienti a che la soluzione, vuoi in termini di spostamento trasversale del piano medio, vuoi in termini di momenti flettenti e torcente, risulti indipendente dal modulo di Poisson.

2. Il problema elastostatico per la piastra

Sia Ω un aperto limitato e connesso di $\mathbb{R}^2$, con frontiera $\partial\Omega$ regolare. Si intende per *piastra* (di spessore h costante) un corpo materiale che occupa la regione $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\mathcal{B} = \Omega \times \left] \frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2} \right[$$

Nella teoria classica delle piastre sottili (cf. ad esempio [1]), si assume che:

1. Non vi sono deformazioni nel piano medio Ω di $\mathcal{B}$.
2. Punti giacenti su di una normale ad Ω rimangono, dopo la deformazione, sulla normale alla superficie media della piastra deformata.
3. È trascurabile la tensione normale in direzione ortogonale al piano medio.

Per soddisfare tali ipotesi, scelto un riferimento cartesiano ortogonale antiorario $\{x_\alpha, z \mid \alpha = 1,2\}$ tale che Ω sia contenuto nel piano $z = 0$, si introduce il campo di spostamenti $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ così definito:

$$\mathbf{u} = -z w_{,\alpha} \mathbf{e}_\alpha + w \mathbf{e}_3 , \tag{2.1}$$

dove $\mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{e}_3$ sono i versori della base, mentre $w = w(x_\alpha)$ è lo spostamento trasversale del punto $(x_\alpha, 0)$ di Ω.

Si indichi con

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ \cdot & K_{22} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

la matrice simmetrica delle curvature associate al campo di spostamento (2.1) mediante le equazioni di congruenza:

$$\begin{aligned} K_{11} &= -w_{,11} \\ K_{22} &= -w_{,22} \\ K_{12} &= -w_{,12} . \end{aligned} \tag{2.3}$$

Si indichi altresì con

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ \cdot & M_{22} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

la matrice simmetrica dei momenti, di modo che, in un punto $\mathbf{x}$ di una curva C di Ω, il *momento flettente* m_n ed il *momento torcente* m_{nt} sono dati da:

$$m_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}\,, \qquad m_{nt} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{M n} \tag{2.5}$$

(qui, $\mathbf{n}$ è la normale, e $\mathbf{t}$ è la tangente alla curva C, orientata in modo che $\mathbf{n} \times \mathbf{t} = \mathbf{e}_3$).

Come è ben noto, detto $\mathbf{q} = q(x_\alpha)\mathbf{e}_3$ il sistema dei carichi, l'equazione di equilibrio per la piastra si può scrivere in termini di $\mathbf{M}$ nella forma

$$\operatorname{div}(\operatorname{div}\mathbf{M}) + \mathbf{q} = 0 \qquad \text{in } \Omega. \tag{2.6}$$

Curvature e momenti sono messi in relazione dalla equazione costitutiva

$$\mathbf{M} = \mathbb{D}[\mathbf{K}], \quad \mathbb{D} = 2\mu\mathbb{I} + \lambda(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}) \tag{2.7}$$

dove $\mathbf{I}$ e $\mathbb{I}$ sono i tensori identità del secondo e quarto ordine, rispettivamente, e i moduli di Lamé del materiale sono legati ai moduli tecnici di Young E e di Poisson ν, e alla rigidezza flessionale D della piastra, nel modo seguente:

$$2\mu = D(1-\nu), \quad \lambda = D\nu, \quad +\infty > D = \frac{h^3 E}{12(1-\nu^2)} \geqslant 0. \tag{2.8}$$

Sostituendo le (2.7) nelle (2.6), tenuto conto delle (2.3), si ottiene la classica equazione di campo di Lagrange-Sophie Germain:

$$-D\Delta\Delta w + q = 0.$$

Il problema elastostatico per la piastra va completato stipulando adatte condizioni al contorno. A tale scopo, si procede formalmente ponendo la (2.6) nella forma variazionale equivalente:

$$\int_\Omega \varphi(\operatorname{div}(\operatorname{div}\mathbf{M}) + \mathbf{q}) = 0 \quad \forall\varphi \in \Theta \tag{2.9}$$

dove Θ è uno spazio di funzioni di prova non vincolate ad obbedire alcuna condizione geometrica. In vista dell'identità

