ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

LUCILLA BASSOTTI RIZZA

**Sottospazi invarianti per operatori lineari
T-invarianti rispetto ad un gruppo di omeomorfismi**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 80 (1986), n.6, p. 373–383.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1986_8_80_6_373_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Sottospazi invarianti per operatori lineari T-invarianti rispetto ad un gruppo di omeomorfismi* (*). Nota di LUCILLA BASSOTTI RIZZA (**), presentata (***) dal Socio G. FICHERA.

SUMMARY. — Theory of T-invariant linear operators which was considered for a group of congruences [2], [3] is now extended to a group of homeomorphisms. An analysis is carried out in order to establish to what extent the main results of the previous theory still hold under the actual very general assumptions.

Sia Ω un campo limitato di $\mathbf{R}^n$, $G \equiv \{\gamma\}$ un gruppo di congruenze di $\mathbf{R}^n$ che mutano Ω in sé, $W_m(\Omega)$ lo spazio delle funzioni complesse ad m componenti definite in Ω , $\{T_\gamma\}$ una rappresentazione lineare di G di ordine m .

In miei precedenti lavori ho introdotto lo spazio degli operatori lineari definiti in un sottospazio $U(\Omega)$ di $W_m(\Omega)$, a valori in $W_m(\Omega)$, « T-invarianti rispetto a G ». Ho inoltre costruito decomposizioni di $U(\Omega)$ in somma diretta di sottospazi, tutti invarianti per una classe di operatori lineari T-invarianti rispetto a G . Le decomposizioni di $U(\Omega)$ ottenute risultavano strettamente connesse alla struttura di G ed erano state ottenute a partire da un gruppo di trasformazioni lineari di $W_m(\Omega)$ isomorfo a G e dipendente da $\{T_\gamma\}$.

Un'analisi del procedimento che ha condotto alle decomposizioni di $U(\Omega)$ e che estende un metodo introdotto da G.F. Smith (cfr. [6]), ha mostrato che, ai fini delle decomposizioni, il fatto che gli elementi di G fossero congruenze non era essenziale. È nata così l'idea di estendere i risultati ottenuti, considerando in luogo di un gruppo di congruenze, un gruppo di trasformazioni (omeomorfismi) di Ω su Ω .

Questo lavoro segue le linee di [2], al quale si rimanda per le premesse e le dimostrazioni di alcuni teoremi. Naturalmente alcuni dei risultati di [2] possono estendersi solo parzialmente; mi riferisco in particolare ai teoremi di caratterizzazione degli operatori differenziali T-invarianti rispetto a G . Per questi ultimi e, più in generale, per gli operatori pseudo-differenziali, viene qui dato un teorema di caratterizzazione, nel caso di un gruppo G di trasformazioni lineari di Ω .

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del progetto nazionale di ricerca « Analisi numerica e matematica computazionale » nell'anno 1985-86.

(**) Dipartimento di Matematica, Università di Parma, Italia.

(***) Nella seduta del 20 giugno 1986.

Sono stati messi in luce, in questo lavoro, i punti essenziali della estensione. Altri risultati si ottengono senza difficoltà, come ad esempio gli analoghi dei Teoremi 12.II e 12.III di [3].

1. Siano $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ punti dello spazio euclideo $\mathbf{R}^n$, Ω un campo (aperto connesso) limitato di $\mathbf{R}^n$, $x \cdot y$ l'usuale prodotto scalare di x e y in $\mathbf{R}^n$.

Sia f un omeomorfismo di Ω su Ω' ($\Omega' \subset \mathbf{R}^n$).

Dirò che f è un omeomorfismo di Ω su Ω' di classe p ($p \geq 1$) se f è anche una funzione di classe p in Ω e se il determinante jacobiano di f , che indicherò con $J_f(x)$, è diverso da zero in Ω : ciò implica che Ω' è un campo e che f^{-1} è di classe p in Ω' .

Chiamerò *trasformazione di Ω* un omeomorfismo di Ω su Ω e dirò *trasformazione di Ω di classe p* ($p \geq 1$), un omeomorfismo di Ω su Ω di classe p .

In questo lavoro indicherò con $G \equiv \{g\}$ un gruppo di trasformazioni di Ω contenente almeno due elementi.

