Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Massimo Clavelli

Universalità, Super-universalità, pseudo-modelli, relazioni di pseudo-universo e tecniche elementari

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **81** (1987), n.1, p. 15–22.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1987_8_81_1_15_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1987.

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXI (1987), pp. 15-22

Teoria degli insiemi. — *Universalità, Super-universalità, pseudo-modelli, relazioni di pseudo-universo e tecniche elementari.* Nota (*) di MASSIMO CLAVELLI, presentata dal Corrisp. E. DE GIORGI.

ABSTRACT. — *Universality, Superuniversality, pseudo-models, relations of pseudo-universe and elementary techniques.* Various principles of universality are studied within a Fraenkel-Mostowski-type set theory. Only " elementary " techniques, such as permutations of the universe and direct limits, are used. The notions of " pseudo-universal relation " and " pseudo-model " are introduced and studied in connection with the properties of universality and superuniversality.

KEY WORDS: Superuniversality; Universality; Pseudo-models.

RIASSUNTO. — Vengono studiati vari principi di universalità in un sistema del tipo Fraenkel-Mostowski. Vengono usate solo tecniche elementari, quali permutazioni dell'universo e limiti diretti. Le nozioni di « relazione di pseudo-universo » e di « pseudo modello » vengono introdotte e studiate in connessione con le proprietà di universalità e superuniversalità.

1. INTRODUZIONE

I principi di libera costruzione, di cui i principi di universalità sono un caso particolare, sembrano assumere un'importanza crescente nell'ambito delle ricerche riguardanti nuove presentazioni dei fondamenti della matematica.

Il problema che si affronta nel presente lavoro è lo studio dei principi e delle proprietà di universalità in un sistema del tipo Fraenkel–Mostowski senza assioma di fondazione e con l'assioma della scelta, mediante l'uso di tecniche tipo permutazioni dell'universo e limiti diretti.

Queste tecniche possono essere dette elementari in confronto alle tecniche usate da altri autori per dimostrare la consistenza relativa del principio di superuniversalità (vedi in particolare [2] e [6]).

In particolare si ottiene, tra l'altro, una nuova dimostrazione della consistenza relativa del principio di superuniversalità.

Le dimostrazioni complete appariranno in un articolo attualmente in preparazione.

(*) Pervenuta all'Accademia il 9 ottobre 1986.

2. Definizioni

2.0. ZF e ZF^o sono le usuali teorie degli insiemi con e senza fondazione così come sono definiti, ad esempio, su [5] pag. 10-11. Per $F^o MC$ (Fraenkel–Mostowski con scelta e senza fondazione) intendo un sistema che ha lo stesso linguaggio di ZF con in più la costante $\varnothing$ e comprende gli assiomi del duetto, dell'unione, dell'infinito e di rimpiazzamento così come sono enunciati su [5] pag. 10-11, oltre agli assiomi dell'insieme vuoto, delle parti, di estensionalità debole, di pienezza urelementare e l'assioma C di scelta così come sono enunciati qui di seguito.

2.0.1. Assioma dell'insieme vuoto: $\forall x\,(x \notin \varnothing)$.

2.0.2. Assioma delle parti: $\forall x\, \exists y\, ((z = \varnothing \vee (z \subseteq x \,\&\, \exists t\,(t \in z))) \Leftrightarrow z \in y)$.

2.0.3. Estensionalità debole: $(\forall x\,(x \in y \Leftrightarrow x \in z) \,\&\, \exists x\,(x \in y)) \Rightarrow y = z$.

2.0.4. Pienezza urelementare: « ogni insieme è equipotente a un insieme di urelementi ». (Per urelementi si intendono gli oggetti, diversi dal $\varnothing$, a cui non appartengono altri oggetti).

Estensionalità debole e pienezza urelementare servono per garantire l'esistenza di una « grande » quantità di urelementi.

2.0.5. Scelta (assioma C): « Ogni insieme è equipotente a un ordinale »

ZF^o e ZF con l'aggiunta dell'assioma C, verranno denotati al solito rispettivamente con $ZF^o C$ e ZFC.

