Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alberto Cialdea

The equation $\nabla_2 u + a_{10}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + a_{01}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + a_{00}(x,y)u = F(x,y)$. Estimates connected to boundary value problems

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **80** (1986), n.7-12, p. 510–524.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1986_8_80_7-12_510_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Analisi matematica. — *L'equazione* $\Delta_2 u + a_{10}(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + a_{01}(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + a_{00}(x, y) u = \mathrm{F}(x, y)$. *Formule di maggiorazione relative ai problemi al contorno.* Nota di ALBERTO CIALDEA, presentata (*) dal Socio G. FICHERA.

ABSTRACT. — *The equation* $\Delta_2 u + a_{10}(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + a_{01}(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + a_{00}(x, y) u = \mathrm{F}(x, y)$. *Estimates connected to boundary value problems.* The determination of costant of (1.5) is given when existence and uniqueness hold. If $p = 2$, whatever the index, a method for computation of costant is developed.

KEY WORDS: Partial differential equations; Estimates; Boundary value problems.

RIASSUNTO. — Viene data l'espressione della costante in (1.5) nell'ipotesi che valga un teorema di esistenza e unicità. Se $p = 2$, qualunque sia l'indice, è sviluppato un metodo per il calcolo di detta costante.

In questa Nota, che segue [1] e [2], viene data l'espressione esplicita di costanti che intervengono in certe maggiorazioni negli spazi $\mathscr{A}^p$ (1), relative ai problemi considerati, per i quali si suppone che valga un teorema di esistenza e unicità. Nel caso $p = 2$, viene fornito un metodo per il calcolo esplicito di costanti ottimali, relative a problemi con indice qualsiasi.

1. FORMULE DI MAGGIORAZIONE

Sia Ω un campo semplicemente connesso e limitato del piano avente per frontiera $\Sigma = \partial\Omega$ una curva di Jordan semplice di classe $C^{1+\lambda}$; consideriamo i seguenti operatori:

$$\begin{cases} \mathrm{L} = \Delta_2 + \sum\limits_{|\alpha| \leq 1} a_\alpha(z) \mathrm{D}^\alpha & a_\alpha \in C^\lambda(\overline{\Omega}) \\ \mathrm{B} = \sum\limits_{|\beta| \leq 1} b_\beta(z) \mathrm{D}^\beta & b_\beta \in C^\lambda(\Sigma) \end{cases}$$

con B che verifica la condizione di Lopatinskii.

(*) Nella seduta del 10 maggio 1986.

(1) Per le definizioni e le notazioni, cfr. [1], [2].

Consideriamo lo spazio $\mathscr{A}^p$, introdotto in [2].

Lo spazio $\mathscr{A}^p$ si può normare in vari modi; ad esempio si può prendere una delle seguenti norme:

$$(1.1)\qquad (\| u \|^p_{L^p(\Omega)} + \| \Delta_2 u \|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|\leq 1} \| D^\alpha u \|^p_{L^p(\Sigma)})^{1/p}$$

$$(1.2)\qquad (\| u \|^p_{H^{1,p}(\Omega)} + \| \Delta_2 u \|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=1} \| D^\alpha u \|^p_{L^p(\Sigma)})^{1/p}$$

$$(1.3)\qquad \left(\| u \|^p_{H^{1,p}(\Omega)} + \| \Delta_2 u \|^p_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|^p_{L^p(\Sigma)}\right)^{1/p}.$$

È facile verificare che, prendendo come norma (1.1) o (1.2), $\mathscr{A}^p$ risulta essere uno spazio di Banach. Ciò è vero anche se si prende la (1.3). Infatti è noto che esiste una costante K_p tale che (2):

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|_{L^p(\Sigma)} \leq K_p \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{L^p(\Sigma)} \qquad \forall u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega);\ \Delta_2 u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Usando ciò, il teorema di rappresentazione 3 di [2] e il fatto che $\mathscr{U}(\Omega)$ è denso in $\mathscr{A}^p$ con la norma (1.3), si vede che esiste una costante C_p tale che, per ogni $u \in \mathscr{A}^p$, si ha:

$$\sum_{|\alpha|=1} \left\| D^\alpha u \right\|^p_{L^p(\Sigma)} \leq 2^p \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|^p_{L^p(\Sigma)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|^p_{L^p(\Sigma)} \right) \leq C_p \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|^p_{L^p(\Sigma)} + \left\| \Delta_2 u \right\|^p_{L^p(\Omega)} \right).$$

Da ciò segue anche che le topologie indotte da (1.1), (1.2) e (1.3) coincidono. Sia $\mathscr{A}^p$ normato con una qualsiasi di queste tre norme.

Consideriamo il problema:

$$(1.4)\qquad u \in \mathscr{A}^p \quad ; \quad Lu = f \quad ; \quad Bu = g\,,$$

essendo $(f, g) \in L^p(\Omega) \times L^p(\Sigma)$.

Sia M l'operatore seguente:

$$M : \mathscr{A}^p \to L^p(\Omega) \times L^p(\Sigma)$$
$$Mu = (Lu\,, Bu)\,.$$

M è un operatore a grafico chiuso; per il teorema del grafico chiuso è anche continuo. Sia $\mathscr{N}_0$ l'autoinsieme di M. Possiamo considerare: $M^{-1} : R(M) \to \mathscr{A}^p / \mathscr{N}_0$.

Per il Teorema 5 di [2], il codominio $\mathscr{R}(M)$ è chiuso e quindi, per teoremi ben noti, M^{-1} è continuo. Esiste allora una costante C tale che:

$$(1.5)\qquad \inf_{u_0 \in \mathscr{N}_0} \| u + u_0 \|_{\mathscr{A}^p} \leq C (\| Lu \|^p_{L^p(\Omega)} + \| Bu \|^p_{L^p(\Sigma)})^{1/p}\,,$$

(2) Cfr. [3], p. 135.

avendo indicato con $|||\, u\, |||_{\mathscr{A}^p}$ una delle tre norme (1.1), (1.2) o (1.3) (ovviamente la costante C dipende dalla norma scelta).

