Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Umberto Perego

Metodo della differenza ali'indietro e determinazione dei moduli tangenti per analisi evolutive elastoplastiche a passi finiti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **82** (1988), n.1, p. 75–89.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1988_8_82_1_75_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1988.

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXII (1988), pp. 75-89

Meccanica dei solidi. — *Metodo della differenza all'indietro e determinazione dei moduli tangenti per analisi evolutive elastoplastiche a passi finiti.* Nota di UMBERTO PEREGO, presentata (*) dal Corrisp. G. MAIER.

ABSTRACT. — *Backward difference integration and computation of the tangent moduli for elastoplastic analysis by finite steps.* In this paper a backward difference technique is applied to the numerical time integration of elasto-plastic constitutive laws. Reference is made to isotropic constitutive models for which the yield functions depend on the first invariant of the stress tensor, on the second invariant of the stress deviator and on some suitable internal variables. For these models the implicit non-linear relations arising from the adopted integration scheme are established; these relations represent the material constitution in the finite-step. An expression for the "tangent matrix" consistent with such integration scheme is achieved in a unified form which is particularly convenient for computer implementations.

KEY WORDS: Elastoplasticity; Backward difference; Finite elements.

RIASSUNTO. — Si discute l'applicazione di un procedimento per «differenza all'indietro» («backward difference») all'integrazione numerica nel tempo di leggi costitutive elastoplastiche e se ne esaminano alcuni aspetti peculiari. Con riferimento a modelli costitutivi isotropi per i quali le funzioni di snervamento dipendono dall'invariante primo delle tensioni, dall'invariante secondo del deviatore delle tensioni e da opportune variabili interne, si ricavano le relazioni non lineari implicite in termini di incrementi finiti, relazioni che esprimono il legame costitutivo del materiale nel passo in base allo schema di integrazione adottato. Coerentemente con tale schema si ricava l'espressione del tensore dei moduli tangenti in una forma unificata che facilita l'implementazione in codici di calcolo automatico.

1. INTRODUZIONE

Il comportamento dei materiali elastoplastici è non reversibile o anolonomo e pertanto la legge costitutiva deve essere espressa in termini di velocità di variazione. Per ottenere una risposta in termini finiti risulta quindi necessario eseguire una integrazione rispetto al tempo, inteso come variabile ordinatrice degli eventi meccanici. Nell'analisi numerica di strutture o solidi in presenza di non linearità fisiche del materiale è prassi comune suddividere la storia delle azioni esterne in intervalli di tempo di ampiezza finita. Con riferimento ad un

(*) Nella seduta del 19 giugno 1987.

generico intervallo, si suppongano note al suo inizio tensioni, deformazioni totali (e plastiche) e variabili interne, nonché alla sua fine le deformazioni totali. Ciò che si vuole ottenere sono lo stato tensionale, il valore delle variabili interne e l'incremento delle deformazioni plastiche che alla fine del passo, coerentemente con la legge costitutiva, corrispondono alle deformazioni totali note. La determinazione di queste quantità viene spesso indicata come « fase di correzione », alludendo alla modifica dello stato tensionale effettuata in tale fase rispetto allo stato di « tentativo » corrispondente attraverso la legge di Hooke alle date deformazioni (totali) finali.

I contributi e le proposte su possibili tecniche di soluzione numerica approssimata per questo problema sono molteplici [1-7]. In alcuni casi, per modelli particolarmente semplici, e sotto l'ipotesi che la velocità di variazione delle deformazioni totali sia costante nel passo, sono state proposte delle soluzioni analitiche [8-10]. Recentemente Ortiz e Popov [11] hanno sviluppato una trattazione unificata di vari metodi raggruppabili nelle classi dei « trapezi generalizzati » e del « punto di mezzo generalizzato » e ne hanno analizzato comparativamente le prestazioni in termini di stabilità ed accuratezza. Da questa disamina emerge come il metodo detto della « differenza all'indietro » (« backward difference ») presenti accuratezza superiore a quella degli altri metodi e stabilità incondizionata (per qualsiasi ampiezza di passo) ed indipendente dalla curvatura della superficie di snervamento.

Una prima trattazione sistematica dell'integrazione di leggi costitutive elastoplastiche con il metodo della differenza all'indietro si deve ad Hibbitt [12]. Più recentemente ne è stata mostrata l'applicazione ad alcuni particolari modelli costitutivi con incoraggianti risultati [13, 14]. Una significativa interpretazione meccanica è stata fornita da Martin *et alii* [15], che hanno mostrato per certi modelli costitutivi come l'adozione del metodo equivalga ad assumere una legge reversibile (olonoma) nel passo. L'originaria, intrinseca anolonomia viene messa in conto solo all'inizio di ogni passo, quando si impone esplicitamente che le deformazioni plastiche accumulate non siano recuperabili allo scarico. Al tendere all'infinito del numero dei passi (ovvero al tendere a zero della loro ampiezza) appare lecito aspettarsi, anche se non a rigore dimostrato, che la risposta tenda a coincidere con quella caratterizzata dall'effettivo comportamento anolonomo [16]. Nel contesto più limitato delle leggi costitutive con superfici di snervamento lineari (o linearizzate) a tratti, un approccio simile basato sul concetto di analisi olonoma nel passo (« stepwise holonomic analysis ») era stato proposto da Maier [17, 18].

