Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Virgilio Pannone

Sulle partizioni dei p-gruppi finiti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **82** (1988), n.1, p. 1–5.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1988_8_82_1_1_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1988.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Gennaio-Marzo 1988

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXII (1988), pp. 1-5

Algebra. — *Sulle partizioni dei p-gruppi finiti.* Nota (*) di VIRGILIO PANNONE, presentata dal Socio G. ZAPPA.

ABSTRACT. — *On the partitions of finite p-groups.* Partitions of finite p-groups are investigated, especially equipartitions. In § 3 we prove that the p-groups of maximal class may only admit the elementary equipartition. In § 4 we generalize to the p-groups of submaximal class.

KEY WORDS: Group-partitions; p-groups of submaximal class.

RIASSUNTO. — Si studiano le partizioni dei p-gruppi finiti e, in particolare, le equipartizioni. Si danno risultati sulle equipartizioni dei p-gruppi di classe submassimale.

§ 1. INTRODUZIONE

Sia G un gruppo finito. Una *partizione* di G sarà una famiglia $\Pi = \{H_1, \ldots, H_t\}$ di sottogruppi di G tale che:

(*) Pervenuta all'Accademia il 18 settembre 1987.

(i) $H_i \neq \{1\}$, $H_i \neq G$ $(i = 1, \dots, t)$

(ii) $H_i \cap H_j = \{1\}$ $(i, j = 1, \dots, t;\ i \neq j)$

(iii) $\bigcup_{i=1}^{t} H_i = G$.

I sottogruppi H_i saranno detti *componenti* della partizione. Una partizione sarà detta *equipartizione* se tutte le componenti hanno un medesimo ordine. Infine, per *partizione abeliana* si intenderà una partizione le cui componenti sono gruppi abeliani.

Risultati di R. Baer ([1, 2, 3]), O. Kegel ([4]), M. Suzuki ([5, 6]) consentono di affermare che un gruppo finito il quale ammetta una partizione o è isomorfo a Σ_4, oppure appartiene ad almeno una delle seguenti classi:

a) gruppi di Frobenius,

b) gruppi di Hughes-Thompson,

c) gruppi di Suzuki $G(q)$,

d) gruppi di PGL $(2, p^h)$,

e) gruppi PSL $(2, p^h)$,

f) p-gruppi.

Si può dimostrare che i gruppi delle classi (*a*) — (*e*) ammettono effettivamente delle partizioni, mentre non tutti i p-gruppi lo fanno: si consideri, come esempio di gruppo non ciclico, il gruppo abeliano $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_{p^2}$.

I primi studi sulle partizioni dei gruppi finiti riguardano proprio il caso abeliano: G.A. Miller ([7], 1906) e P. Kontorovich ([8], 1939) hanno indipendentemente dimostrato che se un gruppo finito abeliano ammette una partizione allora esso è un p-gruppo non ciclico di esponente p. Il viceversa è banalmente vero per ogni p-gruppo non ciclico di esponente p (abeliano o non): sia, infatti, G un tale gruppo; una partizione, qui detta *elementare*, è allora data ovviamente dalla famiglia di tutti i sottogruppi di ordine p. Se in più G è abeliano, si può dimostrare che, posto $|G| = p^n$, per ogni k divisore proprio di n, G ammette pure equipartizioni con componenti d'ordine p^k.

Nel caso G sia un p-gruppo di esponente p, ma non abeliano, non è immediato stabilire quando esso ammetta anche equipartizioni non elementari. In taluni casi la risposta è affermativa. Una classe di esempi è stata fornita da I.M. Isaacs ([9]). Egli ha dimostrato che, per ogni $m > 2$, il gruppo delle matrici $m \times m$ unitriangolari con elementi nel campo di ordine p^k, con k intero positivo e $m \leq p$, ammette una equipartizione abeliana con componenti d'ordine p^k.

Una particolarità di questi esempi è che la classe di nilpotenza del gruppo è «piccola» in rapporto all'ordine, ed è pertanto naturale chiedersi se per p-gruppi «fortemente» non abeliani continuino ad esservi equipartizioni diverse da quella elementare (che, ovviamente, esiste se e solo se il p-gruppo ha esponente p).

Ciò motiva all'analisi dei p-gruppi di classe massimale e, più in generale, di classe submassimale, definiti nel § 2.

In questa nota si dimostra (§ 3) che i p-gruppi di classe massimale (con qualche restrizione sul primo p) non ammettono equipartizioni tranne, al più, quella elementare. Il risultato è poi generalizzato nel § 4.

Le dimostrazioni fanno uso della teoria esposta in N. Blackburn [10] e, specificamente, delle proprietà dei centralizzanti di elementi opportunamente scelti.

Tutti i gruppi considerati nel seguito sono p-gruppi finiti.

