Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Renzo Mazzocco

Sulle forme polarizzanti i coefficienti del polinomio caratteristico di una matrice

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **80** (1986), n.1-2, p. 1–5.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1986_8_80_1-2_1_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1986.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Presiede il Presidente della Classe EDOARDO AMALDI

Sedute dell'11 gennaio e dell'8 febbraio 1986

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Algebra. — *Sulle forme polarizzanti i coefficienti del polinomio caratteristico di una matrice* (*). Nota di RENZO MAZZOCCO, presentata (**) dal Socio E. MARTINELLI.

SUMMARY. — The multilinear forms, obtained by polarizing the coefficients of the characteristic polynomial of a matrix, are considered. A general relation (formula A) between such forms is proved. It follows in particular a rational expression for the above-mentioned coefficients (formula C), which is in a sense analogous to Newton's formulas, but with the use of the determinant function instead of the trace function.

1. Sia M_n l'algebra delle matrici quadrate d'ordine n, con elementi in un campo F di caratteristica 0. Detta $X = (x_{hk})$, $h, k = 1, \dots, n$ una matrice di M_n, si consideri il suo polinomio caratteristico

$$\det(\lambda I - X) = \lambda^n + \sum_{1}^{n}{}_m (-1)^m g_m(X) \lambda^{n-m}, \tag{1}$$

dove I è la matrice unità d'ordine n. I coefficienti $g_m(X)$ sono polinomi omogenei di grado m nelle x_{hk}, e, come è ben noto, si ha in particolare

$$g_1(X) = \operatorname{tr}(X), \qquad g_n(X) = \det(X). \tag{2}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 gennaio 1986.

Consideriamo ora le forme m-lineari simmetriche $G_m(X^1, \ldots, X^m)$, $1 \leq m \leq n$, essendo $X^i = (x^i_{hk}) \in M_n$, associate ai polinomi omogenei $g_m(X)$ (ottenute polarizzando tali polinomi [1]). Con i simboli indicati si ha

$$(3) \qquad G_m(X, \ldots, X) = g_m(X) \text{ [2]} .$$

Scopo del presente lavoro è quello di provare la seguente formula generale, che lega tra loro le suddette forme multilineari,

$$(A) \qquad G_p(X^1, \ldots, X^p) = \frac{q!\,(n-q)!}{p!\,(n-p)!}\, G_q(X^1, \ldots, X^p, I^1, \ldots, I^{q-p}) ,$$

dove $1 \leq p \leq q \leq n$ e, qui e nel seguito, con $I^1, I^2, \ldots$ intendiamo copie della matrice unità I.

La formula (A), per $q = n$, ci dice che, una volta ottenuta la forma n-lineare simmetrica $G_n(X^1, \ldots, X^n) = \operatorname{Det}(X^1, \ldots, X^n)$ che polarizza $g_n(X) = \det(X)$, sono note tutte le altre forme. Ponendo, nella (A), $p = m$ ed $X^1 = \ldots = X^p = X$ e tenuta presente la (3), si ha

$$(B) \qquad g_m(X) = \frac{q!\,(n-q)!}{m!\,(n-m)!}\, G_q(X, \ldots, X, I^1, \ldots, I^{q-m}) ,$$

dove $1 \leq m \leq q \leq n$ ed, ovviamente, a secondo membro la matrice X compare m volte.

Osserviamo esplicitamente che la (B), per $q = n$, ci dice che risulta

$$(C) \qquad g_m(X) = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, \operatorname{Det}(X, \ldots, X, I^1, \ldots, I^{n-m}) , \quad 1 \leq m \leq n .$$

Notiamo che, mentre la (C) esprime razionalmente tutti i coefficienti del polinomio caratteristico di una matrice mediante la sola forma n–lineare simmetrica $\operatorname{Det}(X^1, \ldots, X^n)$ e quindi, in definitiva, mediante la sola funzione det: $M_n \to F$, le formule di Newton per tale matrice [3] permettono invece di

(1) Cfr., per es., [5], pag. 394-396.

(2) La considerazione delle forme $G_m(X^1, \ldots, X^m)$ ha spesso interesse, come accade, per es., nella teoria geometrica di Chern–Weil delle classi caratteristiche di fibrati dotati di connessione. Cfr. [1], pag. 77 e [3], cap. XII.