Assegnato un intero $m \geq 1$, sia S^m lo spazio lineare complesso di dimensione (complessa) m . È ben noto che ogni gruppo, e in particolare G , si può rappresentare con trasformazioni lineari invertibili di S^m su S^m (rappresentazioni lineari di G di ordine m) ⁽¹⁾.

Nel presente lavoro intenderò fissato, oltre il campo Ω e il gruppo G , una rappresentazione lineare $\{T_g\}$ di G di ordine m e una base B in S^m . La rappresentazione matriciale determinata da $\{T_g\}$ e da B verrà indicata con $\{\tau(g)\}$: essa sarà detta unitaria (ortogonale) se costituita da matrici unitarie (ortogonali).

Convieni, per quanto dirò in seguito, richiamare il seguente teorema di Schur:

1.I. *Ogni rappresentazione lineare di un gruppo finito G ammette una rappresentazione matriciale unitaria.*

2. Si considerino ora le trasformazioni lineari di $\mathbf{R}^n$

$$(2.1) \quad x' = \alpha x$$

con α matrice reale di ordine n non degenera: esse lasciano fissa l'origine 0 di $\mathbf{R}^n$ e si chiamano anche centro-affinità. Una trasformazione lineare di $\mathbf{R}^n$ si può ovviamente identificare con la matrice α che la rappresenta.

Un gruppo di trasformazioni lineari di Ω è un gruppo $G \equiv \{\rho\}$ di trasformazioni lineari di $\mathbf{R}^n$ (matrici) che mutano Ω in sé; le matrici ρ hanno tutte determinante di modulo uno, in quanto conservano la misura di Ω . Se le matrici di G sono tutte ortogonali, G si dice un gruppo di congruenze di Ω .

(1) Per gli elementi di teoria delle rappresentazioni dei gruppi si rimanda ai trattati classici, ad esempio [6].

2.I. Se $G \equiv \{\rho_i\}$ ($i = 1, \dots, N$) è un gruppo finito di trasformazioni lineari di Ω , esiste una trasformazione lineare α di $\mathbf{R}^n$ tale che il gruppo $G' \equiv \{\gamma_i\}$ di elementi

$$(2.2) \quad \gamma_i = \alpha \rho_i \alpha^{-1} \quad (i = 1, \dots, N)$$

sia un gruppo di congruenze del campo Ω' , trasformato di Ω mediante α .

Questo risultato è sostanzialmente contenuto nel Teorema 1.I, la cui dimostrazione (cfr. [6]) va ovviamente solo modificata in qualche punto.

3. Si consideri lo spazio $W_m(\Omega)$ delle funzioni definite in Ω , a valori in S^m : siano $v^j(x)$ le componenti, nella base B , di un vettore $v(x)$, con $v \in W_m(\Omega)$.

Indicherò con $\mathcal{T}(G, T) \equiv \{\Gamma\}$ un particolare gruppo di trasformazioni lineari invertibili di $W_m(\Omega)$ su $W_m(\Omega)$, legate alle trasformazioni g di G e dipendenti dalla rappresentazione lineare $\{T_g\}$ di ordine m scelta. Precisamente, fissata una trasformazione g di G , Γ è la trasformazione lineare di $W_m(\Omega)$ su $W_m(\Omega)$ così definita:

$$(3.1) \quad (\Gamma v)(x) = T_g v(g^{-1}x).$$

Le componenti di $(\Gamma v)(x)$ nella base B sono date (adottando la convenzione sommatorea) da:

$$(3.2) \quad (\Gamma v)^j(x) = \tau_k^j(g) v^k(g^{-1}x).$$

La trasformazione lineare Γ definita dalle (3.1) verrà detta *associata* a g (e relativa a $\{T_g\}$).

La famiglia $\mathcal{T}(G, T)$ delle trasformazioni associate alle matrici di G è un gruppo rispetto alla composizione, perché la trasformazione associata a gg' è la composizione $\Gamma\Gamma'$ delle trasformazioni associate a g e g' ; l'inversa Γ^{-1} di Γ è la trasformazione associata a g^{-1} .