2. Espressione esplicita delle costanti

Sia $|||\, u\, |||_{\mathscr{A}^p}$ data dalla (1.3). Vogliamo fornire un espressione esplicita di una costante C relativa alla (1.5) nell'ipotesi che per il problema (1.4) ci sia un teorema di esistenza e unicità, ossia che $\mathscr{N}_0 = \{0\}$, $R(\mathrm{M}) = \mathrm{L}^p(\Omega) \times \mathrm{L}^p(\Sigma)$.

Per semplicità supporremo che Ω verifichi la circostanza di cui alla nota [8] di [1], ossia che nel Teorema di rappresentazione 3 di [2] si possa assumere $c = 0$.

Sia $u \in \mathscr{A}^p$; possiamo scrivere:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Omega \psi(\zeta) \log |z - \zeta| \, d\tau_3 + \int_\Sigma \varphi(\zeta) \log |z - \zeta| \, ds_\zeta .$$

Poniamo:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Omega \psi(\zeta) \log |z - \zeta| \, d\tau_\zeta \; ; \; v(z) = \int_\Sigma \varphi(\zeta) \log |z - \zeta| \, ds_\zeta . \tag{2.1}$$

Si ha:

$$\| w \|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} = \int_\Omega \left| \int_\Omega \psi(\zeta) \frac{\log |z - \zeta|}{2\pi} d\tau_\zeta \right|^p d\tau_z \leq \mathrm{C}_1 \| \psi \|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} ,$$

essendo:

$$\mathrm{C}_1 = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_\Omega \left(\int_\Omega |\log |z - \zeta||^q \, d\tau_\zeta \right)^{p/q} d\tau_z .$$

$$\| \mathrm{D}w \|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leq \frac{1}{(2\,\pi)^p} \int_\Omega \left(\int_\Omega \frac{|\psi(\zeta)|}{|\zeta - z|} d\tau_\zeta \right)^p d\tau_z \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2\,\pi)^p} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\psi(\zeta)|^p}{|\zeta - z|} d\tau_\zeta \left(\int_\Omega \frac{d\tau_w}{|z - w|} \right)^{p/q} d\tau_z \leq \mathrm{C}_2 \| \psi \|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)}$$

essendo: $\mathrm{C}_2 = (\mathrm{diam}\ \Omega)^p$.

Fissiamo ora un numero k tale che:

$$0 < k < \min\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right\} \tag{2.2}$$

Per le ipotesi fatte su Ω, esistono le costanti: $0 < h \leq 1$, $H > 0$, $N > 0$, tali che, su Σ, si ha (3):

$$|\dot{\zeta} - \dot{z}| \leq H |\zeta - z|^h \quad ; \quad |s_\zeta - s_z| \leq N |\zeta - z|$$

$$\left\|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right\|^p_{L^p(\Sigma)} \leq \frac{2^{p/2}}{(2\pi)^p} \int_\Sigma \left(\int_\Omega \frac{|\psi(\zeta)|}{|\zeta - z|} d\tau_\zeta\right)^p ds_z \leq$$

$$\leq \frac{2^{p/2}}{(2\pi)^p} \int_\Sigma \left(\int_\Omega \frac{|\psi(\zeta)|^p}{|\zeta - z|^{1-pk}} d\tau_\zeta\right) \left(\int_\Omega \frac{d\tau_w}{|z - w|^{1+kq}}\right)^{p/q} ds_z \leq C_3 \|\psi\|^p_{L^p(\Omega)},$$

essendo (4)

$$C_3 = \frac{2^{p/2}}{(2\pi)^p} \cdot \frac{2N^{1-pk}}{pk} \left(\frac{L}{2}\right)^{pk} \left[2\pi \frac{(\operatorname{diam}\Omega)^{1-kq}}{1-kq}\right]^{p/q} \qquad (L = \text{lungh. di } \Sigma).$$

Si noti che, per la (2.2), si ha: $kq < 1$, $kp > 0$.
Inoltre $\|\Delta_2 w\|_{L^p(\Omega)} = \|\psi\|_{L^p(\Omega)}$.

$$\|v\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega \left|\int_\Sigma \varphi(\zeta) \log|z - \zeta| ds_\zeta\right|^p d\tau_z \leq \int_\Omega \int_\Sigma |\varphi(\zeta)|^p ds_\zeta$$

$$\left(\int_\Sigma |\log|z - w||^q ds_w\right)^{p/q} d\tau_z = C_4 \|\varphi\|^p_{L^p(\Sigma)},$$

essendo:

$$C_4 = \int_\Omega \left(\int_\Sigma |\log|z - w||^q ds_w\right)^{p/q} d\tau_z$$

$$\|Dv\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega \left|\int_\Sigma \varphi(\zeta) D\log|z - \zeta| ds_\zeta\right|^p d\tau_z \leq \int_\Omega \left(\int_\Sigma \frac{|\varphi(\zeta)|}{|\zeta - z|} ds_\zeta\right)^p d\tau_z \leq$$

$$\leq \int_\Omega \int_\Sigma \frac{|\varphi(\zeta)|^p}{|\zeta - z|^{1+kp}} ds_\zeta \left(\int_\Sigma \frac{ds_w}{|z - w|^{1-kq}}\right)^{p/q} d\tau_z \leq C_5 \|\varphi\|^p_{L^p(\Sigma)},$$

(3) Cfr. [9], p. 279.

(4) Si osservi che la funzione $\int_\Sigma \frac{ds_\zeta}{|\zeta - z|^{1-pk}}$ è continua in C (cfr. [7]) e subarmonica in Ω.

essendo:

$$C_5 = \left[\frac{2\,N^{1-kq}}{kq}\left(\frac{L}{2}\right)^{k/q}\right]^{p/q} \cdot \frac{2\,\pi\,(\text{diam}\,\Omega)^{1-kp}}{1-kp}$$

Si noti che per la (2.2) si ha: $kq > 0$, $kp < 1$.