§ 2. p–GRUPPI DI CLASSE SUBMASSIMALE

DEFINIZIONE. *Un p-gruppo* G *è detto di* classe submassimale *se la sua serie centrale inferiore*

$$\mathrm{G} = \gamma_0(\mathrm{G}) > \gamma_2(\mathrm{G}) > \ldots > \gamma_{m-1}(\mathrm{G}) > \gamma_m(\mathrm{G}) = \{1\}$$

soddisfa:

(i) $m - 1 \geq 3$

(ii) $|\gamma_i(\mathrm{G}) : \gamma_{i+1}(\mathrm{G})| = p \qquad (i = 2, \ldots, m-1)$.

Nella notazione adottata, la classe di nilpotenza di G è $m-1$. Si porrà, inoltre, $|\mathrm{G}| = p^n$ e $|\mathrm{G} : \gamma_2(\mathrm{G})| = p^{n_0}$. È noto che per ogni p-gruppo non abeliano si ha $n_0 \geq 2$. G sarà detto di *classe massimale* se esso è di classe submassimale ed $n_0 = 2$.

Esempi di gruppi di classe submassimale possono trovarsi in [10] (dove essi sono denotati con il simbolo CF (m, n, p)).

Dal Lemma 2.5 di [10] discende, in particolare, il seguente enunciato:

LEMMA 2.1. *Per ogni* $i \in \{3, \ldots, m-1\}$, *sia* $\overline{\mathrm{K}}_i$ *il centralizzante di* $\gamma_{i-1}(\mathrm{G})/\gamma_{i+1}(\mathrm{G})$ in $\mathrm{G}/\gamma_{i+1}(\mathrm{G})$. *Si definisca* K_i *ponendo* $\mathrm{K}_i = \overline{\mathrm{K}}_i/\gamma_{i+1}(\mathrm{G})$. *Allora, si ha:* $|\mathrm{G} : \mathrm{K}_i| = p$.

Dalla definizione di K_3 segue che $\mathrm{G} \supset \mathrm{K}_3 \supset \gamma_2(\mathrm{G})$. Perciò K_3 è anche denotato con il simbolo $\gamma_1(\mathrm{G})$.

Il seguente Lemma raccoglie alcune proprietà dei centralizzanti che sono utilizzate nelle dimostrazioni dei teoremi del § 3 e del § 4.

LEMMA 2.3. *Sia* G *di classe submassimale, e sia* $m-1$ *la classe di* G. *Si assuma* $m - 1 \leq 2p$.

Se $m-1$ *è* > 3 *e dispari, allora, per ogni* $s \notin \gamma_1(\mathrm{G}) \cup \mathrm{K}_{m-1}$ *si ha*:

a) $|\mathrm{C_G}(s)| = p^{n_0}$

b) $|\mathrm{C_G}(s) \cap \gamma_1(\mathrm{G})| = p^{n_0-1}$

c) $C_G(s) \cap \gamma_1(G) = C_G(s) \cap Z_{m-2}(G)$

d) $C_G(s) \cap \gamma_2(G) = \gamma_{m-1}(G)$.

Se $m-1$ *è pari, oppure se* $m-1=3$, *allora* $\gamma_1(G) = K_{m-1}$ *e le precedenti valgono per ogni* $s \notin \gamma_1(G)$.

§ 3. Equipartizioni dei p-gruppi di classe massimale

Utilizzando i lemmi precedenti, possiamo stabilire il seguente risultato:

Teorema 1. *Sia* G *un p-gruppo di ordine* p^n *e classe massimale. Si assuma* $n-1 \leq 2p$.

Sia $\Pi = \{H_1, \ldots, H_t\}$ *una partizione di* G.

Allora, tra le componenti di Π *ve ne sono almeno* $p^{n-1} - p^{n-2} - p^{n-3}$ *di ordine* p. *Se* $n-1$ *è pari, ve ne sono almeno* $p^{n-1} - p^{n-3}$.

In particolare, G *non ammette equipartizioni tranne, al più, quella elementare.*

Dimostrazione. Si richiami innanzitutto che per i gruppi di classe massimale si ha $Z_i(G) = \gamma_{n-i}(G)$ $(i = 0, \ldots, n-2)$ ([10], Lemma 2.2). In particolare, $Z(G) = \gamma_{n-1}(G)$ e quindi $|Z(G)| = p$. Pertanto $Z(G)$ è tutto contenuto in una sola componente, che assumeremo essere H_1.

Dimostriamo per cominciare che se $H \in \Pi$, $H \neq H_1$, $H \nsubseteq \gamma_1(G) \cup K_{n-1}$, allora è $|H| = p$.

Sia $s \in H$, $s \notin \gamma_1(G) \cup K_{n-1}$. Essendo $n-1 \leq 2p$, dal Lemma 2.3 segue che $|C_G(s)| = p^2$.