Quando l'analisi venga condotta in base a discretizzazione per elementi finiti, l'integrazione rispetto al tempo della legge costitutiva è generalmente effettuata in corrispondenza dei punti utilizzati per valutare numericamente gli integrali nello spazio (di solito i punti di Gauss). La non linearità del legame elastoplastico richiede, anche nell'ambito qui assunto di piccole deformazioni, l'adozione di un procedimento iterativo all'interno di ogni passo di carico. Se lo schema iterativo è del tipo di Newton-Raphson, si possono distinguere due fasi principali: fase di « previsione », nella quale si ottiene una stima degli spostamenti (e, attraverso il legame di congruenza, delle deformazioni totali) risolvendo le equazioni governanti del sistema discretizzato linearizzate in un intorno della situazione statica al termine dell'iterazione precedente; fase di « correzione », già descritta, che fornisce in base alla legge costitutiva integrata il valore delle tensioni, delle variabili interne e delle deformazioni plastiche alla fine del passo. Come dimostrato da Nagtegaal [19] e Simo e Taylor [20], se la matrice di rigidezza tangente del materiale viene ottenuta coerentemente con la legge costitutiva integrata e non si verificano scarichi, è garantita la convergenza asintotica del secondo ordine propria dello schema iterativo alla Newton-Raphson.

Nella presente nota si sviluppa il metodo della differenza all'indietro con riferimento a modelli costitutivi elastoplastici isotropi dipendenti dall'invariante primo delle tensioni, dall'invariante secondo del deviatore delle tensioni e da opportune variabili interne. Per questi modelli si fornisce l'espressione esplicita generale della matrice dei moduli tangenti per stati piani di deformazione. Si mostra come essa possa essere espressa in una forma particolarmente adatta all'implementazione in codici di calcolo automatico.

2. INTEGRAZIONE DI LEGGI COSTITUTIVE ELASTOPLASTICHE CON IL METODO DELLA DIFFERENZA ALL'INDIETRO

Le relazioni seguenti rappresentano la classe alquanto generale di leggi costitutive elastoplastiche (non necessariamente di tipo « associato ») qui considerata:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \mathrm{D}_{ijhk}(\dot{\varepsilon}_{hk} - \dot{\varepsilon}^p_{hk}) \qquad i, j, h, k = 1, \ldots, 3 \tag{2.1 a}$$

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \frac{\partial g_\alpha(\sigma_{hk}, h_\gamma)}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda}_\alpha \qquad \alpha = 1, \ldots, y \,;\, \gamma = 1, \ldots, m \tag{2.1 b}$$

$$\dot{h}_\eta = q_{\eta\alpha}(\sigma_{hk}, h_\gamma)\,\dot{\lambda}_\alpha \qquad \eta = 1, \ldots, m \tag{2.1 c}$$

$$\phi_\alpha(\sigma_{hk}, h_\gamma) \leqq 0 \quad ; \quad \dot{\lambda}_\alpha \geqq 0 \quad ; \quad \phi_\alpha \dot{\lambda}_\alpha = 0 \tag{2.1 d, e, f}$$

In queste formule ed in quanto segue un punto denota velocità di variazione; vale la regola di somma di indici ripetuti nel monomio; ε_{hk} indica il tensore di (« piccola ») deformazione totale e ε^p_{hk} quello delle deformazioni plastiche; σ_{ij} rappresenta il tensore degli sforzi di Cauchy; D_{ijhk} è il tensore isotropo dei moduli elastici; le ϕ_α sono y funzioni di snervamento tali che la condizione (2.1 *d*) definisca nello spazio delle tensioni la regione all'interno della quale il comportamento del materiale è lineare elastico; le g_α rappresentano gli y potenziali plastici il cui gradiente rispetto alle tensioni fornisce la direzione istantanea delle deformazioni plastiche; h_η sono m variabili interne che tengono conto della storia deformativa plastica del materiale; λ_α sono y moltiplicatori plastici.

Si suddivida la storia di azioni esterne cui è assoggettata la struttura o solido in intervalli di tempo (ordinativo) e si faccia riferimento all'$(n+1)$-esimo intervallo (compreso tra gli istanti t^n e t^{n+1}). Applicando il metodo della differenza all'indietro alle (2.1) si ottiene:

$$\sigma_{ij}^{n+1} = D_{ijhk}\,(\varepsilon_{hk}^{n+1} - \varepsilon_{hk}^{pn} - \Delta\varepsilon_{hk}^{p}) \tag{2.2 a}$$

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{p} = \frac{\partial g_\alpha\,(\sigma_{hk}^{n+1}, h_\gamma^{n+1})}{\partial\sigma_{ij}}\,\Delta\lambda_\alpha \tag{2.2 b}$$

$$\Delta h_\eta = q_{\eta\alpha}\,(\sigma_{hk}^{n+1}, h_\gamma^{n+1})\,\Delta\lambda_\alpha \tag{2.2 c}$$

$$\phi_\alpha\,(\sigma_{hk}^{n+1}, h_\gamma^{n+1}) \leqq 0 \quad ; \quad \Delta\lambda_\alpha \geqq 0 \quad ; \quad \phi_\alpha\Delta\lambda_\alpha = 0\,. \tag{2.2 d, e, f}$$

I valori finali delle variabili sono parte integrante della soluzione tranne che per le deformazioni totali finali che sono assegnate. Pertanto le (2.2) costituiscono un insieme di relazioni implicite la cui risoluzione richiede in generale un procedimento iterativo. Il problema (2.2) può anche essere formulato come problema di ottimizzazione nella seguente forma:

$$\min_{\Delta\lambda_\alpha} \{-\phi_\alpha\,(\sigma_{hk}^{n+1}(\Delta\lambda_\beta), h_\eta^{n+1}(\Delta\lambda_\beta))\,\Delta\lambda_\alpha\} \tag{2.3 a}$$

sotto le condizioni:

$$\phi_\alpha \leqq 0 \quad ; \quad \Delta\lambda_\alpha \geqq 0 \qquad (\alpha\,, \beta = 1\,, \ldots, y) \tag{2.3 b}$$

dove le funzioni $\sigma_{hk}^{n+1}(\Delta\lambda_\beta)$ e $h_\eta^{n+1}(\Delta\lambda_\beta)$ sono definite in modo implicito dalle (2.2).