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\|^p_{L^p(\Sigma)} = \int_\Sigma \left| \pi\,\varphi(z) + \int_\Sigma \varphi(\zeta)\,\frac{\partial}{\partial \nu_z} \log|z-\zeta|\,ds_\zeta \right|^p ds_z \le$$

$$\le \left\{\pi\,\|\varphi\|^p_{L^p(\Sigma)} + HN^2 \left(\int_\Sigma\int_\Sigma \frac{|\varphi(\zeta)|^p}{|\zeta - z|^{1-h}}\,ds_\zeta \left(\int_\Sigma \frac{ds_w}{|z-w|^{1-h}}\right)^{p/q} ds_z\right)^{1/p}\right\}^p \le$$

$$\le C_6\,\|\varphi\|^p_{L^p(\Sigma)},$$

essendo:

$$C_6 = \left[\pi + \frac{2\,HN^{3-h}}{h}\left(\frac{L}{2}\right)^h\right]^p.$$

In definitiva si ha:

$$|||\,u\,|||_{\mathscr{A}^p} \le (C_1 + 2\,C_2 + 1 + C_3)^{1/p}\,\|\psi\|_{L^p(\Omega)} + (C_4 + 2\,C_5 +$$
$$+ C_6)^{1/p}\,\|\varphi\|_{L^p(\Sigma)} \le \max\{(C_1 + 2\,C_2 + C_3 + 1)^{1/p};$$
$$(C_4 + 2\,C_5 + C_6)^{1/p}\}\,(\|\psi\|_{L^p(\Sigma)} + \|\varphi\|_{L^p(\Sigma)}).$$

Se $Lu = f$, $Bu = g$, (ψ, φ) è soluzione del sistema seguente:

$$\text{(2.3)} \qquad \begin{cases} \psi + \mathscr{T}_1\psi + \mathscr{T}_2\varphi = f \\ S\varphi + \mathscr{T}_3\psi = g \end{cases}$$

Poiché supponiamo $\chi = 0$, questo sistema è equivalente al seguente:

$$\text{(2.4)} \qquad \begin{cases} \psi + \mathscr{T}_1\psi + \mathscr{T}_2\varphi = f \\ \varphi + S'\mathscr{T}_3\psi + \mathscr{T}_4\varphi = S'g. \end{cases}$$

Poniamo:

$$\text{(2.5)} \qquad \phi(z) \begin{cases} = \psi(z) & z \in \Omega \\ = \varphi(z) & z \in \Sigma \end{cases}$$

$$F(z) \begin{cases} = f(z) & z \in \Omega \\ = S'g(z) & z \in \Sigma \end{cases}$$

$$\mathrm{K}(z\,,\zeta)\begin{cases} = -\mathrm{K}_{11}(z\,,\zeta) & z\in\Omega\,,\zeta\in\Omega \\ = -\mathrm{K}_{12}(z\,,\zeta) & z\in\Omega\,,\zeta\in\Sigma \\ = -\mathrm{K}_{21}(z\,,\zeta) & z\in\Sigma\,,\zeta\in\Omega \\ = -\mathrm{K}_{22}(z\,,\zeta) & z\in\Sigma\,,\zeta\in\Sigma \end{cases}$$

avendo indicato con $\{\mathrm{K}_{hk}(z\,,\zeta)\}$ la matrice nucleare di (2.4). Dato un sottoinsieme X di $\overline{\Omega}$ misurabile secondo Lebesgue, poniamo: $\mu(\mathrm{X}) = m(\mathrm{X}\cap\Omega) + m_\Sigma(\mathrm{X}\cap\Sigma)$, avendo indicato con m la misura di Lebesgue nel piano e con m_Σ la misura di Lebesgue su Σ. Possiamo riscrivere (2.4) così:

$$\phi(z) - \int_{\overline{\Omega}} \mathrm{K}(z\,,\zeta)\,\phi(\zeta)\,d\mu_\zeta = \mathrm{F}(z)\,. \tag{2.6}$$

Sia ora: $\mathrm{K}_{h+1}(z\,,\zeta) = \int_{\overline{\Omega}} \mathrm{K}_h(z\,,w)\,\mathrm{K}(w\,,\zeta)\,d\mu_w\,.$

Mostriamo che esiste un m tale che $\mathrm{K}_m(z\,,\zeta)$ è limitato in $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$. Osserviamo che si ha:

$$\mathrm{K}_{22}(z\,,\zeta) = 0\left(\frac{1}{|z-\zeta|^h}\right).$$

Per noti teoremi (5): $\mathscr{T}_4^{n-1}(\mathrm{L}^p(\Sigma)) \subset \mathrm{C}^\lambda(\Sigma)$ non appena $n > 1/(1-h)$.
Sia $(\psi_n\,,\varphi_n) = (\mathscr{T}_1\,\psi_{n-1} + \mathscr{T}_2\,\varphi_{n-1}\,,\,\mathrm{S}^1\,\mathscr{T}_3\,\psi_{n-1} + T_4\,\varphi_{n-1})$.
Se $(\psi_0\,,\varphi_0)\in \mathrm{L}^p(\Omega)\times \mathrm{L}^p(\Sigma)$, per i teoremi di immersione di Sobolev e un risultato di teoria del potenziale, si vede che (6):

$$\psi_n\in \mathrm{L}^{2p}(\Omega)\,,\ \varphi_n\in \mathrm{C}^\lambda(\Sigma);\quad \text{quindi:}\quad (\psi_{n+1}\,,\varphi_{n+1})\in \mathrm{C}^\lambda(\overline{\Omega})\times \mathrm{C}^\lambda(\Sigma).$$

Se $(\psi, \varphi)\in \mathrm{L}^p(\Omega)\times \mathrm{L}^p(\Sigma)$, allora, dato ϕ dalla (2.5), si ha:

$$\sup_{\overline{\Omega}}\left|\int_{\overline{\Omega}} \mathrm{K}_n(z\,,w)\,\phi(w)\,d\mu_w\right| < \infty\,.$$

Per il principio dell'uniforme limitatezza si ha:

$$\sup_{\overline{\Omega}}\int_{\overline{\Omega}} |\,\mathrm{K}_n(z\,,w)\,|^q\,d\mu_w < \infty \qquad \left(q = \frac{p}{p-1}\right)$$

(5) Cfr. [13], p. 626.
(6) Cfr. [11], p. 27.

