Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Lucilla Bassotti Rizza

Su un ampliamento della teorìa degli operatori lineari invarianti rispetto ad un gruppo di congruenze

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **79** (1985), n.6, p. 147–158.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1985_8_79_6_147_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1985.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 dicembre 1985

Presiede il Presidente della Classe EDOARDO AMALDI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Analisi matematica. — *Su un ampliamento della teoria degli operatori lineari invarianti rispetto ad un gruppo di congruenze* (*). Nota di LUCILLA BASSOTTI RIZZA, presentata (**) dal Socio G. FICHERA.

SUMMARY. — Let A be an open subset of $\mathbf{R}^n$, $W_m(A)$ the linear space of m-vector valued functions defined on A, $G \equiv \{\gamma\}$ a group of orthogonal matrices mapping A onto itself and $T \equiv \{T_\gamma\}$ a linear representation of order m of G.

A suitable group $\mathscr{T}(G, T)$ of linear operators of $W_m(A)$ is introduced which leads to a general definition of T-invariant linear operator with respect to G.

When G is a finite group, projection operators are explicitly obtained which define a "maximal" decomposition of the function space into a direct sum of subspaces each of them invariant with respect to any T-invariant linear operator.

The theory includes as special cases previous results obtained for $m = 1$, $m = n$.

Sia A un aperto dello spazio cartesiano $\mathbf{R}^n$, $G \equiv \{\gamma\}$ un gruppo di matrici ortogonali γ di ordine n che mutano A in sè, $W_m(A)$ lo spazio dei vettori a m componenti, ciascuna funzione complessa del punto x di A.

In miei precedenti lavori (cfr. [1], [2]), nei casi $m = 1$ e $m = n$, ho introdotto un concetto di classe $\mathscr{L}(G)$ di operatori lineari, definiti in un sottospazio $U(A)$ di $W_m(A)$ e a valori in $W_m(A)$, invarianti rispetto a G. Ricerche di G.F. Smith e mie, successive al lavoro [1], hanno portato alla costruzione

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del progetto nazionale di ricerca « Analisi numerica e matematica computazionale » nell'anno 1985.

(**) Nella seduta del 22 novembre 1985.

di decomposizioni di U (A) in somma diretta di sottospazi, ciascuno invariante rispetto a tutti quegli operatori di $\mathscr{L}$ (G) che hanno codominio contenuto in U (A). Tali decomposizioni risultano « massimali » in un senso ben precisato (cfr. [5], p. 167). I tentativi di estendere le tecniche e i risultati di quei lavori al caso m arbitrario, urtavano contro la difficoltà di introdurre un conveniente gruppo $\mathscr{T}$ (G) di trasformazioni lineari invertibili di U (A) su U (A), isomorfo a G, tale che la classe $\mathscr{L}$ degli operatori lineari di U (A) permutabili con gli elementi di $\mathscr{T}$ (G) contenesse i principali operatori lineari che si incontrano nelle applicazioni. Ritengo ora di aver superato questa difficoltà.

Nel presente lavoro, fissato arbitrariamente m, si introducono alcuni gruppi $\mathscr{T}$(G , T), ciascuno dei quali è legato ad una rappresentazione lineare $\{T_\gamma\}$ di ordine m del gruppo G; in corrispondenza ad una siffatta rappresentazione, viene introdotta la classe $\mathscr{L}$ (G , T) degli operatori lineari di U (A) in W_m (A) che vengono definiti come T-*invarianti* rispetto a G. Le proprietà di $\mathscr{L}$ (G , T) estendono quelle di $\mathscr{L}$ (G). Si costruiscono quindi decomposizioni « massimali » dello spazio U (A) in somma diretta di sottospazi, ciascuno invariante per ogni operatore di $\mathscr{L}$ (G , T) che abbia codominio in U (A). Tale costruzione è del tutto concreta e utilizzabile nelle applicazioni, dato che vengono ottenute le espressioni esplicite degli operatori di proiezione di U (A) su ciascuno dei sottospazi invarianti.

Se in U (A) è introdotto un prodotto scalare, si determinano le condizioni sotto le quali i detti sottospazi invarianti sono mutuamente ortogonali.

Infine si caratterizzano gli operatori differenziali e integrali T-invarianti rispetto a G.

La teoria qui esposta, relativa ad m arbitrario, si riduce per $m = 1$ a quella già nota ([5], [2]). Invece per $m = n$ l'attuale estende quella precedente, elaborata in [5] e [2]. Si confronti a tale proposito l'esempio indicato al n. 8 di questa Nota.

Un'esposizione più ampia e dettagliata di questa teoria sarà argomento di una Memoria di prossima pubblicazione.