$$\varphi \operatorname{div}(\operatorname{div}\mathbf{M}) = \operatorname{div}(\varphi \operatorname{div}\mathbf{M}) - \nabla\varphi \cdot \operatorname{div}\mathbf{M} = \operatorname{div}(\varphi\operatorname{div}\mathbf{M} - \mathbf{M}\nabla\varphi) = \mathbf{M}\cdot\nabla(\nabla\varphi),$$

applicando il teorema della divergenza si ottiene

$$\int_\Omega (\mathbf{M}\cdot\nabla(\nabla\varphi) + \varphi\,\mathbf{q}) + \int_{\partial\Omega} (\varphi\operatorname{div}\mathbf{M}\cdot\mathbf{n} - \nabla\varphi\mathbf{M n}) = 0 \quad \forall\varphi \in \Theta. \tag{2.10}$$

Volendo conferire al termine di bordo un aspetto più conveniente per certi ulteriori sviluppi, si comincia con esprimere il gradiente di φ in funzione delle sue derivate in direzione normale e tangente:

$$\nabla\varphi = (\partial_n\varphi)\,\mathbf{n} + (\partial_t\varphi)\,\mathbf{t}$$

ottenendo

$$\nabla\varphi\cdot\mathbf{Mn} = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{Mn})\,\partial_n\varphi + (\mathbf{t}\cdot\mathbf{Mn})\,\partial_t\varphi;$$

l'ultima formula, ricordando le definizioni (2.5) di m_n e m_{nt}, diviene:

$$\nabla\varphi\cdot\mathbf{Mn} = m_n\partial_n\varphi + m_{nt}\partial_t\varphi = m_n\partial_n\varphi - \varphi\partial_t m_{nt} + \partial_t(\varphi m_{nt}).$$

In conclusione,

$$(2.11)\quad \int_{\partial\Omega}(\varphi\,\mathrm{div}\mathbf{M}\cdot\mathbf{n} - \nabla\varphi\cdot\mathbf{Mn}) = \int_{\partial\Omega}(t_n\varphi - m_n\partial_n\varphi),\qquad t_n := \partial_t m_{nt} + \mathrm{div}\mathbf{M}\cdot\mathbf{n},$$

dove t_n esprime la forza di taglio equivalente che appare nella classica condizione al bordo contratta di Kirchhoff.

Le condizioni al contorno possono quindi ottenersi assegnando gli enti cinematici w e $\partial_n w$, oppure gli enti statici t_n e m_n, in varie combinazioni. Precisamente, un generico punto $\mathbf{x}$ del bordo può essere un punto: di *incastro*, se sono assegnati w e $\partial_n w$; *libero*, se sono assegnati t_n e m_n; di *appoggio bilaterale*, se sono assegnati w e m_n; di *incastro scorrevole*, se sono assegnati $\partial_n w$ e t_n: Queste condizioni puntuali al bordo si possono scrivere in modo compatto introducendo i "vettori"

$$(2.12)\qquad [\mathrm{w}] = \begin{bmatrix} w \\ \partial_n w \end{bmatrix},\quad [\mathrm{f}] = \begin{bmatrix} t_n \\ m_n \end{bmatrix},$$

e un "proiettore" $\mathbf{P}$, la cui tabella può assumere una delle quattro forme seguenti

$$(2.13)\qquad [\mathrm{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad [0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si ottiene:

$$(2.14)\qquad \mathbf{Pw} = \mathbf{w}^*,\quad (\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{f} = \mathbf{f}^*\quad \text{su } \partial\Omega,$$

dove i "vettori" dei dati $\mathbf{w}^*$ e $\mathbf{f}^*$ devono verificare le condizioni di consistenza

$$(2.15)\qquad (\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{w}^* = 0,\qquad \mathbf{Pf}^* = 0\qquad \text{su } \partial\Omega.$$

Assegnata su $\partial\Omega$ la lista di funzioni $\mathbf{P}$, $\mathbf{w}^*$ e $\mathbf{f}^*$, le (2.14) e (2.15) descrivono ogni possibile condizione al contorno per la piastra.

3. IL PROBLEMA DIFFERENZA.

Il problema elastostatico $\mathcal{P}$ per la piastra $\mathcal{B}$ consiste nella determinazione degli stati elastici $s = \{w, \mathbf{K}, \mathbf{M}\}$ che soddisfano in Ω le equazioni di congruenza (2.3), le equazioni di equilibrio (2.6) e il legame costitutivo (2.7), e che, su $\partial\Omega$, soddisfano le condizioni al contorno (2.14).