$\mathcal{T}(G, T)$ è una rappresentazione di G per mezzo di trasformazioni di $W_m(\Omega)$: gruppi di questo tipo sono già stati considerati nella letteratura per altri scopi (cfr. [8], p. 26).

Sussiste il Teorema

3.I. Il gruppo $\mathcal{T}(G, T)$ è isomorfo a G ⁽²⁾.

Il gruppo $\mathcal{T}(G, T)$ genera l'algebra complessa $\mathcal{A}(G, T)$ di tutte le combinazioni lineari a coefficienti complessi di un numero finito di trasformazioni di $\mathcal{T}(G, T)$. Gruppi $\mathcal{T}(G, T)$ e $\mathcal{T}'(G, T')$ corrispondenti a rappresentazioni lineari distinte di G possono generare la stessa algebra. Ciò accade, in particolare, nel caso scalare ($m = 1$).

(2) Dimostrazione analoga a quella del Teorema 2.I di [2]. Se G è un gruppo di congruenze, il gruppo $\mathcal{T}(G, T)$ è quello considerato in [2], n. 2.

Se $m = 1$, indicherò con $\mathcal{T}_0(G)$ il gruppo delle trasformazioni

$$(3.3) \quad (\Gamma v)(x) = v(g^{-1}x);$$

con $\mathcal{A}_0(G)$ l'algebra generata da $\mathcal{T}_0(G)$. Si verifica facilmente che

3.II. Se $m = 1$, per ogni rappresentazione lineare $\{\Gamma_g\}$ di G risulta $\mathcal{A}(G, T) \equiv \mathcal{A}_0(G)$.

4. Il concetto di operatore lineare T -invariante rispetto ad un gruppo di congruenze, da me dato in precedenti lavori (si confronti [1] e [2]) si può ora estendere.

Sia $V(\Omega)$ un sottospazio vettoriale di $W_m(\Omega)$. Dirò che $V(\Omega)$ è T -invariante rispetto a G se, per ogni $\Gamma \in \mathcal{T}(G, T)$ e per ogni $v \in V(\Omega)$ risulta $\Gamma v \in V(\Omega)$. Si verifica facilmente che

4.I. Se le trasformazioni di G sono di classe p , con $p \geq 1$, i sottospazi $C^h(\Omega)$, $C_0^h(\Omega)$ di $W_m(\Omega)$, per $h = 0, 1, \dots, p$, sono T -invarianti rispetto a G , comunque si scelga $\{\Gamma_g\}$.

Sia $V(\Omega)$ un sottospazio di $W_m(\Omega)$ T -invariante rispetto a G . Un operatore lineare L definito in $V(\Omega)$, a valori in $W_m(\Omega)$, si dice T -invariante rispetto a G se per ogni $\Gamma \in \mathcal{T}(G, T)$ riesce

$$(4.1) \quad \Gamma L = L \Gamma.$$

La (4.1) va intesa nel senso che, per ogni $v \in V(\Omega)$, riesce $\Gamma(Lv) = L(\Gamma v)$.

Il gruppo G , la rappresentazione lineare $\{\Gamma_g\}$ di G e lo spazio $V(\Omega)$ determinano lo spazio vettoriale complesso $\mathcal{L}(G, T)$ degli operatori lineari definiti in $V(\Omega)$, a valori in $W_m(\Omega)$, T -invarianti rispetto a G . Sussiste il seguente Teorema:

4.II. Condizione necessaria e sufficiente perchè un operatore lineare L definito in $V(\Omega)$, a valori in $W_m(\Omega)$, appartenga a $\mathcal{L}(G, T)$ è che esso sia permutabile con tutti gli operatori dell'algebra $\mathcal{A}(G, T)$ determinata da $\mathcal{T}(G, T)$.

Nel caso scalare, fissato un sottospazio $V(\Omega)$ di $W_1(\Omega)$ con la proprietà che, se $v(x) \in V(\Omega)$ e $g \in G$, allora $v(gx) \in V(\Omega)$, si consideri lo spazio $\mathcal{L}_0(G)$ degli operatori lineari definiti in $V(\Omega)$ e permutabili con tutte le trasformazioni di $\mathcal{T}_0(G)$. Dai Teoremi 3.II e 4.II segue che:

4.III. Comunque si fissi una rappresentazione $\{\Gamma_g\}$ di ordine uno, lo spazio $\mathcal{L}(G, T)$ coincide con $\mathcal{L}_0(G)$.