1. Sia x un punto dello spazio cartesiano $\mathbf{R}^n$, A un aperto di $\mathbf{R}^n$, $\bar{A}$ la sua chiusura, G un gruppo di matrici ortogonali di ordine n che muti in sé l'insieme A, cioè tale che per ogni $\gamma \in G$ e per ogni $x \in A$ risulti $\gamma x \in A$.

Nel presente lavoro si intende fissato un gruppo G con le proprietà sopra specificate e si fa l'ipotesi che G contenga almeno due elementi.

Assegnato un intero $m \geq 1$, si consideri inoltre lo spazio lineare astratto complesso S^m di dimensione (complessa) m e un omomorfismo di G nella famiglia $\mathscr{T}$ delle trasformazioni lineari invertibili di S^m su S^m: sia T_γ l'elemento di $\mathscr{T}$ corrispondente all'elemento γ di G. L'insieme $\{T_\gamma\}$ costituisce *una rappresentazione lineare di* G *di ordine m*. Analogamente, un omomorfismo di G nella famiglia delle matrici (ad elementi complessi) non degeneri di ordine m determina una rappresentazione (matriciale) di G di ordine m. Fissata in S^m una base, ad ogni rappresentazione lineare $\{T_\gamma\}$ corrisponde una rappresentazione matriciale dello stesso ordine e viceversa.

Fissate una rappresentazione lineare $\{T_\gamma\}$ di G di ordine m e una base B in S^m, la rappresentazione matriciale determinata da $\{T_\gamma\}$ e da B verrà indicata con $\{\tau(\gamma)\}$. Essa sarà detta *unitaria* se costituita di matrici unitarie. Nel caso di un gruppo finito, è ben noto che ogni rappresentazione lineare ammette una rappresentazione matriciale unitaria (cfr. ad es. [4]).

Se $m = n$, la rappresentazione lineare $\{\tilde{T}_\gamma\}$ di G di ordine n, che nella base B si rappresenta con le matrici di G, verrà detta *rappresentazione lineare canonica di* G.

2. Si consideri lo spazio $W_m(A)$ delle funzioni definite in A e a valori in S^m: siano $v^j(x)$ le componenti nella base B di un vettore $v(x)$, con $v \in W_m(A)$.

Indicherò con $\mathcal{T}(G, T)$ un gruppo di trasformazioni lineari Γ di $W_m(A)$ su $W_m(A)$ associate alle matrici di G e dipendenti dalla rappresentazione lineare $\{T_\gamma\}$ di ordine m. Precisamente, per ogni $\gamma \in G$, Γ è la trasformazione lineare di $W_m(A)$ su $W_m(A)$ così definita:

$$(\Gamma v)(x) = T_\gamma v(\gamma^{-1} x) . \tag{2.1}$$

Le componenti di $(\Gamma v)(x)$ nella base B (adottando la convenzione sommatoria) sono date da:

$$(\Gamma v)^j(x) = \tau^j_k(\gamma) v^k(\gamma^{-1} x) . \tag{2.2}$$

La trasformazione lineare Γ definita dalle (2.1) verrà detta *trasformazione associata a* γ (e relativa a $\{T_\gamma\}$).

La famiglia $\mathcal{T}(G, T)$ delle trasformazioni lineari associate alle matrici di G è un gruppo rispetto alla composizione, perchè la trasformazione associata a $\gamma\gamma'$ è la composizione $\Gamma\Gamma'$ delle trasformazioni Γ e Γ' associate rispettivamente a γ e γ' (1). Vale il Teorema:

2.I. *Il gruppo* $\mathcal{T}(G, T)$ *è isomorfo a* G.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che, se la trasformazione associata ad un elemento γ di G è la trasformazione identica I, allora γ è la matrice identica δ. Infatti se

$$\tau^j_k(\gamma) v^k(\gamma^{-1} x) = v^j(x) \qquad x \in A, \quad j = 1, \dots, m \tag{2.3}$$

per ogni $v \in W_m(A)$, scegliendo $v(x) = e_h$ $(h = 1, \dots, m)$, con e_h vettore della base B, dalla (2.3) segue $\tau(\gamma) = \delta$. La (2.3) si riduce allora a $v^k(\gamma^{-1} x) = v^k(x)$ per ogni $v \in W_m(A)$, che può sussistere se e solo se $\gamma = \delta$.

Il gruppo $\mathcal{T}(G, T)$ genera l'algebra complessa $\mathcal{A}(G, T)$ di tutte le combinazioni lineari a coefficienti complessi di un numero finito di elementi di

(1) $\mathcal{T}(G, T)$ costituisce una rappresentazione di G per mezzo di operatori di $W_m(A)$. Rappresentazioni di un gruppo per mezzo di operatori lineari sono state già considerate nella letteratura (cfr. [6] p. 26).