(3) Ricordiamo che, usando i nostri simboli, le formule di Newton per una matrice X si scrivono

$$m g_m(X) = \sum_{1}^{m}{}_r (-1)^{r-1} g_{m-r}(X) \operatorname{tr}(\times^r X) , \quad 1 \leq m \leq n , \qquad \text{dove} \quad g_0(X) = 1 \text{ e } \times^r X$$

è la potenza r—ma di X. Per tali formule cfr., per esempio, [4], pag. 18.

esprimere gli stessi coefficienti mediante la traccia di potenze della matrice e quindi mediante la sola funzione tr: $M_n \to F$.

2. *Dimostrazione della formula* (A). È ben noto che i polinomi omogenei $g_m(X)$, di cui nella (1), coincidono con le somme dei minori principali di ordine m della matrice X (4), quindi per essi si ha

$$g_m(X) = \sum_{1 \leq h_1 < \ldots < h_m \leq} \sum_{\tau} \varepsilon(\tau)\, x_{h_1 \tau(h_1)} \ldots x_{h_m \tau(h_m)}, \tag{4}$$

dove, qui e nel seguito, τ varia nel gruppo totale delle sostituzioni su $h_1, \ldots, h_m$ e con $\varepsilon(\tau)$ indichiamo la segnatura di τ. (Più oltre, quando la sostituzione è sottoposta a vincoli, scriveremo per esempio: $\tau \mid \tau(h_1) = h_1$).

Allora polarizzando tali polinomi, si ha che le forme m–lineari ad essi associate sono

$$G_m(X^1, \ldots, X^m) = \frac{1}{m!} \sum_{1 \leq h_1 < \ldots < h_m \leq n} \sum_{\tau} \sum_{\sigma} \varepsilon(\tau)\, x^{\sigma(1)}_{h_1 \tau(h_1)} \ldots x^{\sigma(m)}_{h_m \tau(h_m)}, \tag{5}$$

dove σ varia nel gruppo totale delle sostituzioni su $1, \ldots, m$.

Ebbene per provare la formula (A) per $1 \leq p < q \leq n$ (il caso di $p = q$ è ovvio) è sufficiente dimostrare che risulta

$$G_m(X^1, \ldots, X^{m-1}, I) = \frac{n - m + 1}{m} G_{m-1}(X^1, \ldots, X^{m-1}),\quad 1 < m \leq n. \tag{6}$$

Ed infatti, supposta valida la formula (6), applicando ripetutamente tale formula per $m = q,\ q - 1, \ldots, p + 2,\ p + 1$ rispettivamente a $G_q(X^1, \ldots, X^p, I^1, \ldots, I^{q-p})$, $G_{q-1}(X^1, \ldots, X^p, I^1, \ldots, I^{q-1-p}), \ldots, G_{p+2}(X^1, \ldots, X^p, I^1, I^2)$, $G_{p+1}(X^1, \ldots, X^p, I)$, si ha

$$G_q(X^1, \ldots, X^p, I^1, \ldots, I^{q-p}) =$$

$$\frac{n - q + 1}{q} \frac{n - q + 2}{q - 1} \ldots \frac{n - p - 1}{p + 2} \frac{n - p}{p + 1} G_p(X^1, \ldots, X^p) =$$

$$\frac{\dfrac{(n-p)!}{(n-q)!}}{\dfrac{q!}{p!}} G_p(X^1, \ldots, X^p) = \frac{p!\,(n-p)!}{q!\,(n-q)!} G_p(X^1, \ldots, X^p),$$

e quindi la validità della formula (A).

(4) Cfr., per esempio, [2], pag. 388.

