
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GIANNI DAL MASO, ANNELIESE DEFRANCESCHI

**Limiti di problemi di Dirichlet nonlineari in domini
variabili**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 81 (1987), n.2, p. 111–118.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1987_8_81_2_111_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Calcolo delle variazioni. — Limiti di problemi di Dirichlet non-lineari in domini variabili. Nota di GIANNI DAL MASO e ANNELIESE DEFRANCESCHI, presentata (*) dal Socio E. DE GIORGI.

ABSTRACT. — Limits of nonlinear Dirichlet problems in varying domains. We study the limit behaviour of sequences of nonlinear variational problems in varying open sets with Dirichlet boundary conditions. The main tools used in this investigation are the notions of Γ -convergence and of nonlinear μ -capacity.

KEY WORDS: Perturbed Dirichlet problems; Variational convergence; Nonlinear capacity; Homogenization.

RIASSUNTO. — Si studia il comportamento limite di successioni di problemi variazionali nonlineari con condizioni al contorno di Dirichlet su aperti variabili. I principali strumenti usati in questa ricerca sono le nozioni di Γ -convergenza e di μ -capacità nonlineare.

1. INTRODUZIONE

In questa nota studiamo il comportamento limite di successioni di problemi di minimo in aperti con cavità del tipo

$$(1.1) \quad \min_{u \in H_0^{1,p}(\Omega - E_h)} \left\{ \int_{\Omega - E_h} f(x, Du) dx + \int_{\Omega - E_h} gu dx \right\},$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, (E_h) è una successione di chiusi di Ω , $f(x, \xi)$ è convessa e omogenea di grado p rispetto a ξ , $1 < p \leq n$, e g appartiene ad $L^q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$.

I principali strumenti utilizzati in questa ricerca sono la teoria della Γ -convergenza (vedi [13], [12], [1]), i risultati sui limiti di problemi di minimo con ostacoli (vedi [6], [7], [2], [8]) e la nozione di capacità associata alla funzione f , definita da

$$(1.2) \quad C(f, K) = \inf \left\{ \int_{\Omega} f(x, Du) dx : u \in C_0^1(\Omega), u \geq 1 \text{ su } K \right\}$$

per ogni compatto K di Ω .

(*) Nella seduta del 14 febbraio 1987.

Mostreremo, infatti, che il comportamento, per $h \rightarrow \infty$, della successione $m_h(g)$ dei valori minimi del problema (1.1) è legato alle proprietà delle funzioni d'insieme α' e α'' definite da

$$\alpha'(K) = \liminf_{h \rightarrow \infty} C(f, K \cap E_h) \quad , \quad \alpha''(K) = \limsup_{h \rightarrow \infty} C(f, K \cap E_h)$$

per ogni compatto $K \subseteq \Omega$. Più precisamente, i Teoremi 2.2 e 3.10 assicurano che, se

$$(1.3) \quad \sup \{ \alpha'(K) : K \text{ compatto}, K \subseteq A \} = \sup \{ \alpha''(K) : K \text{ compatto}, K \subseteq A \}$$

per ogni aperto $A \subseteq \Omega$, allora esiste una misura positiva μ su Ω tale che la successione $m_h(g)$ converga, per $h \rightarrow \infty$, verso il valore minimo $m(g)$ del problema

$$(1.4) \quad \min_{u \in H_0^{1,p}(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} f(x, Du) \, dx + \int_{\Omega} |u|^p \, d\mu + \int_{\Omega} gu \, dx \right\}$$

per ogni $g \in L^q(\Omega)$. Inoltre il Teorema 3.10 fornisce una formula che permette di calcolare μ a partire da α' , nell'ipotesi che valga la (1.3).

Nel caso $p = 2$ ed $f(x, \xi) = |\xi|^2$, risultati di questo genere sono stati ottenuti in [11], cui si rinvia per un'ampia bibliografia sull'argomento. La sufficienza della condizione (1.3) e la relativa formula per ottenere μ da α' sono state dimostrate con metodi probabilistici in [4], nell'ipotesi che la misura μ abbia potenziale localmente limitato. Una dimostrazione non probabilistica, valida per ogni misura μ , è stata ottenuta in [9] usando tecniche di Γ -convergenza.

Nel caso $p \neq 2$ gli unici risultati a nostra conoscenza in letteratura sono due esempi in cui gli insiemi E_h hanno struttura periodica ([2], Capitolo 5 e [15], Capitolo 4.2).