Se e solo se il minimo della (2.3) vale zero, le soluzioni dei problemi (2.2) e (2.3) coincidono. Nel caso particolare in cui la legge di scorrimento (2.1 *b*) sia associata, si abbia $y = m$, $q_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} = H_{\beta\alpha} = \text{cost}$ dove $H_{\alpha\beta}\Delta\lambda_\alpha\Delta\lambda_\beta$ sia una forma quadratica definita positiva e le funzioni di snervamento dipendano linearmente dalle variabili interne, le relazioni (2.2) vengono a coincidere con le condizioni di minimo della seguente funzione quadratica (strettamente) convessa:

$$\min_{\sigma_{ij}, \Delta\lambda_\alpha} \left\{\frac{1}{2} D_{ijhk}^{-1}\,\sigma_{ij}\sigma_{hk} - \sigma_{ij}\,(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{pn}) + \frac{1}{2} H_{\alpha\beta}\,\Delta\lambda_\alpha\Delta\lambda_\beta\right\} \tag{2.4 a}$$

sotto le condizioni:

$$\phi_\alpha\,(\sigma_{hk}, \Delta\lambda_\alpha) \leqq 0 \tag{2.4 b}$$

Risolvendo il problema (2.4) con un algoritmo di programmazione non lineare si ottengono tensioni e moltiplicatori plastici al tempo t^{n+1}.

Alternativamente, partendo dalle tensioni di tentativo $\sigma^t_{ij} = D_{ijhk}\, \varepsilon^{n+1}_{hk}$, si può adottare un procedimento euristico per tentativi che fornisca gli $\bar{y}$ modi plastici attivi al termine del passo. Ciò consente di soddisfare le condizioni (2.2. e, f) e di considerare la (2.2 d) direttamente con il segno di uguaglianza limitando la variabilità di α ai soli modi attivabili nel tentativo corrente. Si è così ricondotti alla soluzione di un sistema non lineare definito dalle (2.2 a, b, c) e (2.2 d), quest'ultima presa con il segno di uguaglianza, nelle $12 + m + \bar{y}$ incognite σ^{n+1}_{ij}, $\Delta\varepsilon^p_{ij}$, Δh_η, $\Delta\lambda_\alpha$. Questo sistema può essere risolto iterativamente (per ogni punto di Gauss e per ogni iterazione all'interno di ogni passo di carico) utilizzando uno dei vari metodi numerici disponibili in letteratura. Appare pertanto fin d'ora come sia da attendersi in generale nel metodo della differenza all'indietro un notevole onere di calcolo accanto alla migliore accuratezza e stabilità indicate per es. in [11].

Rilevante interesse presentano i modelli isotropi in cui l'invariante terzo delle tensioni non intervenga nella legge costitutiva. In particolare si assuma che questa coinvolga, oltre che variabili interne, solamente l'invariante primo delle tensioni e l'invariante secondo del deviatore delle tensioni. Per gli sviluppi successivi è opportuno definire le seguenti quantità:

(2.5 a) $$\sigma_m = \frac{\sigma_{kk}}{3}$$

(2.5 b) $$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}$$

(2.5 c) $$\varepsilon_v = \varepsilon_{kk}$$

(2.5 d) $$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_v \delta_{ij}}{3}$$

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ per $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ per $i \neq j$), s_{ij} ed e_{ij} rappresentano rispettivamente le componenti deviatoriche dei tensori di sforzo e deformazione, σ_m la componente idrostatica di tensione ed ε_v la componente di deformazione volumetrica. Il legame elastico lineare espresso nelle quantità sopra definite si scrive:

(2.6 a) $$\sigma_m = K\,(\varepsilon_v - \varepsilon^p_v)$$

(2.6 b) $$s_{ij} = 2\,G\,(e_{ij} - e^p_{ij})$$

dove K è il modulo volumetrico e G il modulo tangenziale. In seguito si farà anche uso delle variabili:

(2.7 a) $$s = \sqrt{\frac{1}{2}\, s_{ij}\, s_{ij}}$$

$$(2.7\,b) \qquad e^* = \left[\frac{1}{2}\,(e_{ij}^{n+1} - e_{ij}^{pn})\,(e_{ij}^{n+1} - e_{ij}^{pn})\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(2.7\,c) \qquad \varepsilon^* = \varepsilon_v^{n+1} - \varepsilon_v^{pn}$$

$$(2.7\,d) \qquad \mathrm{E}_{ij} = e_{ij}^{n+1} - e_{ij}^{pn}$$

dove s è la radice quadrata dell'invariante secondo del deviatore di tensione. Le equazioni (2.2), modificate in base alla notazione sopra introdotta, si scrivono:

$$(2.8\,a) \qquad s_{ij}^{n+1} = 2\,\mathrm{GE}_{ij} - 2\,\mathrm{G}\,\Delta e_{ij}^{p}$$

$$(2.8\,b) \qquad \sigma_m^{n+1} = \mathrm{K}\varepsilon^* - \mathrm{K}\,\Delta\varepsilon_v^{p}$$

$$(2.8\,c) \qquad \Delta e_{ij}^{p} = \frac{\partial g_\alpha\,(s^{n+1}, \sigma_m^{n+1}, h_\gamma^{n+1})}{\partial s_{ij}}\,\Delta\lambda_\alpha$$

$$(2.8\,d) \qquad \Delta\varepsilon_v^{p} = \frac{\partial g_\alpha\,(s^{n+1}, \sigma_m^{n+1}, h_\gamma^{n+1})}{\partial \sigma_m}\,\Delta\lambda_\alpha$$

$$(2.8\,e) \qquad \Delta h_\eta = q_{h\alpha}\,(s^{n+1}, \sigma_m^{n+1}, h_\gamma^{n+1})\,\Delta\lambda_\alpha$$

$$(2.8\,f, g, h) \qquad \phi_\alpha\,(s^{n+1}, \sigma_m^{n+1}, h_\gamma^{n+1}) \leqq 0 \quad ; \quad \Delta\lambda_\alpha \geqq 0 \quad ; \quad \phi_\alpha \Delta\lambda_\alpha = 0$$