$\mathscr{T}(G, T)$. Può accadere che, se $\mathscr{T}(G, T')$ e $\mathscr{T}(G, T'')$ sono gruppi corrispondenti a due rappresentazioni lineari distinte $\{T'_\gamma\}$ e $\{T''_\gamma\}$, risulti $\mathscr{A}(G, T') = \mathscr{A}(G, T'')$. Ciò accade in particolare nel caso scalare ($m = 1$). Sussiste infatti il Teorema:

2.II. *Fissate arbitrariamente due rappresentazioni lineari* $\{T'_\gamma\}$ e $\{T''_\gamma\}$ *di* G *di ordine uno, le algebre* $\mathscr{A}(G, T')$ *e* $\mathscr{A}(G, T'')$ *coincidono.*

Dimostrazione. Se Γ' e Γ'' sono le trasformazioni di $\mathscr{T}(G, T')$ e $\mathscr{T}(G, T'')$ associate ad una stessa γ, riesce $\Gamma' = \varepsilon\, \Gamma''$ con ε numero complesso. Ne segue la tesi.

Osservazioni. Nel caso scalare ($m = 1$), in base al Teorema 2.II, ogni gruppo $\mathscr{T}(G, T)$ genera l'algebra $\mathscr{A}(G)$ considerata in [2], n. 5.

Nel caso $m = n$, in corrispondenza alla rappresentazione canonica $\{\tilde{T}_\gamma\}$, si ottengono il gruppo $\mathscr{T}(G, \tilde{T})$ e l'algebra $\mathscr{A}(G, \tilde{T})$ già considerati in [2], n. 3 e n. 5 (2).

3. Sia $V(A)$ un sottospazio vettoriale di $W_m(A)$. Dirò che $V(A)$ è T-*invariante rispetto a* G se, per ogni $\Gamma \in \mathscr{T}(G, T)$ e per ogni $v \in V(A)$ risulta $\Gamma v \in V(A)$.

Dirò che $V(A)$ è un sottospazio *invariante rispetto a* G se esso è T-invariante rispetto a G comunque si scelga la rappresentazione $\{T_\gamma\}$ di G. Si verifica facilmente che:

3.I. *Per ogni* p *anche* ∞, *i sottospazi* $C^p(A)$, $C^p(\bar{A})$ *e* $C^p_0(A)$ *di* $W_m(A)$ *sono invarianti rispetto a* G.

Sia $V(A)$ un sottospazio di $W_m(A)$ T-invariante rispetto a G e L un operatore lineare definito in $V(A)$, a valori in $W_m(A)$. Si dice che L è T-*invariante rispetto a* G se per ogni $\Gamma \in \mathscr{T}(G, T)$ riesce

$$\Gamma L = L \Gamma \quad (3.1)$$ (3).

Il gruppo G e la rappresentazione lineare $\{T_\gamma\}$ di ordine m determinano la classe $\mathscr{L}(G, T)$ degli operatori definiti in $V(A)$, T-invarianti rispetto a G. Sussistono i seguenti ovvî Teoremi:

3.II. *Condizione necessaria e sufficiente perchè un operatore* L *appartenga a* $\mathscr{L}(G, T)$ *è che esso sia permutabile con tutti gli operatori dell'algebra* $\mathscr{A}(G, T)$.

3.III. *Se* $m = 1$, *la classe degli operatori* T-*invarianti rispetto a* G *coincide con la classe degli operatori invarianti rispetto a* G *considerata in* [2].

3.IV. *Se* $m = n$ *e* $\{\tilde{T}_\gamma\}$ *è la rappresentazione canonica di* G, *la classe* $\mathscr{L}(G, \tilde{T})$ *coincide con la classe* $\mathscr{L}(G)$ *considerata in* [2].

(2) In [2] in luogo di $W_n(A)$ si considera il sottospazio $\mathscr{M}_n(A)$ delle funzioni n-vettoriali misurabili. Il gruppo $\mathscr{T}(G, \tilde{T})$ è quello indicato in [2] con $\mathscr{T}(G)$ e l'algebra $\mathscr{A}(G, \tilde{T})$ quella indicata con $\mathscr{A}(G)$.

(3) La (3.1) va intesa nel senso che, per ogni $v \in V(A)$, riesce $\Gamma(Lv) = L(\Gamma v)$.

Sussistono inoltre gli analoghi dei Teoremi VII, VIII, IX e X del n. 4 di [2].

Osservazione. Per $m > 1$, la classe $\mathscr{L}(G, T)$ dipende generalmente dalla rappresentazione lineare $\{T_\gamma\}$ che si fissa. Se $\{T'_\gamma\}$ e $\{T''_\gamma\}$ generano la stessa algebra $\mathscr{A}(G, T')$, in base al Teorema 3.II, le classi $\mathscr{L}(G, T')$ e $\mathscr{L}(G, T'')$ coincidono.