5. Sia $U(\Omega)$ un sottospazio di $W_m(\Omega)$ T -invariante rispetto a G . Si vuole decomporre $U(\Omega)$ in somma diretta di sottospazi $U_k(\Omega)$, ciascuno dei quali sia sottospazio invariante per tutti gli operatori lineari, definiti in $U(\Omega)$

e a valori in $U(\Omega)$, T -invarianti rispetto a G . Si vogliono inoltre costruire gli operatori di proiezione di $U(\Omega)$ sui singoli sottospazi $U_k(\Omega)$.

Per risolvere detto problema, basta costruire un sistema finito $P_1, \dots, P_t$ di proiettori (cioè operatori idempotenti) di $\mathcal{A}(G, T)$ verificanti le condizioni:

$$(5.1) \quad \sum_{j=1}^t P_j = I, \quad P_k P_j = 0 \quad \text{se } k \neq j.$$

Posto infatti $U_k(\Omega) = P_k[U(\Omega)]$, risulta

$$(5.2) \quad U(\Omega) = U_1(\Omega) \oplus U_2(\Omega) \oplus \dots \oplus U_t(\Omega),$$

con $U_k(\Omega) \subset U(\Omega)$. Dal Teorema 4.II discende allora

5.I. *Se L è un operatore lineare di $U(\Omega)$ in $U(\Omega)$, T -invariante rispetto a G , ogni sottospazio $U_k(\Omega)$ è invariante rispetto a L .*

Il problema posto all'inizio di questo numero è così ricondotto alla costruzione di un sistema finito di proiettori di $\mathcal{A}(G, T)$ verificanti le (5.1); detta costruzione si può ottenere, *nel caso di un gruppo G finito*, generalizzando un procedimento dovuto a G.F. Smith: detto procedimento è già stato da me generalizzato e applicato nel caso di un gruppo G di congruenze⁽³⁾.

Sia $G = \{g_i\}$ ($i = 1, \dots, N$) un gruppo finito di trasformazioni di Ω ; sia q il numero delle classi di equivalenza di G e

$$(5.3) \quad \{\omega^{(1)}(g_i)\}, \{\omega^{(2)}(g_i)\}, \dots, \{\omega^{(q)}(g_i)\}$$

un sistema di q rappresentazioni matriciali unitarie irriducibili di G , a due a due non equivalenti. Indico con d_h l'ordine delle matrici $\omega^{(h)}(g_i)$, con $\omega_{kk}^{(h)}(g_i)$ l'elemento di $\omega^{(h)}(g_i)$ di posto k, k . Da note proprietà del sistema (5.3) segue $d_1^2 + \dots + d_q^2 = N$. Posto

$$(5.4) \quad M = d_1 + \dots + d_q,$$

risulta $M \leq N$, il segno uguale sussistendo se e solo se G è un gruppo abeliano. Il numero M è univocamente determinato da G .

Per ogni coppia di indici h, k con $h = 1, \dots, q, k = 1, \dots, d_h$, si consideri l'operatore lineare di $\mathcal{A}(G, T)$ così definito

$$(5.5) \quad P_{hk} = N^{-1} d_h \sum_{i=1}^N \omega_{kk}^{(h)}(g_i) \Gamma_i.$$

(3) Si confronti [7], [1], [2] e [3]. Le dimostrazioni dei Teoremi di questo numero sono analoghe a quelle del n. 4 di [2] e vengono quindi omesse. Per un'ampia esposizione del metodo di Smith e per le relative applicazioni al calcolo degli autovalori cfr. [4].

Sussiste il seguente Teorema:

5.II. *Gli M operatori lineari P_{hk} definiti dalle (5.5) costituiscono un sistema di proiettori verificanti le (5.1).*

Nel caso di un gruppo abeliano, risulta $q = M = N$ e tutte le rappresentazioni (5.3) sono di ordine uno. La decomposizione di $U(\Omega)$ in somma diretta di N sottospazi per mezzo dei proiettori P_{hk} è univocamente determinata da G e da $\{T_{g_i}\}$ ed è massimale.