Si prenderà in considerazione anche il seguente assioma di inaccessibilità:

2.0.6. Assioma Inac: « ogni ordinale appartiene a un cardinale inaccessibile ».

F^oMC, ZF^o, ZF^oC, ZF e ZFC con l'aggiunta di Inac verranno denotati rispettivamente con F^oMC.Inac, ZF^oInac, ZF^oC.Inac, ZF.Inac e ZFC. Inac.

2.1. Per relazione si intende una terna (A, B, C) con $C \subseteq A \times B$; nelle relazioni che verranno usate in questo lavoro, si avrà sempre $B = \{x / \exists y\, ((y, x) \in C)\}$; A verrà detto prima proiezione, B seconda proiezione, $A \cup B$ ambiente della relazione. Al solito, se $r = (A, B, C)$ è una relazione con $x\, r\, y$ si intende $(x, y) \in C$. Si dice che una relazione $s = (A, B, C)$ è « *restrizione transitiva* » di una relazione $r = (A', B', C')$ se $A \subseteq A'$, $B \subseteq B'$, $C \subseteq C'$ e $(x\, r\, y \wedge y \in A \cup B) \Rightarrow x\, s\, y$.

2.2. Se r è una relazione, con $A\,t\,(r)$ (atomi di r) intendo l'insieme dei t dell'ambiente di r, tali che $\exists\, x\,(x\, r\, t)$.

2.3. Una relazione r viene detta una «ristretta dell'appartenenza» quando $x\,r\,y \Rightarrow x \in y$; viene detta «insiemisticamente transitiva» se, per gli y appartenenti all'ambiente di r, si ha $x \in y \Rightarrow x\,r\,y$.

2.4. Sia r una relazione, se a appartiene alla seconda proiezione di r, si definisce la «r-chiusura transitiva» di a $(r - t\,r\,c\,(a))$ come segue; $x \in r - t\,r\,c\,(a)$ se $x = a$ oppure esistono $y_1, \ldots, y_n$ tali che $y_i\,r\,y_{i+1}$, $x = y_1$ e $a = y_n$.

2.5. Sia r una relazione, si dice che r è «benfondata», se *non* esiste nessuna funzione f, definita su $\mathbf{N}$, tale che $f(n+1)\,r\,f(n)$ per $n \in \mathbf{N}$.

2.6. Sia r una relazione, si dice che r è «debolmente estensionale», se $(\forall z\,(z\,r\,x \Leftrightarrow z\,r\,y)\,\&\,\exists z\,(z\,r\,x)) \Rightarrow x = y$ si dice che r è «fortemente estensionale» (o che verifica la proprietà di «estensionalità forte») se $\forall z\,(z\,r\,x \Leftrightarrow z\,r\,y) \Rightarrow x = y$.

2.7. Sia r una relazione, si dice che r verifica la «proprietà delle parti», se per ogni x appartenente all'ambiente di r, esiste un y appartenente all'ambiente di r, tale che $\forall v\,(v\,r\,u \Rightarrow v\,r\,x) \Leftrightarrow u\,r\,y$.

2.8. Proprietà di «rimpiazzamento assoluto» per una relazione r:

«Se f è una funzione avente dominio contenuto in $\{x/x\,r\,y\}$ per un qualche y appartenente alla seconda proiezione di r e avente immagine contenuta nell'ambiente di r, allora esiste uno z appartenente all'ambiente di r, tale che $t\,r\,z \Leftrightarrow \exists x\,(t = f(x))$».

2.9. Due relazioni r, s vengono dette «strutturalmente isomorfe mediante l'isomorfismo f», quando f è una funzione biunivoca dall'ambiente di r sull'ambiente di s tale che $x\,r\,y \Leftrightarrow f(x)\,s\,f(y)$.