Da ciò segue facilmente la tesi con $m = 2n$.

Se ϕ è soluzione di (2.6), è soluzione anche della seguente equazione:

$$\phi(z) - \int_{\bar{\Omega}} K_m(z, \zeta)\, \phi(\zeta)\, d\mu_\zeta = \tilde{F}(z), \tag{2.7}$$

dove $\tilde{F}(z) = F(z) - \sum_{h=1}^{m-1} \int_{\bar{\Omega}} K_h(z, \zeta)\, F(\zeta)\, d\mu_\zeta$.

Come è noto la soluzione di (2.7) è data da [7]:

$$\phi(z) = \tilde{F}(z) + \int_{\bar{\Omega}} R(z, \zeta; 1)\, \tilde{F}(\zeta)\, d\mu_\zeta,$$

essendo $R(z, \zeta; \lambda)$ una funzione meromorfa di λ:

$$R(z, \zeta; \lambda) = \frac{N(z, \zeta; \lambda)}{\delta(\lambda)}.$$

i ha:

$$|N(z, \zeta; 1)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^{n+1} (n+1)^{\frac{n+1}{2}} (\mu(\bar{\Omega}))^n$$

dove $|K_m(z, \zeta)| \leq M$.

Inoltre possiamo supporre m tale che $\delta(\lambda)$ sia di genere zero [8], ossia che: $\delta(\lambda) = \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_h}\right)$, essendo $\{\lambda_h\}$ gli autovalori dell'equazione:

$$\phi(z) - \lambda \int_{\bar{\Omega}} K_m(z, \zeta)\, \phi(\zeta)\, d\mu_\zeta = 0$$

ordinati al modo seguente: $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots$

Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tutti gli autovalori tali che $|\lambda_j| \leq 1$.

Si ha:

$$\prod_{k=p+1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{|\lambda_k|}\right) = \exp\left(\sum_{k=p+1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{|\lambda_k|}\right)\right) \geq$$

(7) Cfr. [10], p. 373.
(8) Cfr. [10], p. 426.

$$\exp\left(-\frac{1}{1-\frac{1}{|\lambda_{p+1}|}}\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_k|}\right)\geq {}^{(9)}$$

$$\geq \exp\left(-\frac{1}{1-\frac{1}{|\lambda_{p+1}|}} M\mu(\overline{\Omega})\right)$$

$$\frac{1}{\delta(1)}\leq \prod_{h=1}^{p}\frac{1}{|\lambda_h-1|}\exp\left(\frac{|\lambda_{p+1}|}{|\lambda_{p+1}|-1} M\mu(\overline{\Omega})\right)$$

Quindi, posto $\|\phi\|_p=(\|\psi\|^p_{L^p(\Omega)}+\|\varphi\|^p_{L^p(\Sigma)})^{1/p}$, si ha: $\|\phi\|_p\leq C_7\,\|\tilde{F}\|_p$, essendo:

$$C_7=1+\mu(\overline{\Omega})^{1/q}\prod_{h=1}^{p}\frac{1}{|\lambda_h-1|}\exp\left(\frac{|\lambda_{p+1}|}{|\lambda_{p+1}|-1} M\mu(\overline{\Omega})\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}M^{n+1}$$

$$(n+1)^{\frac{n+1}{2}}(\mu(\overline{\Omega}))^n .$$

Inoltre si ha:

$$\|\tilde{F}\|_p\leq\sum_{h=0}^{n}\|\mathscr{T}^h F\|_p\leq\sum_{h=0}^{n}\|\mathscr{T}\|^h\,\|F\|_p\leq C_8\,\|F\|_p .$$

Una costante C_8 maggiorante $\sum_{h=0}^{n}\|\mathscr{T}\|^h$ può essere trovata tenendo presente l'espressione di L e B e seguendo il metodo usato per scrivere $C_1,\dots,C_6$.

Infine osserviamo che si ha: $\|F\|_p=(\|f\|^p_{L^p(\Omega)}+\|S'g\|^p_{L^p(\Sigma)})^{1/p}\leq$ $\leq(\|f\|^p_{L^p(\Omega)}+C_9\,\|g\|^p_{L^p(\Sigma)})^{1/p}$. Per l'espressione esplicita di C_9 rimandiamo a [3] (p. 165).

In definitiva si ha:

$$|||u|||_{\mathscr{A}^p}\leq\max\{(C_1+2\,C_2+C_3+1)^{1/p}\,;\,(C_4+2\,C_5+C_6)^{1/p}\}\cdot 2\,C_7\,\cdot$$

$$\cdot\, C_8\max\{1\,;\,C_9^{1/p}\}\,(\|Lu\|^p_{L^p(\Omega)}+\|Bu\|^p_{L^p(\Sigma)})^{1/p} .$$

3. CALCOLO ESPLICITO DELLE COSTANTI NEL CASO $p=2$

Sia T un operatore compatto da uno spazio di Hilbert H in se stesso, autoaggiunto ($T=T^*$); tale che $T^2\in\mathscr{T}^n$, ossia tale che, detta $\{\mu_h\}$ la successione degli autovalori relativi all'equazione: $Tu-\mu\,u=0$, si ha: $\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{2n}<\infty$.

(9) Si osservi che: $\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_h|}\leq\int_{\overline{\Omega}}|K_m(z,z)|\,d\mu_z\leq M\mu(\overline{\Omega})$.