Se G non è abeliano, risulta $q < M < N$. La decomposizione di $U(\Omega)$ in somma diretta di M sottospazi per mezzo dei proiettori P_{hk} , dipende, oltre che da G e $\{T_{g_i}\}$, dal sistema di rappresentazioni (5.3); essa è però massimale, nel senso precisato dal seguente Teorema:

5.III. *Fissato comunque P_{hk} fra i proiettori definiti da (5.5), se P'_{hk} e P''_{hk} sono proiettori di $\mathcal{A}(G, T)$ tali che*

$$(5.6) \quad P_{hk} = P'_{hk} + P''_{hk} \quad , \quad P'_{hk} P''_{hk} = P''_{hk} P'_{hk} = 0 \quad ,$$

allora $P'_{hk} = P_{hk}$ oppure $P''_{hk} = P_{hk}$.

6. Questo numero è dedicato ad una proprietà di ortogonalità dei proiettori considerati nel numero precedente.

Si supponga introdotto in $U(\Omega)$ un prodotto scalare $((u, v))$ che goda della seguente proprietà: per ogni $\Gamma_i \in \mathcal{S}(G, T)$ e per ogni coppia u, v di elementi di $U(\Omega)$ riesca

$$(6.1) \quad ((\Gamma_i u, \Gamma_i v)) = ((u, v)) \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad .$$

Sia $\mathcal{H}(\Omega)$ lo spazio ottenuto per completamento funzionale di $U(\Omega)$ rispetto al prodotto scalare $((u, v))$. Dalle (6.1) segue che le trasformazioni di $\mathcal{A}(G, T)$, riguardate come trasformazioni di $\mathcal{H}(\Omega)$ in $\mathcal{H}(\Omega)$, sono continue. Detta Γ_i^* la trasformazione aggiunta di Γ_i , dalle (6.1) segue inoltre $\Gamma_i^* \equiv \Gamma_i^{-1}$. Sussiste il Teorema:

6.1. *I proiettori P_{hk} definiti dalle (5.5), riguardati come operatori di $\mathcal{H}(\Omega)$, sono operatori di proiezione ortogonale. Pertanto i sottospazi $U_{hk}(\Omega)$ sono a due a due ortogonali ⁽⁴⁾.*

Sia ora G un gruppo di trasformazioni di classe uno, tali che

$$(6.2) \quad |J_{g_i}(x)| \equiv 1 \quad \text{in } \Omega \quad , \quad (i = 1, \dots, N) \quad .$$

Si noti che ogni gruppo di trasformazioni lineari di Ω verifica le condizioni (6.2).

(4) La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 5.1 di [2].

Si scelga in S^m la base B in modo che $\{T_{g_i}\}$ si rappresenti, in detta base, con matrici unitarie $\{\tau(g_i)\}$. In S^m si introduca il seguente prodotto scalare

$$(6.3) \quad (w, z) = \sum_{h=1}^m w^h z^h$$

ove w^h e z^h sono le componenti h -esime di w e z nella base B .

Si consideri il sottospazio $C_0^0(\Omega)$ di $W_m(\Omega)$ e in esso il prodotto scalare

$$(6.4) \quad ((u, v))_0 = \int_{\Omega} (u(x), v(x)) dx,$$

ove il prodotto scalare sotto il segno integrale è quello definito dalle (6.3). Sia $\mathcal{L}^2(\Omega)$ lo spazio completamento funzionale di $C_0^0(\Omega)$ rispetto al prodotto scalare (6.4); risulta, in base alle (6.2):

$$\begin{aligned} ((\Gamma_i u, \Gamma_i v))_0 &= \sum_{h=1}^m \tau_k^h(g_i) \overline{\tau_j^h(g_i)} \int_{\Omega} u^k(g_i^{-1}x) \overline{v^j(g_i^{-1}x)} dx = \\ &= \int_{\Omega} (u(g_i^{-1}x), v(g_i^{-1}x)) dx = \int_{\Omega} |J_{g_i}(x)| (u(x), v(x)) dx = ((u, v))_0. \end{aligned}$$