La dimostrazione del Teorema 3.9 comparirà in [10]. Gli altri risultati di questa nota saranno dimostrati in un lavoro di prossima pubblicazione.

2. UN TEOREMA DI COMPATTEZZA

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, e sia p un numero reale con $1 < p \leq n$. Indichiamo con $\mathcal{A}(\Omega)$, $\mathcal{B}(\Omega)$ e $\mathcal{K}(\Omega)$ rispettivamente l'insieme degli aperti, dei boreliani e dei compatti di Ω .

Denotiamo con C_p la *capacità di grado p* definita, per ogni $K \in \mathcal{K}(\Omega)$, da

$$C_p(K) = \inf \left\{ \int_{\Omega} |D\varphi|^p \, dx : \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geq 1 \text{ su } K \right\}.$$

La definizione di C_p viene estesa ad ogni $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ ponendo

$$C_p(A) = \sup \{C_p(K) : K \in \mathcal{K}(\Omega), K \subseteq A\},$$

ed ad ogni sottoinsieme E di Ω ponendo

$$C_p(E) = \inf \{C_p(A) : A \in \mathcal{A}(\Omega), E \subseteq A\}.$$

Diciamo che una proprietà $P(x)$ vale *p-quasi ovunque* su E (abbreviato *p-q.o.* su E) se esiste $Z \subseteq E$, con $C_p(Z) = 0$, tale che $P(x)$ sia verificata da ogni $x \in E - Z$.

Diciamo che un insieme $U \subseteq \Omega$ è *p-quasi aperto* in Ω se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ tale che $C_p(U \Delta A) < \varepsilon$, dove Δ indica la differenza simmetrica.

Per ogni $u \in H^{1,p}(\Omega)$ e per ogni $x \in \Omega$ il valore puntuale $u(x)$ sarà scelto in modo che valgano le disuguaglianze

$$\liminf_{r \rightarrow 0_+} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u(y) dy \leq u(x) \leq \limsup_{r \rightarrow 0_+} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u(y) dy,$$

dove $B_r(x) = \{y \in \mathbf{R}^n : |x - y| < r\}$ e $|B_r(x)|$ indica la misura di Lebesgue di $B_r(x)$. Con tale convenzione il valore puntuale $u(x)$ è determinato *p-q.o.* su Ω .

Indichiamo con $\mathcal{M}_p(\Omega)$ la classe di tutte le misure di Borel μ su Ω tali che $\mu(B) = 0$ per ogni $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ con $C_p(B) = 0$. Ricordiamo che una misura di Borel su Ω è una funzione d'insieme $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ numerabilmente additiva e tale che $\mu(\emptyset) = 0$.

Un esempio importante di elementi della classe $\mathcal{M}_p(\Omega)$ è dato dalle misure ∞_E del tipo

$$(2.1) \quad \infty_E(B) = \begin{cases} 0 & \text{se } C_p(E \cap B) = 0, \\ +\infty & \text{se } C_p(E \cap B) > 0, \end{cases}$$

dove E è un arbitrario sottoinsieme di Ω .

Fissiamo una funzione $f : \Omega \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ e due costanti $0 < c_1 \leq c_2 < +\infty$. Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

$$(2.2) \quad f(x, \xi) \text{ è misurabile in } x, \text{ convessa e } p\text{-omogenea in } \xi;$$

$$(2.3) \quad c_1 |\xi|^p \leq f(x, \xi) \leq c_2 |\xi|^p \text{ per ogni } (x, \xi) \in \Omega \times \mathbf{R}^n.$$

Nel seguito studieremo la dipendenza da $\mu \in \mathcal{M}_p(\Omega)$ delle soluzioni di problemi di minimo della forma

$$(2.4) \quad \min_{u \in H_0^{1,p}(A)} \left\{ \int_A f(x, Du) dx + \int_A |u|^p d\mu + \int_A gu dx \right\},$$

dove $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$. Il legame tra i problemi di tipo (2.4) e quelli di tipo (1.1), considerati nell'introduzione, è dato dal fatto che, se $\mu = \infty_{E_h}$ ed $A = \Omega$, allora i problemi (1.1) e (2.4) hanno lo stesso valore minimo per ogni $g \in L^q(\Omega)$.