4. Sia U (A) un sottospazio di $W_m(A)$ T-invariante rispetto a G. Si vuole decomporre U (A) in somma diretta di sottospazi $U_k(A)$, ciascuno dei quali sia sottospazio invariante per tutti gli operatori lineari T-invarianti rispetto a G, definiti in U (A) e a valori in U (A). Si vogliono inoltre costruire gli operatori di proiezione di U (A) sui singoli sottospazi $U_k(A)$.

Per risolvere detto problema, basta costruire un sistema finito $P_1, \ldots, P$ di proiettori (4) di $\mathscr{A}(G, T)$ verificanti le condizioni

$$\sum_{j=1}^{t} P_j = I, \qquad P_k P_j = 0 \qquad \text{se } k \neq j. \tag{4.1}$$

Posto infatti $U_k(A) = P_k[U(A)]$, risulta:

$$U(A) = U_1(A) \oplus U_2(A) \oplus \ldots \oplus U_t(A), \tag{4.2}$$

con $U_k(A) \subset U(A)$. Dal Teorema 3.II discende inoltre:

4.I. *Se* L *è un operatore lineare di* U (A) *in* U (A), T-*invariante rispetto a* G, *ogni sottospazio* $U_k(A)$ *è invariante rispetto a* L.

Il problema posto all'inizio di questo numero è così ricondotto alla costruzione di un sistema finito di proiettori di $\mathscr{A}(G, T)$ verificanti le (4.1); detta costruzione si può ottenere, nel caso di un gruppo finito, generalizzando un procedimento dovuto a G.F. Smith (cfr. [5]).

Sia G un gruppo finito, $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ gli elementi di G e γ_1 l'unità. È noto che il gruppo finito G ammette un numero massimo q di rappresentazioni (matriciali) unitarie e irriducibili, a due a due non equivalenti

$$\{\omega^{(1)}(\gamma_i)\} \quad , \quad \{\omega^{(2)}(\gamma_i)\} \quad , \quad \ldots \quad , \quad \{\omega^{(q)}(\gamma_i)\}, \tag{4.3}$$

tali che ogni rappresentazione lineare irriducibile di G si rappresenta, in una conveniente base, per mezzo delle matrici $\{\omega^{(s)}(\gamma_i)\}$ (5). Con d_s sarà indicato l'or-

(4) Un proiettore è una trasformazione lineare idempotente.

(5) Per gli elementi di teoria delle rappresentazioni dei gruppi si rimanda ai trattati classici, ad es. [4]; per alcune applicazioni delle rappresentazioni (4.3) alle decomposizioni di U (A) si veda [5] e [2]. Il sistema (4.3) non è, in generale, univocamente determinato, a meno che G non sia un gruppo abeliano: in questo caso riesce $q = N$ e tutte le $\omega^{(s)}(\gamma_i)$ sono di ordine uno.

dine delle matrici $\{\omega^{(s)}(\gamma_i)\}$, con $\omega^{(s)}_{kk}(\gamma_i)$ l'elemento di $\omega^{(s)}(\gamma_i)$ di posto k, k. Da note proprietà del sistema di rappresentazioni (4.3) segue $d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_q^2 = N$. Posto

$$M = d_1 + d_2 + \ldots + d_q, \tag{4.4}$$

risulta allora $M \leq N$, il segno uguale sussistendo se G è un gruppo abeliano. Il numero M è univocamente determinato da G.

Per ogni coppia h, k di indici, con $h = 1, \ldots, q$ e $k = 1, \ldots, d_h$, si consideri la trasformazione di $\mathscr{A}(G, T)$ così definita:

$$P_{hk} = N^{-1} d_h \sum_{i=1}^{N} \omega^{(h)}_{kk}(\gamma_i) \Gamma_i, \tag{4.5}$$

ove Γ_i è la trasformazione lineare associata a γ_i e definita dalle (2.1); le componenti del vettore $(P_{hk} v)(x)$ nella base B sono:

$$(P_{hk} v)^j(x) = N^{-1} d_h \sum_{i=1}^{N} \omega^{(h)}_{kk}(\gamma_i) \tau^j_l(\gamma_i) v^l(\gamma_i^{-1} x). \tag{4.6}$$

Sussiste il seguente Teorema:

4.II. *$\mathscr{L}$e* M *trasformazioni lineari* P_{hk} *definite dalle* (4.5) *e* (4.6) *costituiscono un sistema di* M *proiettori verificanti le* (4.1).