Fatte comunque salve le ben note ipotesi che garantiscono l'unicità di soluzione del problema $\mathcal{P}$, per ogni valore del modulo λ_i si ottiene, a parità degli altri dati, un problema elastostatico $\mathcal{P}_i$ per il quale lo stato elastico soluzione è $s_i = \{w_i, \mathbf{K}_i, \mathbf{M}_i\}$. Per $\lambda_1 \neq \lambda_2$, si consideri il problema differenza $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2$, il cui stato elastico soluzione:

$$\{v, \mathbf{D}, \mathbf{S}\} = \{w_1 - w_2, \mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2, \ \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2\},$$

verifica in Ω le equazioni di congruenza:

$$D_{11} = -v_{,11}, \ D_{22} = -v_{,22}, \ D_{12} = v_{,12}; \tag{3.1}$$

l'equazione di equilibrio:

$$\operatorname{div}(\operatorname{div}\mathbf{S}) = \mathbf{0}; \tag{3.2}$$

il legame costitutivo:

$$\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{D} + \lambda_1(\operatorname{tr}\mathbf{D})\mathbf{I} + (\lambda_1 - \lambda_2)(\operatorname{tr}\mathbf{K}_2)\mathbf{I}; \tag{3.3}$$

e su $\partial\Omega$ le condizioni omogenee:

$$\mathbf{P}(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) = \mathbf{0}, \qquad (\mathbf{I} - \mathbf{P})(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2) = \mathbf{0}. \tag{3.4}$$

Tra gli stati elastici risolventi $\mathcal{P}$, parzialmente o totalmente indipendenti da λ, e $\mathcal{D}$ sussistono:

LEMMA 1. La coppia [spostamenti, curvature] (il momento) del problema $\mathcal{P}$ è indipendente da λ se e solo se la coppia [spostamenti, curvature] (il momento) del problema $\mathcal{D}$ si annulla su Ω per arbitrari valori ammissibili di λ_1 e λ_2.

LEMMA 2. Le tre proposizioni seguenti sono equivalenti:
(i) Lo stato elastico per il problema $\mathcal{P}$ è indipendente da λ.
(ii) Lo stato elastico per il problema $\mathcal{D}$ è nullo per arbitrari λ_1 e λ_2.
(iii) Il campo di spostamenti w per il problema $\mathcal{P}$ è indipendente da λ ed armonico.

DIM. La dimostrazione del Lemma 1 è ovvia; per il Lemma 2, che (ii) $\Leftrightarrow$ (i), è immediato. Per provare che (i) $\Leftrightarrow$ (iii), si osservi che

$$\operatorname{tr}\mathbf{K} = -(w_{,11} + w_{,22}) = -\Delta w,$$

per modo che la (2.7) si può scrivere nella forma

$$\mathbf{M} - 2\mu\mathbf{K} = -\lambda(\Delta w)\mathbf{I}.$$

Se w, e quindi $\mathbf{K}$, non dipende da λ, e se $\Delta w = 0$, allora lo stato elastico di $\mathcal{P}$ non dipende da λ. Viceversa, se s, e quindi sia $\mathbf{M}$ che $\mathbf{K}$, non dipende da λ, necessariamente $\Delta w = 0$. □

4. Stati elastici indipendenti dal modulo λ.

In questa sezione, analogamente a quanto fatto in [4] per un continuo tridimensionale elastico lineare ed isotropo, vengono stabiliti, due teoremi caratterizzanti, rispettivamente, i campi w e $\mathbf{M}$ indipendenti da λ che risolvono il problema $\mathcal{P}$ con condizioni al bordo generalizzate tipo (2.14).

Teorema 1 Sia indipendente da λ il campo di spostamenti w per il problema $\mathfrak{D}$. Allora,

(i) $$\Delta\Delta w = 0 \quad \text{in } \bar{\Omega};$$

(ii) $$(\mathbf{I} - \mathbf{P})\tilde{\mathbf{w}} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

con $$\tilde{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \partial_n \Delta w \\ \Delta w \end{bmatrix}$$

Viceversa, se per un dato valore di λ il campo w per $\mathcal{P}$ soddisfa (i) e (ii), allora w è indipendente da λ.