Per studiare la dipendenza da $\mu \in \mathcal{M}_p(\Omega)$ delle soluzioni di (2.4), introduciamo sull'insieme $\mathcal{M}_p(\Omega)$ la nozione di γ_f -convergenza, definita in termini di Γ -convergenza dei corrispondenti funzionali

$$\int_A f(x, Du) dx + \int_A |u|^p d\mu.$$

DEFINIZIONE 2.1. Sia (μ_h) una successione in $\mathcal{M}_p(\Omega)$ e sia $\mu \in \mathcal{M}_p(\Omega)$. Diremo che (μ_h) γ_f -converge a μ se per ogni $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(a) per ogni $u \in H_0^{1,p}(A)$ e per ogni successione (u_h) in $H_0^{1,p}(A)$ convergente ad u in $L^p(A)$ si ha

$$\int_A f(x, Du) dx + \int_A |u|^p d\mu \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \left\{ \int_A f(x, Du_h) dx + \int_A |u_h|^p d\mu_h \right\};$$

(b) per ogni $u \in H_0^{1,p}(A)$ esiste una successione (u_h) in $H_0^{1,p}(A)$ convergente ad u in $L^p(A)$ tale che

$$\int_A f(x, Du) dx + \int_A |u|^p d\mu \geq \limsup_{h \rightarrow \infty} \left\{ \int_A f(x, Du_h) dx + \int_A |u_h|^p d\mu_h \right\}.$$

Nel caso $p = 2$ ed $f(x, \xi) = |\xi|^2$, la γ_f -convergenza coincide con la γ -convergenza introdotta in [11] e studiata successivamente in [5], [3], [9].

Da teoremi generali sulla Γ -convergenza si ottiene immediatamente un risultato riguardante la convergenza dei problemi di minimo della forma (2.4).

Per ogni $\mu \in \mathcal{M}_p(\Omega)$, $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ e $g \in L^q(A)$, indichiamo con $m(\mu, g, A)$, e $M(\mu, g, A)$ rispettivamente il valore minimo e l'insieme dei punti di minimo del problema (2.4). Si può allora dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA 2.2. Sia (μ_h) una successione in $\mathcal{M}_p(\Omega)$ γ_f -convergente a $\mu \in \mathcal{M}_p(\Omega)$. Allora per ogni $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ e per ogni $g \in L^q(A)$ valgono le seguenti proprietà:

$$(a) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} m(\mu_h, g, A) = m(\mu, g, A);$$

(b) per ogni intorno U di $M(\mu, g, A)$ in $L^p(A)$ esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $M(\mu_h, g, A) \subseteq U$ per ogni $h \geq k$.

Il seguente Teorema è il principale risultato di questo capitolo.

TEOREMA 2.3. Ogni successione (μ_h) in $\mathcal{M}_p(\Omega)$ ha una sottosuccessione $(\mu_{\sigma(h)})$ che γ_f -converge ad una misura μ della classe $\mathcal{M}_p(\Omega)$.

Vale inoltre la seguente proprietà.

TEOREMA 2.4. La γ_f -convergenza su $\mathcal{M}_p(\Omega)$ è metrizzabile.

3. Γ -CONVERGENZA E CONVERGENZA DELLE μ -CAPACITÀ

In questo capitolo affrontiamo il seguente problema: data una successione (μ_h) in $\mathcal{M}_p(\Omega)$, stabilire se (μ_h) γ_f -converge ed individuare la misura limite a partire dalle informazioni disponibili sulla funzione f e sulla successione (μ_h) . A tale scopo, seguendo [11], introduciamo per ogni $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ la μ -capacità di B , rispetto ad f , definita da

$$(3.1) \quad C(f, \mu, B) = \min_{u \in H_0^{1,p}(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} f(x, Du) dx + \int_B |1 - u|^p d\mu \right\}.$$

Notiamo che, se $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ e μ è la misura ∞_{Ω} definita in (2.1), allora $C(f, \mu, K)$ coincide con la capacità $C(f, K)$ introdotta in (1.2).

Valgono allora i seguenti risultati.

TEOREMA 3.1. Sia (μ_h) una successione in $\mathcal{M}_p(\Omega)$ γ_f -convergente a $\mu \in \mathcal{M}_p(\Omega)$. Allora

$$C(f, \mu, K) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} C(f, \mu_h, A)$$

$$C(f, \mu, A) \geq \limsup_{h \rightarrow \infty} C(f, \mu_h, K)$$

per ogni $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ e per ogni $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ con $K \subseteq A$.