Dim. Sia $\overset{*}{\gamma}_i$ la matrice inversa (trasposta) di γ_i; da $\gamma_i \gamma_j = \gamma_l$ segue $\Gamma_i \Gamma_j = \Gamma_l$ e $\gamma_i = \gamma_l \overset{*}{\gamma}_j$; per note proprietà delle rappresentazioni (4.3) si ha:

$$N^2 P_{hk} P_{rs} = d_h d_r \sum_{i,j}^{1,N} \omega^{(h)}_{kk}(\gamma_i) \omega^{(r)}_{ss}(\gamma_j) \Gamma_i \Gamma_j = d_h d_r \sum_{j,l}^{1,N} \omega^{(r)}_{ss}(\gamma_j) \omega^{(h)}_{kk}(\gamma_l \overset{*}{\gamma}_j) \Gamma_l =$$

$$= d_h d_r \sum_{j,l}^{1,N} \omega^{(r)}_{ss}(\gamma_j) \sum_{m=1}^{d_h} \omega^{(h)}_{km}(\gamma_l) \omega^{(h)}_{mk}(\overset{*}{\gamma}_j) \Gamma_l =$$

$$= d_h d_r \sum_{l=1}^{N} \sum_{m=1}^{d_h} \omega^{(h)}_{km}(\gamma_l) \sum_{j=1}^{N} \omega^{(r)}_{ss}(\gamma_j) \overline{\omega^{(h)}_{km}(\gamma_j)} \Gamma_l,$$

$$P_{hk} P_{rs} = \delta_{hr} \delta_{ks} N^{-1} d_h \sum_{l=1}^{N} \omega^{(h)}_{kk}(\gamma_l) \Gamma_l = \delta_{hr} \delta_{ks} P_{hk}.$$

Si conclude che $P^2_{hk} = P_{hk}$ e $P_{hk} P_{rs} = 0$ se $h \neq r$ o $k \neq s$. Infine ricordando che

$$\sum_{h=1}^{q} d_h \, tr\, \omega^{(h)}(\gamma_i) = 0 \quad \text{se } i > l, \qquad \sum_{h=1}^{q} d_h \, tr\, \omega^{(h)}(\gamma_1) = \sum_{h=1}^{q} d_h^2 = N,$$

si ricava

$$\sum_{h=1}^{q} \sum_{k=1}^{d_h} P_{hk} = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{h=1}^{q} d_h \, tr \, \omega^{(h)} (\gamma_i) \right) \Gamma_i = \Gamma_1 = I .$$

Il Teorema è così dimostrato.

Si osservi che, fissata la rappresentazione $\{T_{\gamma_i}\}$ e quindi l'algebra $\mathscr{A}(G, T)$, la decomposizione di $U(A)$ in somma diretta di M sottospazi per mezzo dei proiettori P_{hk} non è, in generale, univocamente determinata, perchè dipende dal sistema (4.3); essa è però massimale, nel senso precisato dal Teorema:

4.III. *Fissato comunque* P_{hk} *fra i proiettori definiti da* (4.5), *se* P'_{hk} *e* P''_{hk} *sono proiettori di* $\mathscr{A}(G, T)$ *tali che*

$$P_{hk} = P'_{hk} + P''_{hk} \quad , \quad P'_{hk} P''_{hk} = P''_{hk} P'_{hk} = 0 , \tag{4.7}$$

allora $P'_{hk} = P_{hk}$ *oppure* $P''_{hk} = P_{hk}$.

Dimostrazione. Con un calcolo un po' laborioso si prova che, per ogni proiettore P di $\mathscr{A}(G, T)$, esiste un numero σ tale che $P_{hk} P P_{hk} = \sigma P_{hk}$. Si ha allora

$$(P'_{hk} + P''_{hk}) P'_{hk} (P'_{hk} + P''_{hk}) = P'_{hk} = \sigma P_{hk} \quad , \quad P'_{hk} = P'^2_{hk} = \sigma^2 P_{hk} = \sigma P_{hk} .$$

Ne segue $\sigma = 0$ o $\sigma = 1$.