Esponiamo un metodo per il calcolo di:

$$\lambda = \inf_{\substack{x \in H \\ x \neq 0}} \frac{(Tx , x)}{\| x \|^2} .$$

Osserviamo che $\lambda \leq 0$, giacché lo 0 appartiene allo spettro di T, e che, inoltre, se $\lambda \neq 0$, λ è un autovalore di T [10].

Il classico metodo di Rayleigh-Ritz fornisce dei valori per eccesso di λ. Più precisamente: sia $\{w_n\}$ un sistema completo in H. Consideriamo il sistema:

$$\det \{(Tw_i , w_j) - \mu (w_i , w_j)\} = 0 \qquad i , j = 1 , \dots , \nu \tag{3.1}$$

Siano $\lambda_1^{(\nu)} \leq \dots \leq \lambda_\nu^{(\nu)}$ le soluzioni di questo sistema: non è difficile dimostrare che si ha: $\lambda_1^{(\nu+1)} \leq \lambda_1^{(\nu)}$; $\lim\limits_{\nu \to \infty} \lambda_1^{(\nu)} = \lambda$.

Consideriamo ora l'operatore T^2 ; T^2 è un PCO (operatore positivo compatto); ad esso si può applicare la teoria degli invarianti ortogonali, nel senso seguente: supponiamo $\{w_n\}$, oltre che completo, ortonormale. Poniamo:

$$\mathscr{I}^n (T^2) = \sum_{h=1}^{\infty} \mu_k^{2n}$$

$$\mathscr{I}^n ((P_\nu T P_\nu)^2) = \sum_{k=1}^{\nu} (\lambda_k^{(\nu)})^{2n}$$

$$\sigma^{(\nu)} = [\mathscr{I}^n (T^2) - \mathscr{I}^n ((P_\nu T P_\nu)^2) + (\lambda_1^{(\nu)})^{2n}]^{1/n} .$$

Poiché $P_\nu T P_\nu \rightrightarrows T$, e quindi $(P_\nu T P_\nu)^2 \rightrightarrows T^2$, si ha: $\lim\limits_{\nu \to \infty} \sigma^{(\nu)} = \lambda^2$ [11]. Inoltre, se $\lambda \neq 0$, λ^2 è autovalore di T^2 e si ha [12]:

$$[\sigma^{(\nu)}]^n = \lambda^{2n} + \sum_{k=1}^{\infty}{}^{(\lambda 2)} \mu_k^{2n} - \sum_{h=2}^{\nu} (\lambda_h^{(\nu)})^2 \geq \lambda^{2n}$$

giacché $(P_\nu T P_\nu)^2 \leq P_\nu T^2 P_\nu$ [13]. Posto $\gamma_\nu = \min \{\sigma^{(1)} , \dots , \sigma^{(\nu)}\}$, si ha $\gamma_\nu \geq \gamma_{\nu-1}$; $\lim\limits_{\nu \to \infty} \gamma_\nu = \lambda^2$ e quindi: $-\sqrt{\gamma_\nu} \leq -\sqrt{\gamma_{\nu+1}}$; $\lim\limits_{\nu \to \infty} -\sqrt{\gamma_\nu} = \lambda$.

Si ottengono così due successioni, $\{\lambda_1^{(\nu)}\}$ *e* $\{-\sqrt{\gamma_\nu}\}$, che approssimano, rispettivamente, per eccesso e per difetto il valore λ cercato. Si osservi che detto metodo è valido anche nel caso che $\lambda = 0$.

(10) Cfr. [6].

(11) Cfr. [5], [8].

(12) Con $\sum\limits_{k=1}^{\infty}{}^{(\lambda^2)} \mu_k^{2n}$ intendiamo: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k^{2n} - \lambda^{2n}$.

(13) $((P_\nu T P_\nu)^2 u , u) = (P_\nu T P_\nu T P_\nu u , u) = (P_\nu T P_\nu u , T P_\nu u) \leq (T P_\nu u , T P_\nu u) = (P_\nu T^2 P_\nu u , u)$.

Volendo calcolare, invece, il numero seguente:

$$\lambda = \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0}} \frac{(Tx\,,\,x)}{\|\,x\,\|^2}$$

basta considerare la soluzione di (3.1) $\lambda_\nu^{(\nu)}$ e prendere $\sigma^{(\nu)} = [\mathscr{I}^n(T^2) - \mathscr{I}^n((P_\nu T P_\nu)^2) + (\lambda_\nu^{(\nu)})^{2n}]^{1/n}$. Si ha: $\lambda_\nu^{(\nu)} \leq \lambda_{\nu+1}^{(\nu+1)}$; $\lim_{\nu \to \infty} \lambda_\nu^{(\nu)} = \lambda$; $\sqrt{\gamma_\nu} \geq \sqrt{\gamma_{\nu-1}}$; $\lim_{\nu \to \infty} \sqrt{\gamma_\nu} = \lambda$.

Se $H = L^2(X\,,\,\mu)$ e T è un operatore integrale, diciamo:

$$Tu(z) = \int_X T(z\,,\,w)\,u(w)\,d\mu_w$$

allora si vede che (14):

$$\mathscr{I}^n(T^2) = \int_X \int_X |\,T_n(z\,,\,w)\,|^2\,d\mu_z\,d\mu_w$$

essendo $T_n(z\,,\,w)$ l'n-esimo nucleo iterato di $T(z\,,\,w)$.

Il metodo descritto, quindi, permette il calcolo esplicito di λ, nel caso che T sia un operatore integrale, del quale sia noto il nucleo (e che, naturalmente, verifichi le ipotesi suddette).

