
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GIUSEPPE CREAZZA, ENZO SIVIERO

**Definizione del carico di completa fessurazione dei
continui bidimensionali isotropi in cemento armato**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 82 (1988), n.2, p. 237–239.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1988_8_82_2_237_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Definizione del carico di completa fessurazione dei continui bidimensionali isotropi in cemento armato.* Nota di GIUSEPPE CREAZZA e ENZO SIVIERO, presentata (*) dal Socio E. GIANGRECO.

ABSTRACT. — *Definition of the load at formation of full cracking pattern in reinforced concrete isotropic bidimensional continuous bodies.* For reinforced concrete isotropic bidimensional continuous bodies, by means of generalized theorem of minimum work, it is demonstrated that the load at formation of full cracking pattern can be obtained assuming directly the final cracking pattern as Volterra's distortions, avoiding the follow-up of the evolution of the phenomenon which can be defined, from an operational point of view, by means of localized Somigliana's distortions.

KEY WORDS: Bidimensional continuous bodies; Distortions; Cracking; Volterra; Somigliana.

RIASSUNTO. — Per i continui bidimensionali sottili isotropi in c.a., a mezzo del teorema generalizzato del minimo lavoro, si dimostra che il carico relativo alla formazione del completo quadro fessurativo si può ottenere considerando l'assetto finale di apertura delle distorsioni di Volterra, evitando di seguire l'evoluzione del fenomeno definibile da un punto di vista operativo mediante distorsioni localizzate di Somigliana.

Per i continui bidimensionali sottili isotropi in c.a., sono note le relazioni tra carichi e momenti in campo elastico lineare e cioè fino alla formazione della prima fessura. Sono altresì note, come si vedrà, le stesse relazioni a quadro fessurativo interamente formato. È ancora oggetto di studio invece la fase intermedia e in particolare la definizione del punto che caratterizza il passaggio tra questa e quella successiva.

In questa fase, l'apertura di ogni fessura può ricondursi ad una particolare distorsione di Somigliana (rotazione imposta tra due facce contigue) di caratteristiche essenzialmente variabili relativamente alla posizione della distorsione nel continuo e all'entità del carico [1].

Quando si è formato l'intero quadro fessurativo, le distorsioni di Somigliana, che costituiscono ogni intera linea, sono tra loro uguali ed equivalgono ad una unica analoga distorsione del tipo di Volterra, ove il continuo, agli effetti evolutivi, assume un carattere isostatico indipendentemente dalla sua forma e dal tipo di vincoli [2].

Ciò comporta, a quadro fessurativo completamente formato, una relazione lineare tra carichi e momenti, della quale sono però note le sole coordinate del punto ultimo (valori di Johansen). Per definire tale relazione rimane ancora aperta la determi-

(*) Nella seduta del 20 novembre 1987.

nazione delle coordinate del punto che corrisponde alla formazione del completo quadro fessurativo, coordinate che dipendono dall'insieme delle distorsioni di Somigliana che via via si formano e sulle quali non è possibile formulare alcuna ipotesi, in quanto si può solo procedere passo-passo con tecniche computazionali di tipo non lineare.

Si fa però presente che per quanto esposto in [2], la formazione dell'intero quadro fessurativo rappresenta la fase di passaggio tra comportamento "alla Somigliana" e comportamento "alla Volterra"; conseguentemente i momenti che si determinano lungo le linee di fessurazione con i due procedimenti sono necessariamente coincidenti e ivi rappresentano l'effettivo stato di sollecitazione del continuo.

La tecnica "alla Volterra" per la determinazione dei momenti lungo le linee di fessurazione è più semplice in quanto è sufficiente considerare il continuo formato da pannelli elastici tra loro connessi lungo le linee di fessurazione le quali sono equivalenti a cerniere cilindriche a stato di tensione e di deformazione costanti lungo il loro sviluppo. Detta tecnica fornisce poi immediatamente i valori dei momenti se si trascura, come d'uso, il lavoro elastico dei pannelli e si applica direttamente il principio dei lavori virtuali così come esposto in [3].