5. Questo numero è dedicato ad una proprietà di ortogonalità dei proiettori considerati nel numero precedente.

Si supponga introdotto in $U(A)$ un prodotto scalare $((u, v))$ che goda della seguente proprietà: per ogni $\Gamma_i \in \mathscr{T}(G, T)$ e per ogni coppia u, v di elementi di $U(A)$ riesca:

$$((\Gamma_i u , \Gamma_i v)) = ((u , v)) , \qquad i = l, \ldots, N . \tag{5.1}$$

Sia $\mathscr{H}(A)$ lo spazio ottenuto per completamento funzionale di $U(A)$ rispetto al prodotto scalare $((u, v))$. Dalle (5.1) segue che le trasformazioni di $\mathscr{A}(G, T)$, riguardate come trasformazioni lineari di $\mathscr{H}(A)$ in $\mathscr{H}(A)$, sono continue. Sia S^* la trasformazione aggiunta di una trasformazione S di $\mathscr{A}(G, T)$. Dalle (5.1) segue che Γ_i^* coincide con Γ_i^{-1}. Sussiste il Teorema:

5.1. *I proiettori* P_{hk} *definiti dalle* (4.5), *riguardati come operatori di* $\mathscr{H}(A)$, *sono operatori di proiezione ortogonale. Pertanto i sottospazi* $U_{hk}(A)$, *proiezioni di* $U(A)$ *mediante* P_{hk}, *sono a due a due ortogonali.*

Dimostrazione. Si ha

$$P^*_{hk} = N^{-1} d_h \sum_{i=1}^{N} \overline{\omega^{(h)}_{kk}(\gamma_i)\, \Gamma_i^*} ; \tag{5.2}$$

inoltre, poichè $\omega^{(h)}(\gamma_i)$ è unitaria, la trasposta di $\overline{\omega^{(h)}(\gamma_i)}$ coincide con $\omega^{(h)}(\gamma_i^{-1})$; si ha dunque

$$P^*_{hk} = N^{-1} d_h \sum_{i=1}^{N} \omega^{(h)}_{kk}(\gamma_i^{-1})\, \Gamma_i^{-1} = P_{hk} .$$

Ne segue che i proiettori P_{hk} sono autoaggiunti. Pertanto, se P_{hk} e P_{rs} sono distinti, riesce, per ogni u, v di $\mathscr{H}(A)$:

$$((P_{hk}\, u , P_{rs}\, v)) = ((u , P_{hk}\, P_{rs}\, v)) = 0 .$$

Ciò prova l'asserto.

Sia A limitato. Fissata la rappresentazione lineare $\{T_{\gamma_i}\}$ di G di ordine m, si scelga in S^m la base B in modo che $\{T_{\gamma_i}\}$ si rappresenti in detta base, con matrici unitarie $\{\tau(\gamma_i)\}$. In S^m si introduca il seguente prodotto scalare:

$$(y , z) = \sum_{h=1}^{m} y^h\, \overline{z^h} , \tag{5.3}$$

ove y^h e z^h sono le componenti h-esime di y e z nella base B.

Si consideri il sottospazio $C^p(\bar{A})$ di $W_m(A)$ e in esso il prodotto scalare

$$((u , v))_p = \sum_{r=0}^{p} \sum_{h_1 \ldots h_r}^{1,n} \int_A \left(\frac{\partial^r u(x)}{\partial x_{h_1} \ldots \partial x_{h_r}} , \frac{\partial^r v(x)}{\partial x_{h_1} \ldots \partial x_{h_r}} \right) dx , \tag{5.4}$$

ove il prodotto scalare sotto il segno integrale è definito dalle (5.3).

Sia $H^p(A)$ lo spazio completamento funzionale di $C^p(\bar{A})$ rispetto al prodotto scalare (5.4). Poiché il prodotto scalare (5.4) verifica le condizioni (5.1), dal teorema 5.I discende:

5.II. *I proiettori* P_{hk} *definiti dalle* (4.5), *riguardati come proiettori di* $H^p(A)$, *sono operatori di proiezione ortogonale.*

Osservazione. Il prodotto scalare definito da (5.4) dipende da $\{T_{\gamma_i}\}$ tramite la base B. Se $[u , v]_p$ è il prodotto scalare relativo ad un'altra rappresentazione $\{T'_{\gamma_i}\}$ e $H'^p(A)$ lo spazio corrispondente, $H^p(A)$ e $H'^p(A)$ sono isomorfi come spazi di Banach, nel senso che esistono due costanti c e c', con $0 < c \leq c'$, tali che

$$c\,[u , u]_p \leq ((u , u))_p \leq c'\,[u , u]_p . \tag{5.5}$$

6. In questo numero vengono caratterizzati gli operatori lineari integrali T-invarianti rispetto a G (6). Sia A limitato, L un operatore lineare integrale, definito nel sottospazio $C^0(\bar{A})$ di $W_m(A)$ e a valori in $C^0(\bar{A})$; le componenti di Lu nella base B e nel punto x siano

$$(Lu)^i(x) = \int_A k^i_j(x, y)\, u^j(y)\, dy\,, \tag{6.1}$$

con $k^i_j(x, y)$ funzioni continue in $\bar{A} \times \bar{A}$. Indicata con $K(x, y)$ la matrice di elementi $k^i_j(x, y)$, sussiste il Teorema:

6.I. *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'operatore* L *definito dalle* (6.1) *sia* T-*invariante rispetto a* G *è che la matrice* $K(x, y)$ *verifichi in ogni punto di* $\bar{A} \times \bar{A}$ *le condizioni*:

$$\tau(\gamma)\, K(x, \gamma)\, \tau^{-1}(\gamma) = K(\gamma x, \gamma y)\ ^{(7)}, \tag{6.2}$$

per ogni γ *di* G.