Sia ora $u(z) = w(z) + v(z)$, con $w(z)$ e $v(z)$ dati dalla (2.1). Si ha:

$$\|\,w\,\|^2_{H\,(\Omega)} + \left\|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_\Omega \left|\frac{1}{2\pi}\int_\Omega \psi(\zeta)\,D_z^\alpha \log|\,z-\zeta\,|\,d\tau_\zeta\right|^2 d\tau_z +$$

$$+ \int_\Sigma \left|\frac{1}{2\pi}\int_\Omega \psi(\zeta)\,\frac{\partial}{\partial \nu_z}\log|\,z-\zeta\,|\,d\tau_\zeta\right|^2 ds_z =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_\Omega \overline{\psi(w)}\int_\Omega \psi(\zeta)\Big[\sum_{|\alpha|\leq 1}\int_\Omega D_z^\alpha \log|\,z-\zeta\,|\,D_z^\alpha \log|\,z-w\,|\,d\tau_z +$$

$$+ \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial \nu_z}\log|\,z-\zeta\,|\,\frac{\partial}{\partial \nu_z}\log|\,z-w\,|\,ds_z\Big]\,d\tau_\zeta\,d\tau_w = (\mathscr{K}_1\psi\,,\,\psi) \leq C_{10}\,\|\,\psi\,\|^2_{L^2(\Sigma)}$$

con ovvio significato di $(\mathscr{K}_1\psi\,,\,\psi)$ e dove:

$$C_{10} = \sup_{\substack{\psi \in L^2(\Omega) \\ \psi \neq 0}} \frac{(\mathscr{K}_1\psi\,,\,\psi)}{\|\,\psi\,\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

(14) Cfr. [5], [8].

È facile verificare che si può applicare il metodo descritto precedentemente; si ottengono così due successioni, $\{\lambda_{10}^{(\nu)}\}$ e $\lambda_{10}^{(\nu)}$, tali che:

$$\lambda_{10}^{(\nu)} \leq \lambda_{10}^{(\nu+1)} \leq C_{10} \leq \sqrt{\gamma_{10}^{(\nu+1)}} \leq \sqrt{\gamma_{10}^{(\nu)}}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \lambda_{10}^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} \sqrt{\gamma_{10}^{(\nu)}} = C_{10} .$$

Queste successioni permettono dunque il calcolo esplicito di C_{10}.

Analogamente:

$$\| v \|^2_{H^{1,2}(\Omega)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\|^2_{L^2(\Sigma)} = \sum_{|\alpha|\leq 1} \int_\Omega \left| \int_\Sigma \varphi(\zeta)\, D_z^\alpha \log | z - \zeta |\, ds_\zeta \right|^2 d\tau_z +$$

$$+ \int_\Sigma \left| \int_\Sigma \varphi(\zeta) \frac{\partial \log}{\partial \nu_z} | z - \zeta |\, ds_\zeta \right|^2 ds_z =$$

$$= \int_\Sigma \overline{\varphi(w)} \int_\Sigma \varphi(\zeta) \left[\sum_{|\alpha|\leq 1} \int_\Omega D_z^\alpha \log | z - \zeta |\, D_z^\alpha \log | z - w\, d\tau_z + \right.$$

$$\left. + \int_\Sigma \frac{\partial \log}{\partial \nu_z} | z - \zeta | \frac{\partial \log}{\partial \nu_z} | z - w |\, ds_z \right] ds_\zeta\, ds_w =$$

$$= (\mathscr{K}_2 \varphi , \varphi) \leq C_{11} \| \varphi \|^2_{L^2(\Sigma)}$$

con ovvio significato di $(\mathscr{K}_2 \varphi , \varphi)$ e dove

$$C_{11} = \sup_{\substack{\varphi\in L^2(\Sigma)\\ \varphi\neq 0}} \frac{(\mathscr{K}_2\varphi , \varphi)}{\| \varphi \|^2_{L^2(\Sigma)}}$$

Si ottengono quindi due successioni tali che:

$$\lambda_{11}^{(\nu)} \leq \lambda_{11}^{(\nu+1)} \leq C_{11} \leq \sqrt{\gamma_{11}^{(\nu+1)}} \leq \sqrt{\gamma_{11}^{(\nu)}}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \lambda_{11}^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} \sqrt{\gamma_{11}^{(\nu)}} = C_{11} .$$

In definitiva si ha:

$$(3.2) \qquad ||| u |||^2_{\mathscr{A}^2} \leq 2 \max \{(C_{10} + 1);\ C_{11}\} (\| \psi \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \varphi \|^2_{L^2(\Sigma)})$$

essendo C_{10} e C_{11} costanti calcolabili esplicitamente.

Supponiamo ora che il sistema (2.3) abbia indice $\chi_{\mathcal{T}} \leq 0$. Allora il sistema trasposto, che scriviamo così:

$$(3.3) \qquad \begin{cases} \psi + \tilde{\mathcal{T}}_1 \psi + \tilde{\mathcal{T}}_2 \varphi = f \\ S^* \varphi + \tilde{\mathcal{T}}_3 \psi = g \end{cases}$$

ha indice $\chi_{\mathcal{T}^*} \geq 0$.

Consideriamo l'operatore $\bar{\mathcal{T}} : \dfrac{L^2(\Omega) \times L^2(\Sigma)}{A(\mathcal{T})} \to A(\mathcal{T}^*)$, che associa alla classe di equivalenza individuata dal vettore $\{\psi, \varphi\}$ ($\psi \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in L^2(\Sigma)$), il vettore seguente: $\mathcal{T}\{\psi, \varphi\} = \{\psi + \mathcal{T}_1 \psi + \mathcal{T}_2 \varphi, \; S\varphi + \mathcal{T}_3 \psi\}$. Poiché: $\|\bar{\mathcal{T}}^{-1}\| = \|(\bar{\mathcal{T}}^{-1})^*\| = \|(\bar{\mathcal{T}}^*)^{-1}\|$, la costante che compare nella maggiorazione relativa all'equazione (2.3) è la stessa di quella relativa all'equazione (3.3).