2.10. Siano r ed s relazioni, la funzione f viene detta un «isomorfismo strutturale da r sotto s», se r è strutturalmente isomorfa a una restrizione transitiva di s mediante l'isomorfismo f; f si dice una «immersione» da r in s (ed r «immerso» in s), se f è un isomorfismo strutturale da r sotto s e f ristretto ad $\mathrm{A}\,t\,(r)$ è l'identità.

2.11. Una relazione s' si dice «comparabile» con una relazione r, se la cardinalità dell'ambiente di s' è minore o uguale di quella dell'ambiente di r e s' è restrizione transitiva di una relazione s t.c. $|\,\mathrm{A}\,t\,(s)\,| \leq |\,\mathrm{A}t\,(r)\,|$, vale $\forall x\,\exists y\,(|\,\{t/t\,s\,x\}\,| \leq |\,\{t/t\,r\,y\}\,|)$ ed esiste x tale che l'ambiente di s sia uguale ad $s - t\,r\,c\,(x)$.

2.12. Una relazione r viene detta «omogenea» in una relazione s, se r è restrizione transitiva di s e inoltre si verifica quanto segue: per ogni b appartenente alla seconda proiezione di r e ogni a contenuto in $r - t\,r\,c\,(b)$ e transitivo rispetto ad r (cioè $(y\,r\,x\,\&\,x \in a) \Rightarrow y \in a$) e ogni g, c tali che g sia una funzione biunivoca da a su c , c sia contenuto nell'ambiente di r e sia transitivo rispetto ad r , $(x , y \in a \,\&\, x\, r\, y) \Longleftrightarrow g(x)\, r\, g(y)$ e g è l'identità su $A\,t(r) \cup \cap a$, esistono f, d tali che f sia una funzione biunivoca da $r - t\,r\,c(b)$ su $s - t\,r\,c(\mathrm{d})$ che ristretta ad a sia uguale a g e tale che $(x , y \in r - t\,r\,c(b) \,\&\, x\, r\, y) \Longleftrightarrow f(x)\, s\, f(y)$.

2.13. Per « pseudo-modello » (di teoria degli insiemi) si intende una relazione debolmente estensionale verificante la proprietà di rimpiazzamento assoluto.

2.14. Una relazione viene detta « di pseudo-universo » se è una ristretta dell'appartenenza insiemisticamente transitiva ed è uno pseudo-modello.

2.15. Il termine pseudo-universo è giustificato dalla seguente definizione; un insieme U si dice pseudo-universo se verifica le seguenti proprietà:

(a) se a è un insieme appartenente ad U ed f una funzione avente dominio non vuoto contenuto in a e immagine contenuta in U, allora l'immagine di f appartiene ad U (rimpiazzamento rispetto a funzioni anche esterne).

(b) U è transitivo

(Si verifica che una ristretta dell'appartenenza insiemisticamente transitiva è una relazione di pseudo-universo sse il suo ambiente è uno pseudo-universo).

2.16. Uno pseudo-modello si dice « inaccessibile » se la cardinalità del suo ambiente è inaccessibile.

2.17. Sia r uno pseudo-modello, a il suo ambiente, sia F una funzione biunivoca da a su a (una tale funzione verrà detta permutazione di r); si definiscono allora le due relazioni $\cdot\,(\mathrm{F})\, r\,\cdot$ ed $\cdot\, r\,(\mathrm{F})\cdot$ aventi lo stesso ambiente di r, come segue:

(a) $x \cdot (\mathrm{F})\, r \cdot y$ sse $\mathrm{F}(x)\, r\, y$ (permutato sinistro di r mediante F);

(b) $x \cdot r\,(\mathrm{F}) \cdot y$ sse $x\, r\, \mathrm{F}(y)$ (permutato destro di r mediante F).

2.18. Sia r uno pseudo-modello, si definisce Ord(r) (l'ordinale di r) come l'unione degli ordinali rappresentanti buoni ordinamenti, rappresentati anche da restrizioni transitive di r. Questa definizione, nel caso in cui r sia una relazione di pseudo-universo tale che $\varnothing \in A\,t(r)$, coincide con quella di estremo superiore degli ordinali appartenenti all'ambiente di r.