Dimostrazione. Per l'operatore L definito dalle (6.1) si ha:

$$(\Gamma L u)^i(x) = \tau^i_j(\gamma) \int_A k^j_s(\gamma^{-1}x, y)\, u^s(y)\, dy\,,$$

$$(L\Gamma u)^i(x) = \int_A k^i_j(x, y)\, \tau^j_s(\gamma)\, u^s(\gamma^{-1} y)\, dy =$$

$$= \int_A k^i_j(x, \gamma y)\, \tau^j_s(\gamma)\, u^s(y)\, dy\,.$$

Pertanto le condizioni (3.1) sussistono se e solo se per ogni $\gamma \in G$ sono verificate le relazioni

$$\tau^i_j(\gamma)\, k^j_s(\gamma^{-1} x, y) = k^i_j(x, \gamma y)\, \tau^j_s(\gamma) \qquad \text{in } \bar{A} \times \bar{A}\,,$$

ovvero, per l'arbitrarietà di x in $\bar{A}$, le (6.2).

Il Teorema 6.I sussiste in ipotesi più generali sul nucleo $K(x, y)$; vale ad es. un Teorema analogo al Teorema II del n. 7 di [2].

7. In questo numero vengono caratterizzati gli operatori differenziali lineari T-invarianti rispetto a G.

(6) In questo numero e nel successivo il gruppo G può anche essere infinito.

(7) Le (6.2) generalizzano le analoghe condizioni da me ottenute nei casi $m = 1$ e $m = n$; cfr. [2], n. 7. Il Teorema 6.I seguita a sussistere se le (6.2) sono verificate per i generatori di G.

Si consideri un operatore differenziale lineare L definito nel sottospazio $C^\infty(A)$ di $W_m(A)$, a valori in $W_m(A)$; le componenti di Lu nella base B e nel punto x siano date da

$$(L u)^i(x) = D^i_j(x)\, u^j(x) \tag{7.1}$$

con

$$D^i_j(x) = \sum_{s=0}^{p} a^{i,h_1\ldots h_s}_j(x) \frac{\partial^s}{\partial x_{h_1}\ldots\partial x_{h_s}} \qquad (i\,,j = 1\,,\ldots\,,m) \tag{7.2}$$ [8]

e $a^{i,h_1\ldots h_s}_j(x)$ funzioni continue in A. Sussiste il Teorema:

7.I. *L'operatore* L *definito dalle* (7.1) *e* (7.2) *è* T*-invariante rispetto a* G *se e solo se risultano verificate in ogni punto* x *di* A *e per ogni* $\gamma \in G$ *le relazioni*:

$$\mathop{\forall}_{s}^{0,p}\ \mathop{\forall}_{i,j}^{1,m}\ \mathop{\forall}_{h_1\ldots h_s}^{1,n}\ a^{i,h_1\ldots h_s}_j(\gamma x) = a^{l,t_1\ldots t_s}_k(x)\, \tau^i_l(\gamma)\, \gamma^{h_1}_{t_1}\ldots \gamma^{h_s}_{t_s}\, \tau^k_j(\gamma^{-1})\,. \tag{7.3}$$

Dimostrazione. Con un calcolo un po' laborioso, analogo a quello della dimostrazione del Teorema del n. 8 di [2], si verifica che le condizioni (7.3) equivalgono alle (3.1).

Le condizioni (7.3) si possono scrivere in una forma più elegante, introducendo m^2 funzioni così definite in $A \times \mathbf{R}^n$:

$$f^i_j(x\,,y) = \sum_{s=0}^{p} a^{i,h_1\ldots h_s}_j(x)\, y_{h_1}\ldots y_{h_s} \tag{7.4}$$

e la matrice $F(x\,,y)$ di ordine m e di elementi $f^i_j(x\,,y)$. Il Teorema 7.I è allora equivalente al seguente:

7.II. *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'operatore* L *definito da* (7.1) *e* (7.2) *sia* T*-invariante rispetto a* G, *è che la matrice* $F(x\,,y)$ *verifichi le condizioni*:

$$F(\gamma x\,,\gamma y) = \tau(\gamma)\, F(x\,,y)\, \tau^{-1}(\gamma)\,, \tag{7.5}$$

per ogni x *di* A, *ogni* y *di* $\mathbf{R}^n$ *e ogni* γ *di* G.