Inoltre $C_G(s) \supseteq \langle s \rangle Z(H) Z(G)$, onde $|\langle s \rangle Z(H) Z(G)| \leq p^2$.

Da $H \cap H_1 = \{1\}$, si ha: $(\langle s \rangle Z(H)) \cap Z(G) = \{1\}$.

Quindi, essendo $|\langle s \rangle Z(H) Z(G)| \leq p^2$, deve aversi $|\langle s \rangle Z(H)| \leq p$, e così $s \in Z(H)$. Ma allora si ha: $C_G(s) \supseteq H \cdot Z(G)$ e quindi $|H \cdot Z(G)| \leq p^2$, da cui risulta $|H| = p$.

(Se $|H_1| = p^{n-1}$, allora per ogni $H \in \Pi$, $H \neq H_1$, si deve avere $|H| = p$, e così vi sono in tal caso p^{n-1} componenti d'ordine p, quindi il Teorema. Assumeremo, pertanto, che $|H_1| \leq p^{n-2}$).

Un minorante per il numero di componenti di ordine p può essere allora dato stimando il numero λ di componenti $H \in \Pi$ tali che $H \neq H_1$ e $H \nsubseteq \gamma_1(G) \cup K_{n-1}$.

Per λ abbiamo:

$$\lambda \geq (p-1)^{-1} |G - (\gamma_1(G) \cup K_{n-1} \cup H_1)|$$
$$= (p-1)^{-1} \{ |G - (\gamma_1(G) \cup K_{n-1})| - |H_1| + |H_1 \cap (\gamma_1(G) \cup K_{n-1})| \}.$$

Si calcola immediatamente che:

$$|G-(\gamma_1(G)\cup K_{n-1})| = \begin{cases} p^{n-1}(p-1) & \text{se } \gamma_1(G)=K_{n-1} \\ p^{n-2}(p-1)^2 & \text{se } \gamma_1(G)\neq K_{n-1} \end{cases}$$

$$|H_1\cap(\gamma_1(G)\cup K_{n-1})| \geq |H_1\cap\gamma_1(G)| = \begin{cases} p^{n-1} & \text{se } H_1\subseteq\gamma_1(G) \\ |H_1|/p & \text{se } H_1\nsubseteq\gamma_1(G) \end{cases}$$

Quindi: $\lambda \geq p^{n-1}-p^{n-2}-p^{n-3}$.

Se $n-1$ è pari, dal Lemma 2.3 si ha: $\gamma_1(G)=K_{n-1}$ e quindi $\lambda \geq p^{n-1}-p^{n-3}$. Q.E.D.

§ 4. EQUIPARTIZIONI DEI GRUPPI DI CLASSE SUBMASSIMALE

La dimostrazione del Teorema 1 del § 3 non può ripetersi, così com'è, quando G non sia di classe massimale. In tal caso, infatti, può facilmente dimostrarsi che è $|C_G(x)| \geq p^3$ per ogni $x \in G$. Tuttavia, utilizzando anche le *b*), *c*), *d*) del Lemma 2.3 non è difficile ottenere il seguente risultato, la cui dimostrazione, per brevità, è omessa.

TEOREMA 2. *Sia* G *un p-gruppo di classe submassimale. Sia* $m-1$ *la classe di* G *e si assuma che* $m-1 \leq 2p$.

Allora G *non ammette equipartizioni tranne, al più, quella elementare.*

BIBLIOGRAFIA

[1] R. BAER (1961) - *Partitionen endlicher Gruppen*, « Math. Zeit. », *75*, 333-373.

[2] R. BAER (1961) - *Einfache Partitionen nicht einfacher Gruppen*, « Math. Zeit. », *77*, 1-37.

[3] R. BAER (1961) - *Einfache Partitionen endlicher Gruppen mit nichttrivialer Fittingscher Untergruppen*, « Arch. Math. », *12*, 81-89.

[4] O. KEGEL (1961) - *Nichteinfache Partitionen endlicher Gruppen*, « Arch. Math. », *13*, 170-175.

[5] M. SUZUKI (1951) - *On the Finite Group with a Complete Partition*, « J. Math. Soc. Japan », *2*, 165-185.

[6] M. SUZUKI (1961) - *On a Finite Group with a Partition*, « Arch. Math. », *12*, 241-245.

[7] G.A. MILLER (1906) - *Groups in which All the Operators are Contained in a Series of Subgroups such that any Two Have only the Identity in Common*, « B.A.M.S. », 446.

[8] P. KONTOROVICH (1939) - *Sulla decomposizione di un gruppo in somma diretta di sottogruppi I*, « Matem. Sbornik », *5* (2), 289-296 (russo).

[9] I.M. ISAACS (1973) - *Equally Partitioned Groups*, « Pac. J. Math. », *49*, 108-116.

[10] N. BLACKBURN (1958) - *On a Special Class of p-Groups*, « Acta Math. », *100*, 45-92.