2.19. Uno pseudo-modello r si dice « buono », se esiste una permutazione H di r, tale che $\cdot\, r\,(\mathrm{H})\,\cdot$ sia benfondata, e inoltre vale una delle due seguenti proprietà:

(a) Ord(r) è regolare, Ord(r) è un cardinale più che numerabile e $\mathrm{P}(\{y/y\, r\, x\})$, per x appartenente alla seconda proiezione di r, abbia cardinalità minore di quella dell'ambiente di r.

(*b*) P (Ord (r) U ω) ha cardinalità minore o uguale di quella dell'ambiente di r.

2.20. Si considerino le coppie della forma (r , a), dove r è una relazione estensionale ed a un elemento della sua seconda proiezione: li si chiami « pseudo-insiemi ».

Due pseudo-insiemi (r , a) ed (s , b) si dicono dello stesso « tipo », se r ristretta a r-$t\ r\ c$ (a) è strutturalmente isomorfa ad s ristretta a s-$t\ r\ c$ (b).

Così si stabilisce una relazione di equivalenza tra gli pseudo-insiemi.

3. PRINCIPI E PROPRIETÀ DI UNIVERSALITÀ

Si espongono ora in termini di relazioni i principi e le proprietà di universalità; essi riguardano la possibilità, date certe relazioni, di rappresentarle come strutturalmente isomorfe a delle ristrette dell'appartenenza insiemisticamente transitive.

3.1. Ude (principio di universalità):

« Ogni relazione debolmente estensionale è strutturalmente isomorfa a una ristretta dell'appartenenza insiemisticamente transitiva ». Un rafforzamento naturale di Ude è il seguente:

3.2. SUde (principio di superuniversalità):

« Sia data una relazione debolmente estensionale r ed una ristretta dell'appartenenza insiemisticamente transitiva s che sia restrizione transitiva di r, allora r è strutturalmente isomorfa a una ristretta dell'appartenenza insiemisticamente transitiva mediante una funzione, che ristretta all'ambiente di s, è l'identità ».

Gli assiomi di universalità U_l e di superuniversalità S, introdotti in [2], si ottengono, in ambiente fortemente estensionale, rispettivamente da Ude e SUde, limitandosi a considerare relazioni fortemente estensionali.

Nel caso in cui si considerino teorie degli insiemi con urelementi (ad esempio nell'analisi non-standard o in parecchie teorie anche recenti dei fondamenti della matematica), risulta particolarmente interessante il seguente principio intermedio tra i due precedenti:

3.3. Us (Universalità superatomica):

« Sia data una relazione debolmente estensionale r ed un insieme a di urelementi contenuto in A t (r), allora r è strutturalmente isomorfa a una ristretta dell'appartenenza insiemisticamente transitiva, mediante una funzione che ristretta ad a è l'identità ».

Le proprietà di universalità sono la relativizzazione alle relazioni dei principi di universalità, siamo interessati a dette proprietà per le relazioni estensionali (debolmente o fortemente) e particolarmente per gli pseudo-modelli.

3.4. Proprietà di universalità (locale) per una relazione r:
« Se s è una relazione debolmente estensionale comparabile con r, s è strutturalmente isomorfa a una restrizione transitiva di r ».

3.5. Proprietà di superuniversalità per una relazione r:
« Sia data una relazione s debolmente estensionale, comparabile con r e tale che $\mathrm{A}\,t\,(r)$ infinito implichi $|\mathrm{A}\,t\,(s)| < |\mathrm{A}\,t\,(r)|$, e sia t una restrizione transitiva sia di r che di s; allora c'è un isomorfismo strutturale da s sotto r, che ristretto all'ambiente di t, è l'identità ».