Ne segue che

6.II. *I proiettori P_{hk} definiti dalle (5.5), riguardati come proiettori di $\mathcal{L}^2(\Omega)$, sono operatori di proiezione ortogonale.*

Osservazione. Il prodotto scalare definito da (6.3) dipende da $\{T_{g_i}\}$ tramite la base B . Se $[u, v]_0$ è il prodotto scalare relativo ad un'altra rappresentazione $\{\tilde{T}_{g_i}\}$ e $\tilde{\mathcal{L}}^2(\Omega)$ lo spazio corrispondente, $\mathcal{L}^2(\Omega)$ e $\tilde{\mathcal{L}}^2(\Omega)$ sono isomorfi come spazi di Banach, nel senso che esistono due costanti c e $\tilde{c}$ con $0 < c \leq \tilde{c}$, tali che

$$c [u, u]_0 \leq ((u, u))_0 \leq \tilde{c} [u, u]_0.$$

7. In questo numero vengono caratterizzati gli operatori lineari integrali, T -invarianti rispetto ad un gruppo di trasformazioni di classe uno, anche infinito.

Sia L un operatore lineare integrale, definito nel sottospazio $C_0^0(\Omega)$ di $W_m(\Omega)$, a valori in $C^0(\Omega)$; le componenti di Lu nel punto x e nella base B siano

$$(7.1) \quad (Lu)^i(x) = \int_{\Omega} k_j^i(x, \xi) u^j(\xi) d\xi, \quad i=1, \dots, m,$$

con $k_j^i(x, \xi)$ funzioni complesse continue in $\Omega \times \Omega$. Indicata con $K(x, \xi)$ la matrice di elementi $k_j^i(x, \xi)$, sussiste il Teorema:

7.1. *Sia G un gruppo di trasformazioni di Ω di classe uno. Condizione necessaria e sufficiente perchè l'operatore L definito dalle (7.1) sia T-invariante rispetto a G è che la matrice $K(x, \xi)$ verifichi in ogni punto di $\Omega \times \Omega$ le condizioni*

$$(7.2) \quad \tau(g) K(x, \xi) \tau^{-1}(g) = |J_g(\xi)| K(gx, g\xi),$$

per ogni $g \in G$; la matrice $\tau(g)$ è la matrice che rappresenta la trasformazione lineare T_g nella base B.

Dimostrazione. Per l'operatore L definito dalle (7.1) si ha, per ogni $u \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\begin{aligned} (\Gamma Lu)^i(x) &= \tau_j^i(g) \int_{\Omega} k_r^j(g^{-1}x, \xi) u^r(\xi) d\xi, \\ (L\Gamma u)^i(x) &= \int_{\Omega} k_j^i(x, \xi) \tau_r^j(g) u^r(g^{-1}\xi) d\xi = \\ &= \int_{\Omega} k_j^i(x, g\xi) \tau_r^j(g) u^r(\xi) |J_g(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

Pertanto le condizioni (4.1) sussistono se e solo se per ogni $g \in G$ sono verificate in $\Omega \times \Omega$ le condizioni

$$(7.3) \quad \tau(g) K(g^{-1}x, \xi) = |J_g(\xi)| K(x, g\xi) \tau(g),$$

ovvero, per l'arbitrarietà di x in Ω , le (7.2).

Nel caso particolare di un gruppo $G \equiv \{\rho\}$ di trasformazioni lineari, le (7.2) si riducono alle relazioni

$$(7.4) \quad \tau(\rho) K(x, \xi) \tau^{-1}(\rho) = K(\rho x, \rho \xi).$$

8. Per arbitrari gruppi di trasformazioni di Ω non è possibile caratterizzare in modo semplice gli operatori differenziali e, più in generale quelli pseudo-differenziali, T-invarianti rispetto a G.

Una caratterizzazione di questi operatori si può ottenere se G è un gruppo (anche infinito) di trasformazioni lineari di Ω .