Si definiscono le seguenti quantità «di tentativo»:

$$(2.9\,a) \qquad s_{ij}^{t} = 2\,\mathrm{G}\,\mathrm{E}_{ij}$$

$$(2.9\,b) \qquad s^{t} = 2\,\mathrm{G}\,e^* .$$

Come osservato in [10] è facile verificare che in base alle (2.8):

$$(2.10) \qquad s_{ij}^{n+1} = \frac{s_{ij}^{t}}{s^{t}}\,s^{n+1} = \frac{\mathrm{E}_{ij}}{e^*}\,s^{n+1} .$$

Ciò significa che nello spazio delle componenti deviatoriche, utilizzando il metodo della differenza all'indietro, il ritorno sulla superficie di snervamento avviene nella stessa direzione del vettore che rappresenta lo stato tensionale di tentativo. Questa considerazione permette di semplificare notevolmente i calcoli. È infatti possibile ridurre a due le variabili di tensione da determinare, e più precisamente σ_m^{n+1} ed s^{n+1} . Da queste, facendo uso delle (2.10) e (2.5 *a*, *b*), si calcolano facilmente tutte le componenti del tensore di sforzo.

Supponendo di conoscere a priori quali saranno i modi attivi al termine del passo, le (2.8) si riducono al seguente sistema di equazioni non lineari:

$$s^{n+1} = s^t - G\,\frac{\partial g_\alpha}{\partial s}\,\Delta\lambda_\alpha \tag{2.11 a}$$

$$\sigma_m^{n+1} = K\varepsilon^* - K\,\frac{\partial g_\alpha}{\partial \sigma_m}\,\Delta\lambda_\alpha \tag{2.11 b}$$

$$\Delta h_\eta = q_{\eta\alpha}\,(s^{n+1}, \sigma_m^{n+1}, h_\gamma^{n+1})\,\Delta\lambda_\alpha \tag{2.11 c}$$

$$\phi_\alpha\,(s^{n+1}, \sigma_m^{n+1}, h_\gamma^{n+1}) = 0 \quad , \quad (\alpha = 1, \ldots, \bar{y}) \tag{2.11 d}$$

Qualora le funzioni di snervamento fossero lineari negli invarianti e si adottasse inoltre una legge di incrudimento lineare, il sistema (2.11) diventerebbe lineare e risolubile in forma chiusa. Questa condizione particolarmente favorevole si presenta in realtà anche per modelli di frequente impiego quali i modelli imperniati sui criteri di von Mises e di Drucker–Prager con incrudimento lineare [14]. In questi casi il metodo della differenza all'indietro diventa molto conveniente anche dal punto di vista dell'onere computazionale.

La specializzazione di questo procedimento al caso di problemi piani nelle deformazioni o assialsimmetrici è immediata essendo sufficiente ridurre di uno il campo di variabilità degli indici i, j, h e k. Per problemi piani nelle tensioni è invece necessario aggiungere esplicitamente il vincolo che la tensione nelle terza direzione sia nulla. In termini di componenti deviatoriche e idrostatica questo vincolo si può scrivere:

$$-s_{11} - s_{22} + \sigma_m = 0\,. \tag{2.12}$$

L'aggiunta di una nuova equazione è compensata dall'introduzione di una ulteriore incognita: la deformazione totale nella terza direzione che non può essere assegnata durante la fase di previsione. Queste modifiche comunque, oltre alla complicazione formale ed all'onere aggiuntivo, non presentano ulteriori difficoltà concettuali.

3. Determinazione dell'operatore tangente

Come accennato nell'Introduzione, qualora si intenda applicare il metodo di Newton-Raphson in una analisi ad elementi finiti conservando la convergenza asintotica del secondo ordine, è necessario valutare la matrice di rigidezza tangente del materiale in modo coerente con lo schema di integrazione adottato. ciò significa porre:

$$D_{ijhk}^{ep} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{hk}} \tag{3.1}$$

dove le derivate concernono le funzioni che legano le tensioni alle deformazioni totali, come definite implicitamente dalle (2.2). Anche in questo caso si possono ottenere alcune semplificazioni se le funzioni di snervamento non dipendono dall'invariante terzo delle tensioni.