3.6. Proprietà di universalità superatomica per una relazione r:
« Sia data una relazione s debolmente estensionale, comparabile con r e tale che $\mathrm{A}\,t\,(r)$ infinito implichi $|\mathrm{A}\,t\,(s)| < |\mathrm{A}\,t\,(r)|$, e sia a un insieme contenuto in $\mathrm{A}\,t\,(r)$ e in $\mathrm{A}\,t\,(s)$; allora c'è un isomorfismo strutturale da s sotto r, che ristretto ad a, è l'identità ».

4. Proposizioni, primi risultati e lemmi

4.1. Proposizione. (*a*) *Sia r uno pseudo-modello fissato. Allora ogni permutato sinistro di r è strutturalmente isomorfo a qualche permutato destro di r; e viceversa;*

(*b*) *Tutti i permutati destri e sinistri di uno pseudo-modello r sono pseudo-modelli; se in più r verifica la proprietà delle parti o di estensionalità forte, anche i suoi permutati la verificano.*

4.2. Teorema. *Sia r uno pseudomodello benfondato, sia s una relazione debolmente estensionale, avente cardinalità dell'ambiente minore o uguale a quella dell'ambiente di r e tale che* $\forall x\, \exists y\, (|\{t/t\, s\, x\}| \leq |\{t/t\, r\, y\}|)$, *sia t una funzione iniettiva da* $\mathrm{A}\,t\,(s)$ *in* $\mathrm{A}\,t\,(r)$*; allora esiste una permutazione* F *di r e un isomorfismo strutturale da s sotto* $\cdot\, r\,(\mathrm{F})\,\cdot$ *che estende t.*

4.3. *Osservazione.* La tesi del Teorema 4.2 continua a valere se all'ipotesi che r sia benfondato, si sostituisce l'ipotesi che esista una permutazione G di r, tale che $\cdot\, r\,(\mathrm{G})\,\cdot$ sia benfondato.

4.4. Lemma. *Sia dato uno pseudo-modello r buono e inaccessibile, allora esiste una permutazione* G *di r, ed uno pseudo-modello s, omogeneo in s, tale che r sia immerso in s ed s sia immerso in* $\cdot\, r\,(\mathrm{G})\,\cdot$.

Inoltre s verifica le proprietà delle parti o di estensionalità sse *r rispettivamente le verifica.*

4.5. Lemma. *Sia r uno pseudo-modello buono, si consideri un rappresentante* $(s\,,a)$ *per ogni tipo di pseudo-insieme avente un rappresentante della forma* $(\cdot\, r\,(\mathrm{F})\,\cdot\,,\, b)$*; allora la somma delle cardinalità delle s-t r c* (a) *dei detti rappresentanti* $(s\,,a)$ *è uguale alla cardinalità dell'ambiente di r.*

4.6. LEMMA. *Sia r uno pseudo-modello buono, si consideri un rappresentante* (s, a) *con s comparabile con r, per ogni tipo di pseudo-insieme per cui una tale rappresentazione esiste; allora la somma delle cardinalità delle* $s - t\,r\,c\,(a)$ *di detti rappresentanti* (s, a) *è uguale alla cardinalità dell'ambiente di r.*

5. IL TEOREMA PRINCIPALE E I SUOI COROLLARI

Il principale risultato di questa nota è il seguente:

5.1. TEOREMA. (*a*) *Sia r uno pseudo-modello buono, allora esiste uno pseudo-modello s, permutato di r, tale che r sia immerso in s, ed s verifichi la proprietà di universalità, ma non quella di superuniversalità.*

(*b*) *Se r è uno pseudo-modello buono e inaccessibile, esiste uno pseudo-modello s', verificante la proprietà di superuniversalità, ed una permutazione* G *di r, tali che r è immerso in s' ed s' è immerso in* $\cdot\, r\,(\mathrm{G})\,\cdot$

(*c*) *s ed s' verificano la proprietà delle parti o di estensionalità* sse *dette proprietà sono rispettivamente verificate da r.*

5.2. *Osservazione.* Se vale il principio di superuniversalità si verifica quanto segue:

(*a*) Se *r* è una relazione di pseudo-universo buona, esiste una relazione di pseudo-universo *s*, tale che *r* è restrizione transitiva di *s*, *s* verifica la proprietà di universalità, ma non quella di superuniversalità, ed è strutturalmente isomorfa a uno pseudo-modello permutato di *r*.