Poiché $\chi_{\mathcal{T}^*} \geq 0$, il sistema (3.3) è equivalente al seguente:

$$(3.4) \qquad \begin{cases} \psi + \tilde{\mathcal{T}}_1 \psi + \tilde{\mathcal{T}}_2 \varphi = f \\ \varphi + S' \tilde{\mathcal{T}}_3 \psi + \tilde{\mathcal{T}}_4 \varphi = S' g, \end{cases}$$

essendo S′ l'operatore riducente S* dato dalla parte dominante di S. Vogliamo calcolare la costante, che sappiamo essere positiva, che interviene nella seguente maggiorazione:

$$(3.5) \qquad \inf_{(\psi_0, \varphi_0) \in A_0} \|\{\psi, \varphi\} + \{\psi_0, \varphi_0\}\|_2^2 \leq C_{12} \left[\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|S' g\|^2_{L^2(\Sigma)}\right],$$

essendo A_0 l'autoinsieme di (3.4) ossia di (3.3). Sia P la proiezione di $L^2(\Omega) \times L^2(\Sigma) \to A_0$ e sia $Q = I - P$ [15]. Si ha [16]:

$$\inf_{(\psi_0, \varphi_0) \in A_0} \|\{\psi, \varphi\} + \{\psi_0, \varphi_0\}\|_2^2 = \|Q\{\psi, \varphi\}\|_2^2 .$$

Poniamo: $\phi = \{\psi, \varphi\}$; $T\phi = \{\tilde{\mathcal{T}}_1 \psi + \tilde{\mathcal{T}}_2 \varphi, \; S' \tilde{\mathcal{T}}_3 \psi + \tilde{\mathcal{T}}_4 \varphi\}$.

La (3.5) si riscrive così: $\|Q\phi\|_2^2 \leq C_{12} (\|\phi + T\phi\|_2^2)$.

Se $\phi' = \{\psi', \varphi'\} \in L^2(\Omega) \times L^2(\Sigma)$, con (ϕ, ϕ') indichiamo il prodotto scalare in $L^2(\Omega) \times L^2(\Sigma)$, ossia: $\displaystyle\int_\Omega \psi \bar{\psi}' \, d\tau + \int_\Sigma \varphi \bar{\varphi}' \, ds$.

Allora si ha:

$$\|T\phi + \phi\|_2^2 = (K\phi, \phi) + \|\phi\|_2^2$$

(15) Ovviamente se $A_0 = \{0\}$, allora $P = 0$, $Q = I$.
(16) Cfr., ad esempio, [9], p. 221.

essendo $K = T^* T + T^* + T$. D'altra parte $T\phi + \phi = TQ\phi + Q\phi$ e quindi:

$$\| T\phi + \phi \|_2^2 = (KQ\phi , Q\phi) + \| Q\phi \|_2^2 = (QKQ\phi , \phi) + \| Q\phi \|_2^2 .$$

Dunque risulta:

$$\frac{1}{C_{12}} = \inf_{\substack{\phi \in L^2(\Omega)\times L^2(\Sigma) \\ Q\phi \neq 0}} \frac{(QK\phi , \phi)}{\| Q\phi \|_2^2} + 1$$

Si tratta quindi di determinare:

$$\lambda = \inf_{\substack{\phi \in L^2(\Omega)\times L^2(\Sigma) \\ Q\phi \neq 0}} \frac{(QKQ\phi , \phi)}{\| Q\phi \|_2^2} .$$

Non è difficile dimostrare che:

$$\lambda = \inf_{\substack{\phi \in L^2(\Omega)\times L^2(\Sigma) \\ \phi \neq 0}} \frac{(QKQ\phi , \phi)}{\| \phi \|_2^2} .$$

Osserviamo che, per quanto detto nel § 2, K^2 e $\mathcal{T}^n$ e quindi anche $(QKQ)^2 \in \mathcal{T}^n$. È ovvio inoltre che $(QKQ)^* = QKQ$: possiamo quindi applicare il metodo sopra descritto.

Si possono costruire così, due successioni tali che:

$$-\sqrt{\gamma_{12}^{(\nu)}} \leq -\sqrt{\gamma_{12}^{(\nu+1)}} \leq \lambda \leq \lambda_{12}^{(\nu+1)} \leq \lambda_{12}^{(\nu)}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \lambda_{12}^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} -\sqrt{\gamma_{12}^{(\nu)}} = \lambda$$

ossia tali che:

$$\frac{1}{1+\lambda_{12}^{(\nu)}} \leq \frac{1}{1+\lambda_{12}^{(\nu+1)}} \leq C_{12} \leq \frac{1}{1-\sqrt{\gamma_{12}^{(\nu+1)}}} \leq \frac{1}{1-\sqrt{\gamma_{12}^{(\nu)}}}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{1+\lambda_{12}^{(\nu)}} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{1-\sqrt{\gamma_{12}^{(\nu)}}} = C_{12} .$$

Si badi, però, che le ultime disuguaglianze scritte valgono non appena $1-\sqrt{\gamma_{12}^{(\nu)}} > 0$.

Osserviamo esplicitamente che per calcolare queste successioni bisogna conoscere K e Q; ma è chiaro che l'espressione di K si ricava da quella degli operatori L e B dati dal problema, mentre per la conoscenza di $Q = I - P$, deve essere noto $A(\mathcal{T}^*)$, ossia (cfr. Teorema 5 di [2]) le condizioni di compatibilità del problema stesso.

Consideriamo ora: $\| S' g \|^2_{L^2(\Sigma)} = \| \rho g + \sigma S_0 g \|^2_{L^2(\Sigma)}$. Si ha:

$$\| S' g \|^2_{L^2(\Sigma)} \leq \max_{\Sigma} | \rho |^2 \| g \|^2_{L^2(\Sigma)} + \max_{\Sigma} | \sigma |^2 \| S_0 g \|^2_{L^2(\Sigma)} .$$

D'altra parte si può scrivere (17): $\| S_0 g \|^2_{L^2(\zeta)} = (F \bar{g} , \bar{g}) + \| g \|^2_{L^2(\Sigma)}$ essendo F un operatore compatto da $L^2(\Sigma)$ in $L^2(\Sigma)$. Poiché $(F g , g)$ è un numero reale per ogni g in $L^2(\Sigma)$, si ha $F = F^*$.