COROLLARIO 3.2. Sia (μ_h) una successione in $\mathcal{M}_p(\Omega)$ γ_f -convergente a $\mu \in \mathcal{M}_p(\Omega)$. Allora

$$(3.2) \quad \sup_{K \subseteq A} \liminf_{h \rightarrow \infty} C(f, \mu_h, K) = \sup_{K \subseteq A} \limsup_{h \rightarrow \infty} C(f, \mu_h, K) = C(f, \mu, A)$$

per ogni $A \in \mathcal{A}(\Omega)$.

Per individuare la funzione d'insieme $C(f, \mu, \cdot)$ su tutti i boreliani di Ω , introduciamo una classe di misure contenuta nella classe $\mathcal{M}_p(\Omega)$.

DEFINIZIONE 3.3. Indichiamo con $\mathcal{M}_p^*(\Omega)$ la classe di tutte le misure $\mu \in \mathcal{M}_p(\Omega)$ tali che

$$(3.3) \quad \mu(B) = \inf \{ \mu(U) : U \text{ boreliano } p\text{-quasi aperto}, B \subseteq U \}$$

per ogni $B \in \mathcal{B}(\Omega)$.

DEFINIZIONE 3.4. Sia $u \in \mathcal{M}_p(\Omega)$. Indichiamo con μ^* la funzione d'insieme definita da

$$\mu^*(B) = \inf \{ \mu(U) : U \text{ boreliano } p\text{-quasi aperto}, B \subseteq U \}$$

per ogni $B \in \mathcal{B}(\Omega)$.

OSSERVAZIONE 3.5. Per ogni $\mu \in \mathcal{M}_p(\Omega)$ la funzione d'insieme μ^* è una misura di Borel ed appartiene a $\mathcal{M}_p^*(\Omega)$. Inoltre per ogni $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ ed $u \in H^{1,p}(A)$ vale l'uguaglianza

$$\int_A |u|^p d\mu = \int_A |u|^p d\mu^*,$$

dunque $C(f, \mu, A) = C(f, \mu^*, A)$ per ogni $A \in \mathcal{A}(\Omega)$.

OSSERVAZIONE 3.6. Dall'osservazione precedente e dalla definizione di γ_f -convergenza segue che (μ_h) γ_f -converge a μ se e solo se (μ_h) γ_f -converge a μ^* .

Dall'osservazione 3.5 si ricava il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 3.7. Per ogni $\mu \in \mathcal{M}_p(\Omega)$ e per ogni $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ si ha

$$(3.4) \quad \begin{aligned} C(f, \mu^*, B) &= \inf \{ C(f, \mu^*, A) : A \in \mathcal{A}(\Omega), B \subseteq A \} = \\ &= \inf \{ C(f, \mu, A) : A \in \mathcal{A}(\Omega), B \subseteq A \}. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 3.8. Se (μ_h) γ_f -converge a μ , il Corollario 3.2 e la Proposizione 3.7 ci permettono di determinare la funzione d'insieme $C(f, \mu^*, \cdot)$ su $\mathcal{B}(\Omega)$ a partire dalla conoscenza della successione $C(f, \mu_h, K)$ per ogni $K \in \mathcal{K}(\Omega)$.

Il seguente Teorema fornisce un mezzo per ricostruire la misura μ a partire dalla sua μ -capacità $C(f, \mu, \cdot)$.

TEOREMA 3.9. Sia $\mu \in \mathcal{M}_p(\Omega)$. Allora μ è la minima funzione superadditiva maggiore o uguale a $C(f, \mu, \cdot)$ su $\mathcal{B}(\Omega)$. Ne segue che per ogni $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ si ha

$$\mu(B) = \sup \sum_{i \in I} C(f, \mu, B_i),$$

dove l'estremo superiore è fatto sulla famiglia delle partizioni finite $(B_i)_{i \in I}$ di B costituite da insiemi boreliani.