Sia $C^\infty(\Omega)$ il sottospazio di $W_m(\Omega)$ delle funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ in Ω ; $C_0^\infty(\Omega)$ il sottospazio di $C^\infty(\Omega)$ delle funzioni a supporto compatto contenuto in Ω . Per ogni $u \in C_0^\infty(\Omega)$ si consideri la trasformata di Fourier

$$(8.1) \quad \hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} u(x) e^{-i\xi \cdot x} dx.$$

La funzione $\hat{u}(\xi)$ appartiene a $C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Se $\mathcal{S}$ è il sottospazio di $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ descritto da $\hat{u}(\xi)$ al variare di u in $C_0^\infty(\Omega)$, la trasformazione (8.1) è una trasformazione di $C_0^\infty(\Omega)$ su $\mathcal{S}$ invertibile e si ha:

$$(8.2) \quad u(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{u}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi.$$

Si ha inoltre

$$(8.3) \quad \frac{\partial^s u(x)}{\partial x_{h_1} \dots \partial x_{h_s}} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} i^s \xi_{h_1} \dots \xi_{h_s} \hat{u}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi.$$

Ne segue che ogni operatore differenziale lineare $L u$, a coefficienti in Ω , riguardato come operatore definito in $C_0^\infty(\Omega)$, a valori in $W_m(\Omega)$, si può rappresentare nella forma integrale

$$(8.4) \quad L u = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} \Lambda(x, \xi) \hat{u}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi,$$

ove, fissati $x \in \Omega$ e $\xi \in \mathbf{R}^n$, $\Lambda(x, \xi)$ è una trasformazione lineare di S^m in S^m .

Più in generale si possono considerare operatori lineari del tipo (8.4) con nucleo $\Lambda(x, \xi)$ definito in $\Omega \times \mathbf{R}^n$, a valori trasformazioni lineari di S^m in S^m , verificante convenienti ipotesi, che assicurano anche l'esistenza dell'integrale a secondo membro di (8.4): tali operatori sono i ben noti *operatori pseudo-differenziali*; $\Lambda(x, \xi)$ è il *simbolo* dell'operatore pseudo-differenziale (5).

Sia $G \equiv \{\rho\}$ un gruppo di trasformazioni lineari di Ω e $\{T_\rho\}$ una rappresentazione lineare di G di ordine m . Vogliamo ora dare una caratterizzazione degli operatori lineari pseudo-differenziali, definiti in $C_0^\infty(\Omega)$ dalle (8.4) e T-invarianti rispetto a G .

Si osservi innanzitutto che $C_0^\infty(\Omega)$ è un sottospazio T-invariante rispetto a G . Fissata una matrice ρ di G , sia ρ^* la trasposta di ρ , Γ la trasformazione di $\mathcal{T}(G, T)$ associata a ρ . Risulta, per ogni $u \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$(8.5) \quad \widehat{\Gamma u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} T_\rho u(\rho^{-1}x) e^{-i\xi \cdot x} dx = T_\rho \hat{u}(\rho^* \xi).$$

All'ultima uguaglianza si perviene osservando che $|\det \rho| = 1$ ed inoltre

$$\int_{\mathbf{R}^n} u(\rho^{-1}x) e^{-i\xi \cdot x} dx = \int_{\mathbf{R}^n} u(x) e^{-i\xi \cdot \rho x} dx = \int_{\mathbf{R}^n} u(x) e^{-i\rho^* \xi \cdot x} dx.$$

(5) Per un'esposizione in lingua italiana dei fondamenti della teoria degli operatori pseudo-differenziali, cfr. [5], pp. 147-179.

Sussiste il seguente Teorema:

8.1. *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'operatore L definito in $C_0^\infty(\Omega)$ dalle (8.4) sia T-invariante rispetto a G, è che il simbolo $\Lambda(x, \xi)$ verifichi, per ogni $\rho \in G$, le seguenti relazioni:*

$$(8.6) \quad \Lambda(\rho^{-1}x, \rho^*\xi) = T_\rho^{-1} \Lambda(x, \xi) T_\rho \quad \text{in } \Omega \times \mathbf{R}^n.$$