La (3.1) può essere espressa nella forma:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{hk}} = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\sigma_m}\left(\frac{\partial\sigma_m}{\partial\varepsilon_v}\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial\varepsilon_{hk}} + \frac{\partial\sigma_m}{\partial e_{pq}}\frac{\partial e_{pq}}{\partial\varepsilon_{hk}}\right) + \tag{3.2}$$

$$+ \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial s_{rs}}\left(\frac{\partial s_{rs}}{\partial\varepsilon_v}\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial\varepsilon_{hk}} + \frac{\partial s_{rs}}{\partial e_{pq}}\frac{\partial e_{pq}}{\partial\varepsilon_{hk}}\right), \qquad (r\,,s\,,p\,,q = 1\,,\ldots 3)$$

dove:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\sigma_m} = \delta_{ij} \quad ; \quad \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial s_{rs}} = \delta_{ir}\,\delta_{js} \tag{3.3 a, b}$$

$$\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial\varepsilon_{hk}} = \delta_{hk} \quad ; \quad \frac{\partial e_{pq}}{\partial\varepsilon_{hk}} = \delta_{ph}\delta_{qk} - \frac{\delta_{pq}\delta_{hk}}{3} \tag{3.3 c, d}$$

Ricordando la (2.10) si può scrivere:

$$\frac{\partial s_{rs}}{\partial\varepsilon_v} = \frac{\mathrm{E}_{rs}}{e^*}\frac{\partial s}{\partial\varepsilon_v} \tag{3.4 a}$$

$$\frac{\partial s_{rs}}{\partial e_{pq}} = \frac{s}{e^{*2}}\left(\delta_{rp}\delta_{sq}\,e^* - \mathrm{E}_{rs}\frac{\partial e^*}{\partial e_{pq}}\right) + \frac{\mathrm{E}_{rs}}{e^*}\frac{\partial s}{\partial e^*}\frac{\partial e^*}{\partial e_{pq}} \tag{3.4 b}$$

dove:

$$\frac{\partial e^*}{\partial e_{pq}} = \frac{\mathrm{E}_{pq}}{2e^*} \tag{3.5}$$

Analogamente:

$$\frac{\partial\sigma_m}{\partial e_{pq}} = \frac{\partial\sigma_m}{\partial e^*}\frac{\mathrm{E}_{pq}}{2\,e^*} \tag{3.6}$$

Restano ora da calcolare, in base al modello costitutivo considerato, solamente le 4 derivate $\frac{\partial\sigma_m}{\partial\varepsilon_v}$, $\frac{\partial\sigma_m}{\partial e^*}$, $\frac{\partial s}{\partial\varepsilon_v}$, $\frac{\partial s}{\partial e^*}$. Negli sviluppi seguenti, per maggiore chiarezza e semplicità, si farà espressamente riferimento a problemi piani nelle deformazioni, essendo inteso che la generalizzazione a problemi caratterizzati da diverse morfologie, non presenta difficoltà.

In questo caso gli indici i, j, h, k, r, s, p, q variano tra 1 e 2 e la (3.5) si modifica come segue:

$$\frac{\partial e^*}{\partial e_{pq}} = \frac{E_{pq} + E_{kk}\,\delta_{pq}}{2e^*} \tag{3.7}$$

Nelle utilizzazioni pratiche conviene fare uso della notazione matriciale. Si definiscono perciò i seguenti vettori:

$$\sigma^T \equiv \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{33}\} \tag{3.8 a}$$

$$\varepsilon^T \equiv \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}, \varepsilon_{33}\} \tag{3.8 b}$$

$$s^T \equiv \{s_{11}, s_{22}, s_{12}, \sigma_m\} \tag{3.8 c}$$

$$e^T \equiv \{e_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_v\}\,. \tag{3.8 d}$$

Sia D^{ep} la matrice quadrata (di 4° ordine) che raccoglie le componenti del tensore dei moduli tangenti D^{ep}_{ijhk}. Si ha:

$$\mathbf{D}^{ep} = \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon^T} = \frac{\partial\sigma}{\partial s^T}\,\frac{\partial s}{\partial e^T}\,\frac{\partial e}{\partial\varepsilon^T} \tag{3.9}$$

con:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial s^T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \frac{\partial e}{\partial\varepsilon^T} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.10 a, b}$$

$$\frac{\partial s}{\partial e^T} = \begin{bmatrix} C_1 + C_2(2E_{11}^2 + E_{11}E_{22}) & C_2(E_{11}^2 + 2E_{11}E_{22}) & 2C_2E_{11}E_{12} & C_3E_{11} \\ C_2(2E_{11}E_{22} + E_{22}^2) & C_1 + C_2(E_{11}E_{22} + 2E_{22}^2) & 2C_2E_{22}E_{12} & C_3E_{22} \\ C_2(2E_{11}E_{12} + E_{22}E_{12}) & C_2(E_{11}E_{12} + E_{22}E_{12}) & C_1 + 2C_2E_{12}^2 & C_3E_{12} \\ C_4(2E_{11} + E_{22}) & C_4(E_{11} + 2E_{22}) & 2C_4E_{12} & C_5 \end{bmatrix}$$

(3.10 c)

In base alle (3.9) e (3.10), la matrice $\mathbf{D}^{ep}$ assume l'espressione (3.11) (1). Come si può notare, perché la matrice $\mathbf{D}^{ep}$ sia simmetrica, è necessario che si verifichi la condizione $C_3 = C_4$.

(1) L'equazione (3.11) è riportata in fondo al testo, su pagina separata, per motivi di spazio.

Nella derivazione della (3.10 c) si è posto:

$$C_1 = \frac{s}{e^*} \quad ; \quad C_2 = \frac{1}{2\, e^{*3}} \left(\frac{\partial s}{\partial e^*} e^* - s \right) \tag{3.12 a, b}$$

$$C_3 = \frac{1}{e^*} \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_v} \quad ; \quad C_4 = \frac{1}{2\, e^*} \frac{\partial \sigma_m}{\partial e^*} \quad ; \quad C_5 = \frac{\partial \sigma_m}{\partial \varepsilon_v} \tag{3.12 c, d, e}$$

È opportuno sottolineare come, in virtù di quanto precede, il calcolo della matrice tangente sia ricondotto alla valutazione dei 5 coefficienti C_a $(a = 1, \ldots 5)$. Ad un risultato analogo si perviene anche nel caso tridimensionale.