(*b*) Se *r* è una relazione di pseudo-universo buona e inaccessibile, esiste una relazione di pseudo-universo *s'*, verificante la proprietà di superuniversalità, ed una permutazione G di *r*, tali che *r* è restrizione transitiva di *s'* ed *s'* è immerso in $\cdot\, r\,(\mathrm{G})\,\cdot$.

(*c*) *s* ed *s'* verificano le proprietà delle parti o di estensionalità sse *r* rispettivamente le verifica.

5.3. COROLLARIO. *Se* ZF *è consistente, allora sono consistenti* F$^{\circ}$MC + + Ude + nonSde *e* ZF$^{\circ}$C + U_{ι} + non S.

5.4. COROLLARIO.

Se ZF + «*esiste un inaccessibile*» *è consistente, allora sono consistenti anche* F$^{\circ}$ MC + Sde *e* ZF$^{\circ}$ C + S.

5.5. COROLLARIO. *Se* ZF. Inac *è consistente, allora sono consistenti anche* F$^{\circ}$ MC. Inac + Sde *e* ZF$^{\circ}$ C. Inac + S.

5.6. Nota. I Corollari 5.4. e 5.5. possono essere confrontati con i risultati ottenuti in [2] e in [6].

Da detti articoli segue in particolare la seguente proposizione: « *Se* ZF *è consistente, allora* F° MC + Sde *e* ZF° C + S *sono consistenti* », leggermente più forte del Corollario 5.4.

Dai medesimi articoli, dimostrando gli opportuni teoremi di conservazione della « struttura dei cardinali », si può ottenere come caso particolare il Corollario 5.5.

Va però osservato che nel presente lavoro i Corollari 5.4. e 5.5. sono ottenuti con tecniche più elementari.

Infine la seconda parte del Corollario 5.3. segue ad esempio da [1], mentre la prima parte può ottenersi mediante una riscrittura debolmente estensionale del medesimo articolo, la dimostrazione soggiacente al presente lavoro è però originale.

5.7. *Esercizio.* Ude può essere leggermente rafforzato, formulando un assioma Ude + che assegni al $\varnothing$ un ruolo privilegiato rispetto agli urelementi.

Bibliografia

[1] M. Boffa (1969) – *Sur la theories des ensemble sans axiome de fondement,* « Bull. Soc. Math. Belg. », *21,* 16-56.

[2] M. Boffa (1972) – *Forcing et négation de l'axiome de fondement,* « Mem. Acad. Sc. Belg. », *40* (7).

[3] M. Clavelli (1984) – *Nuove presentazioni dei fondamenti della matematica,* Pisa, tesi di laurea.

[4] M. Clavelli (1984) – *Collezioni e comprensione non-negativa : proposta di due teorie assiomatiche del tipo elementi classi collezioni.* Università di Siena, Dipartimento di Matematica, rapporto matematico, n. 126.

[5] U. Felgner (1971) – *Models of* ZF *set theory,* lecture notes in Mathematics n. 223, Springer Verlag.

[6] M. Forti e F. Honsell (1983) – *Set theory with free construction principles,* « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », Classe di Scienze, Serie IV, *10,* 493-522.

[7] M. Forti e F. Honsell (1984) – *Axiom of choise and free construction principles I,* « Bull. Soc. Mat. Belg. », serie B, *36,* 69-79.

[8] P. Hàjiek (1965) – *Modelle der Mengenlehre in denen Mengen gegebener Gestalt existieren,* « Zeitscr. f. Math. Log. u. Grund. der Math. », *11,* 103-115.

[9] M. v. Rimsha (1981) – *Universality and strong extensionality.* « Arc. f. math. Log. u. Grund. der Math. », *21,* 195-205.