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che le condizioni (8.6) equivalgono alle condizioni (4.1). Per $\Gamma L u$, con un cambiamento di variabili nell'integrale corrispondente, si ottiene l'espressione:

$$\begin{aligned} (\Gamma L u)(x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} T_\rho \Lambda(\rho^{-1}x, \xi) \hat{u}(\xi) e^{i\xi \cdot \rho^{-1}x} d\xi = \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} T_\rho \Lambda(\rho^{-1}x, \xi) \hat{u}(\xi) e^{i\xi \cdot \rho^{-1}x} d\xi = \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} T_\rho \Lambda(\rho^{-1}x, \rho^*\xi) \hat{u}(\rho^*\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi. \end{aligned}$$

D'altra parte, tenendo presenti le (8.5), si ha:

$$\begin{aligned} (L\Gamma u)(x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} \Lambda(x, \xi) \widehat{\Gamma u}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi = \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} \Lambda(x, \xi) T_\rho \hat{u}(\rho^*\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi. \end{aligned}$$

Le (4.1), per l'arbitrarietà di u , equivalgono alle condizioni (8.6). Il Teorema è così dimostrato.

Sia in particolare L un operatore differenziale definito in $C^\infty(\Omega)$; siano

$$(8.7) \quad (Lu)^j(x) = \sum_{s=0}^p \sum_{h_1 \dots h_s} a_r^{j, h_1 \dots h_s}(x) \frac{\partial^s u^r}{\partial x_{h_1} \dots \partial x_{h_s}}$$

le componenti di $(Lu)(x)$ in una base B fissata. Si consideri la matrice $F(x, \xi)$, di ordine m , caratteristica dell'operatore L, di elementi

$$(8.8) \quad F_r^j(x, \xi) = \sum_{s=0}^p \sum_{h_1 \dots h_s} a_r^{j, h_1 \dots h_s}(x) \xi_{h_1} \dots \xi_{h_s}.$$

Detto $\Lambda(x, \xi)$ il simbolo dell'operatore (8.4), la matrice che nella base B rappresenta $\Lambda(x, \xi)$ è, nel caso attuale, $F(x, i\xi)$. Ne segue:

8.II. *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'operatore (8.7) sia T-invariante rispetto a G è che la matrice caratteristica $F(x, \xi)$ verifichi per ogni $\rho \in G$ le seguenti relazioni:*

$$(8.9) \quad F(\rho^{-1}x, \rho^*\xi) = \tau^{-1}(\rho) F(x, \xi) \tau(\rho) \quad \text{in } \Omega \times \mathbf{R}^n,$$

ove $\{\tau(\rho)\}$ è la rappresentazione matriciale di $\{T_\rho\}$ nella base B.

Per un gruppo G finito la (8.9) poteva anche ottenersi dalla (7.5) di [2] tramite la (2.2). Nelle applicazioni, specie all'Analisi numerica, non è, però, conveniente impiegare la (2.2) e ricondursi al caso delle congruenze, dato che ciò implicherebbe la *esplicita conoscenza numerica* della matrice α .

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. BASSOTTI RIZZA (1979) – *Operatori lineari invarianti rispetto ad un gruppo di congruenze*, « Riv. Mat. Univ. Parma » (3), 5, 453-470.
- [2] L. BASSOTTI RIZZA (1985) – *Su un ampliamento della teoria degli operatori lineari invarianti rispetto ad un gruppo di congruenze*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8), 79, 147-158.
- [3] L. BASSOTTI RIZZA – *Operatori lineari T-invarianti rispetto ad un gruppo di congruenze*, « Ann. Mat. Pura e Appl. », in corso di stampa.
- [4] G. FICHERA – *Il teorema di H. Weyl sulla distribuzione asintotica degli autovalori nell'elasticità*, Atti del Convegno per il Centenario del Circolo Matem. di Palermo, in corso di stampa.
- [5] O.A. OLEINIK e E.V. RADKEVITCH (1974) – *Equazioni del secondo ordine con forma caratteristica non negativa*. Redaz. in lingua italiana di M.A. Sneider, Libreria Eredi Virgilio Veschi, Roma.
- [6] V.I. SMIRNOV (1961) – *Linear algebra and group theory*. McGraw-Hill, New York-Toronto-London.
- [7] G.F. SMITH (1974) – *Projection operators for symmetric regions*, « Arch. Rat. Mech. Anal. », 54, 161-174.
- [8] N.JA. VILENKIN (1969) – *Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes*, Dunod, Paris.