I coefficienti C_a dipendono dalle derivate $\frac{\partial \sigma_m}{\partial \varepsilon_v}, \frac{\partial \sigma_m}{\partial e^*}, \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_v}, \frac{\partial s}{\partial e^*}$. Per calcolare queste derivate si considerino le variazioni prime delle (2.11 a, b, c, d) qui indicate col simbolo ∂ (essendo δ riservato al simbolo di Kronecker):

$$\begin{aligned} \partial \sigma_m = {} & K \partial \varepsilon_v - K \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial \sigma_m^2} \Delta\lambda_\alpha \partial \sigma_m - K \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial \sigma_m \partial s} \Delta\lambda_\alpha \partial s + \\ & - K \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial \sigma_m\, \partial \Delta h_\gamma} \Delta\lambda_\alpha\, \partial \Delta h_\gamma - K \frac{\partial g_\alpha}{\partial \sigma_m} \partial \Delta\lambda_\alpha \end{aligned} \tag{3.13 a}$$

$$\begin{aligned} \partial s = {} & 2\, G \partial e^* - G \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial s \partial \sigma_m} \Delta\lambda_\alpha \partial \sigma_m - G \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial s^2} \Delta\lambda_\alpha \partial s + \\ & - G \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial s\, \partial \Delta h_\gamma} \Delta\lambda_\alpha\, \partial \Delta h_\gamma - G \frac{\partial g_\alpha}{\partial s} \partial \Delta\lambda_\alpha \end{aligned} \tag{3.13 b}$$

$$\partial \Delta h_\eta = \frac{\partial q_{\eta\alpha}}{\partial \sigma_m} \Delta\lambda_\alpha \partial \sigma_m + \frac{\partial q_{\eta\alpha}}{\partial s} \Delta\lambda_\alpha \partial s + \frac{\partial q_{\eta\alpha}}{\partial \Delta h_\gamma} \Delta\lambda_\alpha \partial \Delta h_\gamma + q_{\eta\alpha} \partial \Delta\lambda_\alpha \tag{3.13 c}$$

$$\partial \phi_\alpha = \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \sigma_m} \partial \sigma_m + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial s} \partial s + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \Delta h_\gamma} \partial \Delta h_\gamma = 0\,. \tag{3.13 d}$$

Dalle (3.13 c) e (3.13 d) si ricavano $\partial \Delta h_\gamma$ e $\partial \Delta\lambda_\alpha$. Dalla (3.13 c) si ottiene:

$$\partial \Delta h_\gamma \left(\delta_{\eta\gamma} - \frac{\partial q_{\eta\alpha}}{\partial \Delta h_\gamma} \Delta\lambda_\alpha \right) = \frac{\partial q_{\eta\alpha}}{\partial \sigma_m} \Delta\lambda_\alpha \partial \sigma_m + \frac{\partial q_{\eta\alpha}}{\partial s} \Delta\lambda_\alpha \partial s + q_{\eta\alpha} \partial \Delta\lambda_\alpha\,. \tag{3.14}$$

Ponendo $B_{\gamma\eta} = \left(\delta_{\eta\gamma} - \frac{\partial q_{\eta\alpha}}{\partial \Delta h_\gamma} \Delta\lambda_\alpha \right)^{-1}$ e sostituendo nella (3.13 d) si ha;

$$\begin{aligned} \partial \phi_\alpha = {} & \left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \sigma_m} + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \Delta h_\gamma} B_{\gamma\eta} \frac{\partial q_{\eta\beta}}{\partial \sigma_m} \Delta\lambda_\beta \right) \partial \sigma_m + \left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial s} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \Delta h_\gamma} B_{\gamma\eta} \frac{\partial q_{\eta\beta}}{\partial s} \Delta\lambda_\beta \right) \partial s + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \Delta h_\gamma} B_{\gamma\eta}\, q_{\eta\beta}\, \partial \Delta\lambda_\beta = 0\,. \end{aligned} \tag{3.15}$$

La (3.15) può essere vista come un sistema di equazioni lineari nelle incognite variazioni $\partial\Delta\lambda_\alpha$. Risolvendolo si ottiene:

$$\partial\Delta\lambda_\alpha = a_\alpha \partial\sigma_m + b_\alpha \partial s \tag{3.16}$$

dove si è posto:

$$a_\alpha = -\left(\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\Delta h_\gamma} B_{\gamma\eta}\, q_{\eta\alpha}\right)^{-1} \left(\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\sigma_m} + \frac{\partial\phi_\beta}{\partial\Delta h_\gamma} B_{\gamma\eta} \frac{\partial q_{\eta\zeta}}{\partial\sigma_m} \Delta\lambda_\zeta\right) \tag{3.17 a}$$

$$b_\alpha = -\left(\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\Delta h_\gamma} B_{\gamma\eta}\, q_{\eta\alpha}\right)^{-1} \left(\frac{\partial\phi_\beta}{\partial s} + \frac{\partial\phi_\beta}{\partial\Delta h_\gamma} B_{\gamma\eta} \frac{\partial q_{\eta\zeta}}{\partial s} \Delta\lambda_\zeta\right). \tag{3.17 b}$$

Analogamente, le variazioni delle variabili interne sono ottenute sostituendo la (3.16) nella (3.14):

$$\partial\Delta h_\gamma = m_\gamma\, \partial\sigma_m + n_\gamma\, \partial s \tag{3.18}$$

dove si è posto:

$$m_\gamma = B_{\gamma\eta}\left(\frac{\partial q_{\eta\alpha}}{\partial\sigma_m}\Delta\lambda_\alpha + q_{\eta\alpha}\, a_\alpha\right) \tag{3.19 a}$$

$$n_\gamma = B_{\gamma\eta}\left(\frac{\partial q_{\eta\alpha}}{\partial s}\Delta\lambda_\alpha + q_{\eta\alpha}\, b_\alpha\right). \tag{3.19 b}$$