Tutto ciò premesso, rimane ora da dimostrare che entrambi i procedimenti sopraesposti conducono allo stesso livello di carico all'atto del completamento del quadro fessurativo.

Detto m_i il momento della i -esima linea di fessurazione all'atto della formazione del completo quadro fessurativo, e Δm_s il generico incremento di momento che si forma lungo la linea considerata per effetto di un incremento di carico nell'intervallo compreso tra la formazione della prima fessura e il quadro fessurativo completamente formato, in termini generali sarà:

$$(1) \quad m_i = \sum \Delta m_s$$

Dette $\bar{q}_i$ e $\Delta \bar{q}_s$ le discontinuità (rotazioni anelastiche) che corrispondono ai momenti sopradefiniti, sarà anche:

$$(2) \quad \bar{q}_i = \sum \Delta \bar{q}_s$$

Tutto ciò premesso, con riferimento al teorema generalizzato del minimo lavoro [4] possiamo ora scrivere con ovvio significato di simboli:

— "alla Volterra"

$$(3) \quad \delta \left[\int_V \varphi(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dV + \sum_{l_i} \int (m_i \bar{q}_i) dl_i \right] = 0$$

— "alla Somigliana"

$$(4) \quad \delta \left[\int_V \varphi(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dV + \sum_{l_i} \int \sum (\Delta m_s \cdot \Delta \bar{q}_s) dl_i \right] = 0$$

I termini delle due funzioni che si riferiscono alle distorsioni nelle relazioni (3) e (4) devono necessariamente coincidere in forza delle (1) e (2); esse cioè sono indipendenti dal programma di carico e dipendono solamente dai valori finali dei momenti e delle relative rotazioni anelastiche.

Di conseguenza anche i minimi delle prime due funzioni nelle relazioni (3) e (4) devono necessariamente coincidere e ciò si traduce in parità di stato di sollecitazione e quindi di carico applicato sia nell'ipotesi "alla Somigliana" che in quella "alla Volterra".

Se poi si considera l'invariabilità della posizione dell'asse neutro per i livelli di carico di cui trattasi, lungo le linee di fessurazione si può scrivere la relazione di tipo generale:

$$(5) \quad m = k \bar{q}$$

che comporta l'identità dei lavori mutui come risulta sviluppando la relazione $\Sigma(\Delta m_s \cdot \Delta \bar{q}_s)$ dalla quale si perviene al risultato finale $m_i \bar{q}_i$ che riconferma quanto sopra esposto.

La (5) poi consente una dimostrazione diretta della coincidenza delle relazioni (3) e (4), in quanto a causa della linearità introdotta, il continuo può anche essere visto come globalmente elastico lineare, con leggi costitutive diverse nei pannelli e lungo le linee di fessurazione. In tal caso i due termini che formano le relazioni (3) e (4) vengono condensati nella sola funzione elastica alla quale è applicabile il teorema di Menabrea sul minimo lavoro con ovvia coincidenza dei risultati.

In sintesi si può pertanto affermare:

"Il carico corrispondente alla formazione del completo quadro fessurativo è indipendente dall'evoluzione del fenomeno fessurativo. Esso dipende solamente dall'assetto finale valutabile nel continuo parzializzato lungo le linee di fessurazione rappresentabili come cerniere cilindriche a stato di tensione e deformazione anelastica costanti lungo il loro sviluppo"

BIBLIOGRAFIA

- [1] LEVI F., *Superfici d'influenza e fenomeni di adattamento nelle lastre piane*, Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, vol. 84, 1949-1950.
- [2] CREAZZA G., *Nuova interpretazione sul comportamento delle lastre isotrope in cemento armato in fase di fessurazione avanzata*, Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, vol. 109, 1974-1975.
- [3] CREAZZA G., *Relazioni caratteristiche nel calcolo dei continui bidimensionali isotropi in cemento armato dalla completa fessurazione al collasso*, Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, vol. 114, 1980.
- [4] COLONNETTI G., *Sul problema delle coazioni elastiche*. Nota II, Rendiconti Accademia dei Lincei, vol. XXVII, Roma, 1918.