Dim. Supponiamo w indipendente da λ; allora il campo v per il problema $\mathfrak{D}$ è, per il Lemma 1, identicamente nullo su Ω. Ne consegue che le $(3.4)_1$ sono banalmente verificate, e che $\mathbf{D} = 0$, per cui la (3.3) diventa:

(4.1) $$\mathbf{S} = (\lambda_1 - \lambda_2)(\operatorname{tr} \mathbf{K}_2)\mathbf{I}.$$

Quest'ultima, inserita nella (3.2), fornisce:

$$\operatorname{div}(\operatorname{div}(\operatorname{tr}_2 \mathbf{K}_2)\mathbf{I}) = 0,$$

ovvero (i). Inoltre, sostituendo la (4.1) nella $(2.12)_2$, si ottiene:

$$[\mathbf{f}] = (\lambda_2 - \lambda_1) \begin{bmatrix} \partial_n \Delta w \\ \Delta w \end{bmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)\tilde{\mathbf{w}}$$

e, per le $(3.4)_2$, (ii) ne segue.

Viceversa, se per un valore λ sussistono le (i) e (ii), è facile controllare che $v \equiv 0$, $\mathbf{D} \equiv 0$ e $\mathbf{S}$ quale è fornito dalla (4.1) rappresentano l'unico stato elastico che risolve il problema $\mathfrak{D}$; dunque, per il Lemma 1, il campo di spostamenti w per $\mathcal{P}$ è indipendente da λ. □

COROLLARIO 1. Sia indipendente da λ il campo di spostamenti w per il problema $\mathcal{P}$, e sia il proiettore $\mathbf{P} \neq \mathbf{I}$ su $\Delta\Omega$. Allora, $\Delta w = 0$ in $\bar{\Omega}$.

DIM. Se $\mathbf{P} \neq \mathbf{I}$, posto $u = \Delta w$, le condizioni al contorno per l'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ in Ω divengono puntualmente vuoi $u = 0$, vuoi $\partial_n u = 0$, vuoi infine $u = 0$ e $\partial_n u = 0$. Ne segue (cf. [6] p. 52-54) che tale equazione ha la sola soluzione nulla $u = \Delta w \equiv 0$ se $u = 0$ su almeno un punto del bordo altrimenti ha per soluzione $u \equiv$ cost.

Questo corollario si interpreta dicendo che, se nessun punto del bordo è incastrato, gli unici stati di spostamento indipendenti da λ sono quelli corrispondenti al comportamento membranale della piastra.

TEOREMA 2. Sia indipendente da λ il campo dei momenti $\mathbf{M}$ per il problema $\mathcal{P}$. Allora

(i) $$\Delta w = \alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R};$$

(ii) $$v = v_o + \mathbf{a}\cdot\mathbf{p}(x) + {}^1\!/\!_2\,\alpha\gamma\mathbf{p}(x)\cdot\mathbf{p}(x),$$

dove $\mathbf{p}(x) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ è il vettore posizione del punto $\mathbf{x} \in \Omega$ rispetto all'origine $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$,

$$\gamma = \frac{\lambda_2\,\lambda_1}{2(\mu + \lambda_1)},$$

e la scelta della costanti $v_0 \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ resta ristretta dalle condizioni al contorno

$$\mathbf{P}(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega.$$

Viceversa, se per un valore di λ sussistono la (i) e la (ii), allora lo stato di tensione $\mathbf{M}$ è indipendente da λ.

DIM. Supponiamo $\mathbf{M}$ indipendente da λ; allora per il Lemma 1 $\mathbf{S}$ per il problema $\mathcal{D}$ è identicamente nullo su Ω. Ne consegue che le $(3{,}4)_2$ sono banalmente verificate, come pure le (3.2). Dalla (3.3):

(4.2) $$\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{D} + \lambda_1(\operatorname{tr}\mathbf{D})\mathbf{I} + (\lambda_1 - \lambda_2)(\operatorname{tr}\mathbf{K}_2)\mathbf{I} = 0$$

per cui

$$\operatorname{tr}\mathbf{D} = 2\gamma\operatorname{tr}\mathbf{K}_2,$$

ovvero

(4.3) $$\Delta v = 2\gamma\,\Delta w.$$

Sostituendo (4.3) nella (4.2) si ottiene quindi:

(4.4) $$\mathbf{D} = -\gamma\Delta w\mathbf{I}.$$

La (4.4) esprime le condizioni di compatibilità per il campo di deformazione **D**, che si riducono al sistema:

(4.5) $$v_{,11} = \gamma \Delta w\,, \quad v_{,22} = \gamma \Delta w\,, \quad v_{,12} = 0\,,$$

integrando il quale si ottiene la (i) e la formula di rappresentazione (ii) per il campo v.