Sostituendo la (3.16) e la (3.18) nelle (3.13 *a, b*) si giunge al seguente sistema lineare:

$$\begin{aligned}\left(1 + K\frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial\sigma_m^2}\Delta\lambda_\alpha + K\frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial\sigma_m\,\partial\Delta h_\gamma}\Delta\lambda_\alpha\, m_\gamma + K\frac{\partial g_\alpha}{\partial\sigma_m} a_\alpha\right)\partial\sigma_m &= \\ = K\partial\varepsilon_v - K\left(\frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial\sigma_m\partial s}\Delta\lambda_\alpha + \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial\sigma_m\,\partial\Delta h_\gamma}\Delta\lambda_\alpha\, n_\gamma + \frac{\partial g_\alpha}{\partial\sigma_m} b_\alpha\right)\partial s\end{aligned} \tag{3.20 a}$$

$$\begin{aligned}\left(1 + G\frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial s^2}\Delta\lambda_\alpha + G\frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial s\,\partial\Delta h_\gamma}\Delta\lambda_\alpha n_\gamma + G\frac{\partial g_\alpha}{\partial s} b_\alpha\right)\partial s &= 2\,G\,\partial e^* + \\ - G\left(\frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial s\partial\sigma_m}\Delta\lambda_\alpha + \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial^2 s\,\partial\Delta h_\gamma}\Delta\lambda_\alpha\, m_\gamma + \frac{\partial g_\alpha}{\partial s} a_\alpha\right)\partial\sigma_m .\end{aligned} \tag{3.20 b}$$

Le eq. (3.20), con evidente significato dei nuovi simboli, possono essere riscritte nella forma più compatta:

$$d_{11}\,\partial\sigma_m + d_{12}\partial s = K\partial\varepsilon_v \tag{3.21 a}$$

$$\mathrm{d}_{21}\partial\sigma_m + \mathrm{d}_{22}\partial s = 2\,\mathrm{G}\partial e^* . \tag{3.21 b}$$

Risolvendo rispetto a $\partial\sigma_m$ e ∂s, si ottiene:

$$\partial\sigma_m = \frac{1}{w}\,(\mathrm{Kd}_{22}\,\partial\varepsilon_v - 2\,\mathrm{Gd}_{12}\,\partial e^*) \tag{3.22 a}$$

$$\partial s = \frac{1}{w}\,(-\,\mathrm{Kd}_{21}\,\partial\varepsilon_v + 2\,\mathrm{Gd}_{11}\,\partial e^*) \tag{3.22 b}$$

dove si è posto:

$$w = \frac{1}{\mathrm{d}_{11}\mathrm{d}_{22} - \mathrm{d}_{12}\mathrm{d}_{21}} . \tag{3.23}$$

Dalle (3.22) si ricavano facilmente le derivate cercate:

$$\frac{\partial\sigma_m}{\partial\varepsilon_v} = \frac{\mathrm{Kd}_{22}}{w} \quad ; \quad \frac{\partial\sigma_m}{\partial e^*} = -\,\frac{2\,\mathrm{Gd}_{12}}{w} \tag{3.24 a, b}$$

$$\frac{\partial s}{\partial\varepsilon_v} = -\,\frac{\mathrm{K\,d}_{21}}{w} \quad ; \quad \frac{\partial s}{\partial e^*} = \frac{2\,\mathrm{Gd}_{11}}{w} \tag{3.24 c, d}$$

5. Conclusioni

In questa nota si è studiato il metodo della differenza all'indietro per l'integrazione numerica nel tempo di leggi costitutive elastoplastiche alquanto generali con particolare riguardo a modelli isotropi non dipendenti dall'invariante terzo delle tensioni. Si è mostrato come all'interno di un generico intervallo di tempo ordinativo nell'evoluzione del sistema (« passo di carico ») la fase di correzione possa essere formulata sotto certe condizioni, invero piuttosto restrittive, come un problema di programmazione non lineare, il che può semplificare la identificazione dei modi « attivi » nel passo.

Per analisi numeriche condotte con discretizzazione spaziale agli elementi finiti e con lo schema iterativo di Newton-Raphson, è stato presentato un procedimento per il calcolo della matrice tangente del materiale. Questo procedimento è coerente con il metodo adottato per l'integrazione della legge costitutiva elastoplastica, e pertanto risulta conservata la proprietà di convergenza asintotica del secondo ordine, tipica del metodo di Newton-Raphson. La matrice tangente è stata generata in una forma unificata che richiede solamente la valutazione di cinque coefficienti funzioni delle variabili alla fine del passo considerato.

La sperimentazione numerica condotta in base ai risultati qui esposti, presentata in altra sede [14], appare incoraggiante e tale da mettere in evidenza la loro utilità nella meccanica computazionale dei sistemi elastoplastici.

Ringraziamenti.

Parte di questo lavoro è stata svolta durante un soggiorno di studio dell'autore, allora dottorando in Ingegneria delle Strutture presso il Politecnico di Milano, presso la Applied Mechanics Research Unit dell'Università di Città del Capo diretta dal Professor J.B. Martin.

BIBLIOGRAFIA

[1] WILKINS M.L. (1964) – *Calculation of elastic plastic flow*, in: Methods of Computational Physics, a cura di Alder, B. *et alii*, Vol. 3, Academic Press, New York.

[2] OWEN D.R.J. e HINTON E. (1980) – *Finite elements in plasticity – theory and practice*, Pineridge Press, Swansea.