Dimostriamo dunque la formula (6). Ponendo $X^m = I$ nella (5), si ha

$$G_m(X^1, \ldots, X^{m-1}, I) =$$

$$\frac{1}{m!} \sum_{1 \le h_1 < \ldots < h_m \le n} \left(\sum_{\tau | \tau(h_1) = h_1} \sum_{\sigma | \sigma(1) = m} \varepsilon(\tau)\, x^{\sigma(2)}_{h_2 \tau(h_2)} \ldots x^{\sigma(m)}_{h_m \tau(h_m)} + \right.$$

$$\left. \ldots + \sum_{\tau | \tau(h_m) = h_m} \sum_{\sigma | \sigma(m) = m} \varepsilon(\tau)\, x^{\sigma(1)}_{h_1 \tau(h_1)} \ldots x^{\sigma(m-1)}_{h_{m-1} \tau(h_{m-1})} \right).$$

Per ogni $\tau \mid \tau(h_\alpha) = h_\alpha$, consideriamo la sostituzione τ'_α sulla $(m-1)$-pla $h_1, \ldots, \hat{h}_\alpha, \ldots, h_m$ ottenuta restringendo τ a tale $(m-1)$-pla. Ovviamente, per ogni fissato indice α, si ha che, al variare di una tale τ, τ'_α varia nel gruppo totale delle sostituzioni su $h_1, \ldots, \hat{h}_\alpha, \ldots, h_m$ e risulta $\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\tau'_\alpha)$. Per ogni $\sigma \mid \sigma(\alpha) = m$, consideriamo poi la sostituzione σ' su $1, \ldots, m-1$ tale che $\sigma'(\beta) = \sigma(\beta)$ se $\beta < \alpha$ e $\sigma'(\beta) = \sigma(\beta + 1)$ se $\beta \ge \alpha$; è ovvio che, fissato l'indice α, al variare di una tale σ, σ' varia nel gruppo totale delle sostituzioni su $1, \ldots, m-1$. Tenuto conto di ciò, si ha intanto

$$G_m(X^1, \ldots, X^{m-1}, I) = \frac{1}{m!} \left(\sum_{1 \le \hat{h}_1 < \ldots < h_m \le n} \sum_{\tau'_1} \sum_{\sigma'} \varepsilon(\tau'_1)\, x^{\sigma'(1)}_{h_2 \tau'_1(h_2)} \ldots x^{\sigma'(m-1)}_{h_m \tau'_1(h_m)} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \sum_{1 \le h_1 < \ldots < \hat{h}_m \le n} \sum_{\tau'_m} \sum_{\sigma'} \varepsilon(\tau'_m)\, x^{\sigma'(1)}_{h_1 \tau'_m(h_1)} \ldots x^{\sigma'(m-1)}_{h_{m-1} \tau'_m(h_{m-1})} \right).$$

Ora, fissata comunque una $(m-1)$-pla $(h'_1, \ldots, h'_{m-1})$ ordinata (per crescenza), esistono $n - m + 1$ m-ple, ordinate (per crescenza), che danno luogo, cancellando in esse un elemento, a $(h'_1, \ldots, h'_{m-1})$; e dunque, se è $(h'_1, \ldots, h'_{m-1}) = (h_1, \ldots, \hat{h}_\alpha, \ldots, h_m)$, allora la considerata τ'_α varia nel gruppo totale delle sostituzioni su $h'_1, \ldots, h'_{m-1}$. Si ha perciò

$$G_m(X^1, \ldots, X^{m-1}, I) =$$

$$\frac{n - m + 1}{m!} \sum_{1 \le h'_1 < \ldots < h'_{m-1} \le n} \sum_{\tau'} \sum_{\sigma'} \varepsilon(\tau')\, x^{\sigma'(1)}_{h'_1 \tau'(h'_1)} \ldots x^{\sigma'(m-1)}_{h'_{m-1} \tau'(h'_{m-1})},$$

dove τ' varia nel gruppo totale delle sostituzioni su $h'_1, \ldots, h'_{m-1}$ e σ', come già precisato, in quello delle sostituzioni su $1, \ldots, m-1$. Tenuta presente la (5), con $m-1$ in luogo di m, si ha la (6).

BIBLIOGRAFIA

[1] R. BOTT and S.S. CHERN (1965) – *Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorfic sections*, « Acta mathematica », *114*, 71-112.
[2] F.E. HOHN (1973) – *Elementary matrix algebra*, The Macmillan Company, New York.
[3] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU (1969) – *Foundations of differential geometry*, vol. II, Interscience Publishers, New York.
[4] L.H. ROWEN (1980) – *Polinomial identities in ring theory*, Academic Press, New York.
[5] R. SHAW (1983) – *Linear algebra and group representations*, vol. II, Academic Press Inc., London.