Inoltre:

$$\| S_0 g \|^2_{L^2(\Sigma)} \leq \| S_0 \|^2 \| g \|^2_{L^2(\Sigma)} .$$

Possiamo scrivere:

$$\| S_0 g \|^2_{L^2(\Sigma)} = \sup_{\substack{g \in L^2(\Sigma) \\ g \neq 0}} \frac{(F \bar{g} , \bar{g})}{\| g \|^2_{L^2(\Sigma)}} + 1 .$$

Ancora una volta si possono costruire due successioni tali che

$$\lambda_{13}^{(\nu)} \leq \lambda_{13}^{(\nu+1)} \leq \| S_0 \|^2 \leq \sqrt{\gamma_{13}^{(\nu+1)}} \leq \sqrt{\gamma_{13}^{(\nu)}}$$

$$\lim_{\nu \to \infty} \lambda_{13}^{(\nu)} = \lim_{\nu \to \infty} \sqrt{\gamma_{13}^{(\nu)}} = \| S_0 \|^2 .$$

Posto $C_{13} = \max_{\Sigma} | \rho |^2 + \| S_0 \|^2 \max_{\Sigma} | \sigma |^2$, si ha:

$$\| S' g \|^2_{L^2(\Sigma)} \leq C_{13} \| g \|^2_{L^2(\Sigma)} .$$

In definitiva, se $\chi_{\mathcal{T}} \leq 0$, tenendo presenti (3.2), (3.5), per le soluzioni di (2.3) si ha:

$$\inf_{u_0 \in \mathcal{N}_0} \| \, | u + u_0 | \, \|^2_{\mathcal{A}^2} \leq 2 \max \{ (C_{10} + 1) \, ; \, C_{11} \} \cdot C_{12} \cdot \max \{ 1 \, ; \, C_{13} \}$$

$$[\| f \|^2_{L^2(\Omega)} + \| g \|^2_{L^2(\Sigma)}] .$$

Sia ora $\chi_{\mathcal{T}} > 0$. Allora $\chi_{\mathcal{T}^*} < 0$. Per un teorema di I.N. Vekua (18), il sistema (3.3) è equivalente al seguente (19):

$$\begin{cases} \psi + \tilde{\mathcal{T}}_1 \psi + \tilde{\mathcal{T}}_2 S' \gamma = f \\ \gamma + \tilde{\mathcal{T}}_3 \psi + \tilde{\mathcal{T}}'_4 \gamma = g \end{cases} .$$

essendo S' la parte dominante di S.

(17) Cfr. [4], p. 247.
(18) Cfr. [12], p. 149.
(19) Si intende: $\gamma + \tilde{\mathcal{T}}_4^1 \gamma = S' S^* \gamma$. L'equivalenza è da intendersi nel senso specificato in loc. cit. in (18).

In maniera del tutto analoga a quanto fatto per il calcolo di C_{12}, si può calcolare la costante C_{14} che interviene nella seguente maggiorazione:

$$\| Q \{\psi , \gamma\} \|_2^2 \leq C_{14} (\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2(\Sigma)}) \,.$$

Inoltre la soluzione di (3.3) è data da: $(\psi , \varphi) = (\psi , S' \gamma)$.
D'altra parte: $\| \varphi \|^2_{L^2(\Sigma)} \leq C_1 \; \| \gamma \|^2_{L^2(\Sigma)}$.
Nel caso $\chi_{\mathcal{T}} > 0$, si ha quindi:

$$\inf_{u_0 \in V_0} \| \, | u + u_0 | \, \|^2_{\mathcal{S}^2} \leq 2 \max \{(C_{10} + 1); C_{11}\} \cdot C_{14} \cdot \max \{1 \,; C_{13}\}$$
$$(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2(\Sigma)}] \,.$$

Bibliografia

[1] A. Cialdea (1986) - *L'equazione* $\Delta_2 u + a_{10}(x , y) \dfrac{\partial u}{\partial x} + a_{01}(x , y) \dfrac{\partial u}{\partial y} + a_{00}(x , y) u = F(x , y)$. *Teorema di esistenza per un generale problema al contorno.* « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », 1986.

[2] A. Cialdea (1986) - *L equazione* $\Delta_2 u + a_{10}(x , y) \dfrac{\partial u}{\partial x} + a_{01}(x , y) \dfrac{\partial u}{\partial y} + a_{00}(x , y) u = F(x , y)$. *Calcolo dell'indice dei problemi al contorno e soluzioni deboli,* « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », 1986.

[3] G. Fichera (1958) - *Una introduzione alla teoria delle equazioni integrali singolari,* « Rend. di Matem. », V, *17,* 82-191.

[4] G. Fichera (1963) - *Operatori di Riesz-Fredholm, operatori riducibili, equazioni integrali singolari, applicazioni,* « Pubbl. dell'Ist. Matem. dell'Univ. di Roma ».

[5] G. Fichera (1965) - *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems,* Springer, « Lecture Notes », s. VIII, *40.*

[6] G. Fichera (1968) - *Lezioni sulla teoria spettrale degli operatori,* « Pubbl. dell'Ist. Matem. dell'Univ. di Roma ».

[7] G. Fichera (1970) - *Approximation of analytic functions by rational functions with prescribed poles,* « Comm. on Pure and Appl. Math. », *23,* 359-370.

[8] G. Fichera (1973) - *Abstract and numerical aspects of eigenvalue theory,* Univ. of Alberta, Edmonton.

[9] G. Fichera e L. De Vito (1971) - *Funzioni analitche di una variabile complessa,* Veschi, III ediz., Roma.

[10] E. Goursat (1915) - *Traité d'Analyse,* Tome III, Gauthier-Villars, Paris.

[11] C. Miranda (1970) - *Partial differential equations of elliptic type,* Springer.

[12] N. Muskhelishvili (1972) - *Singular integral equations,* Groningen Noordhoff.

[13] M. Picone (1940) - *Appunti di Analisi Superiore,* « Rondinella », Napoli.