Osservazione. I Teoremi 7.I e 7.II seguitano a sussistere richiedendo che le condizioni (7.3) e (7.5) siano verificate dai generatori di G, anzichè da tutti gli elementi di G.

(8) A secondo membro delle (7.2) si sottintende una somma estesa a tutte le disposizioni con ripetizione $h_1 h_2 \ldots h_s$ di $1, \ldots, n$.

(9) Le (7.3) generalizzano le analoghe condizioni da me ottenute nei casi $m = 1$ e $m = n$: cfr. [2], n. 8. Si ricordi che $\tau(\gamma^{-1}) = \tau^{-1}(\gamma)$.

8. Si indica ora, a titolo di esempio, un'applicazione che mostra come la teoria esposta nel presente lavoro, già nel caso $m = n$, costituisca un progresso rispetto a quella in precedenza nota.

Sia $n = m = 2$ e A un quadrato simmetrico rispetto agli assi coordinati. Si consideri l'operatore differenziale L di componenti, in una base B fissata:

$$(8.1) \qquad \begin{aligned} (\mathrm{L}u)^1 &= \Delta_2 u^1 + a x_1 x_2 \left(\frac{\partial^2 u^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_2^2} \right), \\ (\mathrm{L}u)^2 &= \Delta_2 u^2 + b\,(x_1^2 - x_2^2) \frac{\partial^2 u^1}{\partial x_1 \partial x_2}, \qquad a^2 + b^2 > 0 \end{aligned}$$

e definito nel sottospazio $C^\infty(A)$ di $W_2(A)$ e a valori in $C^\infty(A)$. Il gruppo G di tutte le matrici ortogonali che mutano A in sè è costituito da

$$(8.2) \qquad \begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

esso ammette 5 rappresentazioni unitarie e irriducibili, non equivalenti, 4 di ordine uno e una di ordine due [(10)]; riesce quindi $M = 6$.

Fissata una rappresentazione lineare $\{T_{\gamma_i}\}$ di ordine 2 di G, lo spazio $C^\infty(A)$ può decomporsi in sei sottospazi $U_{hk}(A)$ invarianti per tutti gli operatori di $C^\infty(A)$ T-invarianti rispetto a G (n. 4). Esiste una rappresentazione $\{T_{\gamma_i}\}$ in corrispondenza alla quale i sottospazi $U_{hk}(A)$ sono invarianti per L? La risposta è affermativa: basta considerare la rappresentazione lineare $\{T'_{\gamma_i}\}$ definita, nella base B, dalle matrici:

$$(8.3) \qquad \tau'(\gamma_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega(\gamma_i) \end{pmatrix},$$

con $\omega(\gamma_i) = \{1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1\}$ e osservare che l'operatore L è T'-invariante rispetto a G (si applichi il Teorema 7.II). La costruzione dei sottospazi $U_{hk}(A)$ si ottiene facilmente con le formule (4.6).

Si noti che i sottospazi determinati dalla rappresentazione canonica $\{\tilde{T}_{\gamma_i}\}$ non sono tutti invarianti per L; ciò dipende dal fatto che L non appartiene a $\mathscr{L}(G, \tilde{T})$. Sono, invece, sottospazi invarianti per L quelli che corrispondono al sottogruppo G' di G costituito dalle matrici

$$(8.4) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(10) Le rappresentazioni di ordine uno sono: $\{1, 1, \ldots, 1\}$, $\{1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1\}$, $\{1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1\}$, $\{1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1\}$; una rappresentazione unitaria di ordine due è data da (8.2).

Pertanto, applicando la teoria di [2] e [5], si perverrebbe ad una decomposizione di $C^\infty(A)$ in 4 sottospazi invarianti, laddove la più ampia teoria riassunta in questa Nota consente la decomposizione di $C^\infty(A)$ in 6 sottospazi invarianti.

Bibliografia

[1] L. Bassotti (1973) – *Sottospazi invarianti per operatori differenziali lineari a coefficienti costanti*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », (2) *22*, 157-184.
[2] L. Bassotti Rizza (1979) – *Operatori lineari invarianti rispetto ad un gruppo di congruenze*, « Riv. Mat. Univ. Parma », (3) *5*, 453-470.
[3] G. Fichera (1965) – *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems*, « Lect. Notes Math. », *8*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York.
[4] V.I. Smirnov (1961) – *Linear algebra and group theory*, McGraw-Hill, New York-Toronto-London.
[5] G.F. Smith (1974) – *Projection operators for symmetric regions*, « Arch. Rat. Mech. Anal. », *54*, 161-174.
[6] N.Ja. Vilenkin (1969) – *Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes*, Dunod, Paris.