Sia (μ_h) una successione di misure in $\mathcal{M}_p(\Omega)$. Per ogni $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ definiamo

$$\alpha'(K) = \liminf_{h \rightarrow \infty} C(f, \mu_h, K),$$

$$\alpha''(K) = \limsup_{h \rightarrow \infty} C(f, \mu_h, K).$$

Per ogni $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ siano

$$\beta'(A) = \sup \{ \alpha'(K) : K \in \mathcal{K}(\Omega), K \subseteq A \},$$

$$\beta''(A) = \sup \{ \alpha''(K) : K \in \mathcal{K}(\Omega), K \subseteq A \}.$$

Infine per ogni $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ poniamo

$$(3.5) \quad \beta'(B) = \inf \{ \beta'(A) : A \in \mathcal{A}(\Omega), B \subseteq A \},$$

$$(3.6) \quad \beta''(B) = \inf \{ \beta''(A) : A \in \mathcal{A}(\Omega), B \subseteq A \}.$$

Il seguente Teorema stabilisce l'equivalenza tra la γ_f -convergenza di una successione di misure (μ_h) in $\mathcal{M}_p(\Omega)$ e la convergenza debole (nel senso di [14]) delle corrispondenti capacità $C(f, \mu_h, \cdot)$.

TEOREMA 3.10. Sia (μ_h) una successione in $\mathcal{M}_p(\Omega)$ e siano β' e β'' le funzioni d'insieme definite in (3.5) e (3.6). Allora (μ_h) γ_f -converge ad una misura $\mu \in \mathcal{M}_p(\Omega)$ se e solo se $\beta' = \beta''$ su $\mathcal{B}(\Omega)$. In tal caso, per ogni $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ si ha $\beta'(B) = \beta''(B) = C(f, \mu^*, B)$ e dunque

$$\mu^*(B) = \sup \sum_{i \in I} \beta'(B_i),$$

dove l'estremo superiore è fatto sulla famiglia delle partizioni finite $(B_i)_{i \in I}$ di B costituite da insiemi boreliani.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ATTOUCH H. (1984) - *Variational convergence for functions and operators*. Pitman, London.
- [2] ATTOUCH H. e PICARD C. (1983) - *Variational inequalities with varying obstacles: the general form of the limit problem*. « J. Funct. Anal. », 50, 1-44.
- [3] BAXTER J.R., DAL MASO G. e MOSCO U. - *Stopping times and Γ -convergence*. « Trans. Amer. Math. Soc. », to appear.
- [4] BAXTER J.R. e JAIN N.C. (1985) - *Asymptotic capacities for finely divided bodies and stopped diffusions*. Preprint University of Minnesota, Minneapolis.
- [5] BUTTAZZO G., DAL MASO G. e MOSCO U. (1987) - *A derivation theorem for capacities with respect to a Radon measure*. « J. Funct. Anal. », 71, 263-278.
- [6] DAL MASO G. (1981) - *Asymptotic behaviour of minimum problems with bilateral obstacles*. « Ann. Math. Pura Appl. », (4), 129, 327-366.
- [7] DAL MASO G. (1982) - *Limiti di problemi di minimo di funzionali convessi con ostacoli bilaterali*. « Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. », (8), 73, 15-20.
- [8] DAL MASO G. (1983) - *Limits of minimum problems for general integral functionals with unilateral obstacles*. « Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. », (8), 74, 55-61.
- [9] DAL MASO G. (1986) - *Γ -convergence and μ -capacities*. Preprint SISSA, Trieste.
- [10] DAL MASO G. e DEFRANCESCHI A. (1987) - *Some properties of a class of nonlinear variational μ -capacities*. Preprint SISSA, Trieste.
- [11] DAL MASO G. e MOSCO U. (1987) - *Wiener's criterion and Γ -convergence*. « Appl. Math. Optim. », 15, 15-63.
- [12] DE GIORGI E. e DAL MASO G. (1983) - *Γ -convergence and calculus of variations*. « Mathematical Theories of Optimization. Proceedings (S. Margherita Ligure, 1981) », 121-143, « Lectures Notes in Math. », 979, Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [13] DE GIORGI E. e FRANZONI T. (1979) - *Su un tipo di convergenza variazionale*. « Rend. Sem. Mat. Brescia », 3, 63-101.
- [14] DE GIORGI E. e LETTA G. (1977) - *Une notion générale de convergence faible pour des fonctions croissantes d'ensemble*. « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. », (4) 4, 61-99.
- [15] PICARD C. (1984) - *Surfaces minima soumises à une suite d'obstacles*. These, Université de Paris-Sud.