Viceversa, si supponga che, per un dato valore di λ, Δw risulti costante e che lo stato di spostamento per il problema $\mathfrak{D}$ ammetta la rappresentazione (ii). Allora, $\mathfrak{D}$ è risolto unicamente dallo stato elastico in cui v è dato da (ii), **D** ha la forma (4.4), e il campo di tensione **S** è identicamente nullo su Ω, e per il Lemma 1, si ha la tesi. □

COROLLARIO 2. Sia il campo di tensioni per il problema P indipendente da λ, e sia il proiettore

$$[\mathbf{P}] = [\mathbf{I}\,] \quad \text{oppure} \quad [\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

su una porzione $\partial_1\Omega$ di $\partial\Omega$ che contenga almeno quattro punti, a tre a tre non allineati. Allora, $\Delta w = 0$ su $\bar{\Omega}$.

DIM. Se **P** assume una delle due forme indicate, dalla $(3.4)_1$ si ha che $v(\mathbf{x}) \equiv 0$ su $\partial_1\Omega$. Scelto $\mathbf{x}_0 \in \partial_1\Omega$, si consideri l'insieme

$$\Theta_0 = \{\mathbf{p} \mid \mathbf{p} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0,\ \mathbf{x} \in \partial_1\Omega\}.$$

Per $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, la (ii) fornisce $v_0 = 0$; per $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$,

$$v(\mathbf{x}) = ({}^1\!/_2\gamma\alpha\mathbf{p}(\mathbf{x}) + \mathbf{b})\cdot\mathbf{p}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{p} \in \Theta_0\,,$$

il che, vista la costituzione di Θ_0 ed essendo α e **b** costanti, sarà possibile se e solo se $\mathbf{b} = 0$ e $\alpha = \Delta w \equiv 0$. □

Consegue da questo corollario che, se le condizioni al contorno sono di incastro o di appoggio per almeno quattro punti non allineati, e gli stati tensionali **M** sono indipendenti da λ, allora la soluzione in termini di spostamento per il problema $\mathcal{P}$ è esclusivamente di tipo membranale.

Come esempio di applicazione dei corollari, si consideri una piastra la cui superficie media Ω è un triangolo rettangolo isoscele, appoggiata sui due lati uguali, con il terzo caricato da una distribuzione uniforme di momento flettente m e soggetto ad uno spostamento parabolico nullo dei vertici.

Il campo $w = (m/4\mu)\,(x_1^2 - x_2^2)$ è la soluzione del problema elastostatico (2.6) con le assegnate condizioni al contorno; w, indipendente da λ, soddisfa il corollario 1 ed è armonico.

Analogamente il campo di tensioni **M** associato a w è indipendente da λ e soddisfa il corollario 2.

BIBLIOGRAFIA

[1] CARLSON D.E., *Dependences of linear elasticity solutions on elastic costants I. Dependence on Poisson's ratio in elastostatics*, "J. Elasticity", *1* (1971) 145-151.

[2] CARLSON D.E., *Dependences of linear elasticity solutions on elastic costants II. Dependence on the shear modulus in elastostatics*, "J. Elasticity", *2* (1972) 129-134.

[3] CARLSON D.E., *Dependences of linear elasticity solutions on elastic costants III. Elastodynamics*, "J. Elasticity", *3* (1973) 169-1978.

[4] PODIO GUIDUGLI P. & SBURLATI R., *Indipendence of Poisson's ratio in classical elastostatics with generalized boundary conditions*. "J. Elasticity", *16* (1986) 325-331.

[5] TIMOSHENKO S.P. & WOINOWSKY KRIEGER S., *Theory of Plates and Shells. Mc Graw-Hill ISE*, Tokyo (1982).

[6] WEINBERGER H.F., *A First Course in Partial Differential Equations. John Wiley & Sons*, New York (1965).