[3] ORTIZ M. e SIMO J.C. (1986) – *An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations*, « Int. J. Num. Meth. Eng. », *23*, 353-366.

[4] DE BORST R. (1984) – *Implicit integration of stress-strain laws in thermoplasticity*, Report N. BI-84-43/68.8.2002, Software Engineering Department/Section Diana, Rijswijk.

[5] FRANCHI A. e GENNA F. (1987) – *A numerical scheme for integrating the rate plasticity equations with an " a priori " error control*, « Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. », *60*, 317-342.

[6] SIMO J.C. e HUGHES T.J.R. (1987) – *General return mapping algorithms for rate independent plasticity*, in: Atti del 2° Congresso su Constitutive Laws for Engineering Materials, a cura di Desai C.S., Krempl E., Kiousis P.D., Kundu T., Università dell'Arizona, 221-231.

[7] HUGHES T.J.R. (1984) – *Numerical implementation of constitutive models: rate independent deviatoric plasticity*, in: Theoretical Foundation for large Scale Computations of Nonlinear Material Behaviour, a cura di Nemat Nasser S., Asaro R.J., Hegemier G.A., Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht.

[8] KRIEG R.D. e KRIEG D.B. (1977) – *Accuracies of numerical solution methods for the elastic perfectly plastic model*, « J. Pressure Vessel Technology, ASME », *99*, 510-515.

[9] YODER P.J. e WHIRLEY B.G. (1984) – *On the numerical implementation of elastoplastic models*, « J. Appl. Mech. », *51*, 238-288.

[10] LORET B. e PREVOST J.M. (1986) – *Accurate numerical solutions for Drucker-Prager elastic plastic models*, « Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. », *54*, 259-277.

[11] ORTIZ M. e POPOV E.P. (1985) – *Accuracy and stability analysis of integration algorithms for elastoplastic constitutive equations*, « Int. J. Num. Meth. Eng. », *21*, 1561-1576.

[12] HIBBITT H.D. (1985) – *Some issues in numerical simulation of nonlinear structural response*, in: Workshop on Computational Methods for Structural Mechanics and Dynamics, NASA Langley Research Center.

[13] CRISFIELD M.A. (1987) – *Consistent schemes for plasticity computation with the Newton-Raphson method*, in: Computational Plasticity, a cura di Owen D.R.J., Hinton E., Onate E., Pineridge Press, Swansea, 133-159.

[14] PEREGO U. (1987) – *Backward difference operators and consistent predictors for linear hardening elastic-plastic constitutive laws*, di prossima pubblicazione su Solid Mechanics Archives.

[15] Martin J.B., Reddy B.D., Griffin T.B. e Bird W.W. (1987) – *Application of mathematical programming concepts to incremental elastic plastic analysis*, di prossima pubblicazione su Engineering Structures.

[16] Martin J.B. (1987), *A complementary work bounding principle for forward integration along the path of loading for elastoplastic bodies*, « J. Appl. Mech. », *109*, 341–345.

[17] Maier G. (1970) – *A matrix structural theory of piecewise-linear plasticity with interacting yield planes*, « Meccanica », *5*, 55-66.

[18] De Donato O. e Maier G. (1979) – *Mathematical programming methods for the inelastic analysis of reinforced concrete frames allowing for limited rotation capacity*, « Int. J. for Num. Meth. in Eng. », *4*, 307-329.

[19] Nagtegaal J.C. (1982) – *On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems*, « Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. », *33*, 469-484.

[20] Simo J.C. e Taylor R.L. (1985) – *Consistent tangent operators for rate independent elastoplasticity*, « Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. », *48*, 101-118.

$$
\mathbf{D}^{ep} = \begin{bmatrix}
\frac{2}{3} C_1 + C_2 E_{11}^2 + (C_3 + C_4) E_{11} + C_5 & -\frac{1}{3} C_1 + C_2 E_{11} E_{22} + C_3 E_{11} + C_4 E_{22} + C_5 & C_2 E_{11} E_{12} + C_4 E_{12} & -\frac{1}{3} C_1 - C_2 (E_{11}^2 + E_{11} E_{22}) + C_3 E_{11} - C_4 (E_{11} + E_{22}) + C_5 \\
-\frac{1}{3} C_1 + C_2 E_{11} E_{22} + C_3 E_{22} + C_4 E_{11} + C_5 & \frac{2}{3} C_1 + C_2 E_{22}^2 + (C_3 + C_4) E_{22} + C_5 & C_2 E_{22} E_{12} + C_4 E_{12} & -\frac{1}{3} C_1 - C_2 (E_{11} E_{22} + E_{22}^2) + C_3 E_{22} - C_4 (E_{11} + E_{22}) + C_5 \\
C_2 E_{11} E_{12} + C_3 E_{12} & C_2 E_{22} E_{12} + C_3 E_{12} & \frac{1}{2} C_1 + C_2 E_{12}^2 & - C_2 (E_{11} E_{12} + E_{22} E_{12}) + C_3 E_{12} \\
-\frac{1}{3} C_1 - C_2 (E_{11}^2 + E_{11} E_{22}) - C_3 (E_{11} + E_{22}) + C_4 E_{11} + C_5 & -\frac{1}{3} C_1 - C_2 (E_{11} E_{22} + E_{22}^2) - C_3 (E_{11} + E_{22}) + C_4 E_{22} + C_5 & - C_2 (E_{11} E_{12} + E_{22} E_{12}) + C_4 E_{12} & \frac{2}{3} C_1 + C_2 (E_{11} + E_{22})^2 - (C_3 + C_4)(E_{11} + E_{22}) + C_5
\end{bmatrix}
$$

Eq. (3.11)