Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuliano Bratti

Classificazione dei domini di Hartogs A di C^2 che soddisfano l'equazione $H^2(A, C) = 0$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **79** (1985), n.5, p. 68–74.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1985_8_79_5_68_0>

Matematica. — *Classificazione dei domini di Hartogs* A *di* C^2 *che soddisfano l'equazione* $H^2(A, C) = 0$. Nota di GIULIANO BRATTI [(*)], presentata [(**)] dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

SUMMARY. — I give a characterization of the pseudoconvex Hartogs domains A in C^2 that satisfy the equation $H^2(A, C) = 0$, where $H^2(A, C)$ is the second cohomology group of A with coefficients in the constant sheaf C.

1. A sia un dominio d'olomorfia di C^n, [2], pag. 36 [(1)]; H (A) sia lo spazio di Fréchet delle funzioni olomorfe definite su A. Per ogni numero naturale $p > 0$, indicherò con $H^p(A, C)$ il p–esimo gruppo di coomologia di A a coefficienti nel corpo complesso C, [2], pag. 58; e con $H_p(A)$ il p–esimo gruppo di omologia singolare di A, [3], pag. 13.

Si sa che

$$H^p(A, C) \simeq \mathrm{Hom}(H_p(A), C) \tag{1}$$

in base a [4], pag. 59; e che: in base ai Teoremi A e B di Cartan-Serre, [1], pag. 51, risulta

$$H^p(A, C) \simeq C^p(A)/B^p(A) \tag{2}$$

[4], pag. 57 (dov'è scritto che la (1) e la (2) valgono di più in ipotesi più generali: esse valgono anche nel caso che A sia una varietà di Stein, [1], pag. 49), intendendo che: $C^p(A)$ sia il gruppo delle p–forme differenziali olomorfe e chiuse definite su A, e che $B^p(A) = d\{C^{p-1}(A)\}$, dove d è il differenziale esterno.

Dopo di [5], pag. 133, si sa che: se A è un dominio di Runge [2], pag. 57, allora $H^n(A, C) = 0$.

Scrivo questo breve articolo con lo scopo di classificare alcuni domini di Hartogs A *di* C^2 *che pur soddisfano all'equazione* $H^2(A, C) = 0$.

In generale, l'interesse d'una condizione topologica del tipo $H^n(A, C) = 0$, $A \subset C^n$, è riflesso dalla (2): si tratta, fra l'altro, d'una condizione caratteristica

(*) Indirizzo dell'Autore: Seminario Matematico dell'Università, Via Belzoni, 7 I–35131 Padova.

(**) Nella seduta del 22 novembre 1985.

(1) Indicazioni del tipo « (.) pag. . . . » rimandano, per definizioni e teoremi, a lavori indicati nella bibliografia.

per l'integrabilità olomorfa del sistema differenziale

$$\Sigma_k D_k (f_k) = f \tag{3}$$

con f in $H(A)$; nella (3) D_k sta per $\partial/\partial z_k$.

2. A_1 ed A_2 sian due aperti di C; $A = A_1 \times A_2$ è un dominio d'olomorfia di C^2.

È (abbastanza) facile controllare, via l'integrabilità di (3) e via il Teorema di Künneth, [3], pag. 134, che le seguenti proposizioni sono equivalenti:

a) $H^2(A, C) = 0$;

b) *uno almeno degli* A_k *è un dominio di Runge*;

c) $H_2(A) \simeq H_2(A_h)$, *se l'*A_h *è l'altro fattore di* A.

Non ne dò la dimostrazione, poiché essa è essenzialmente contenuta in quella del prossimo teorema.

3. Sia B un aperto di C, e sian r, $R : B \rightarrow R$ due funzioni tali che $\forall z$ in $B : 0 < r(z) < R(z)$.

DEFINIZIONE 1.

a) $A = \{(z_1, z_2) \in C^2 : |z_1| < R(z_2)\}$ *è un dominio di Hartogs, che contiene i punti del piano di simmetria* $z_1 = 0$.

b) $A = \{(z_1, z_2) \in C^2 : r(z_2) < |z_1| < R(z_2)\}$ *è un dominio di Hartogs, privo dei punti del piano di simmetria.*

Condizioni necessarie e sufficienti al fine che A come nella Def. 1. sia anche un dominio d'olomorfia son date in [6], pag. 106.

Se $A \subset C^2$ è un qualsiasi dominio d'olomorfia, porrò

$$G_k(A) = \{f \in H(A) : \exists s \text{ in } N : D_k^s f = 0\};$$

è ovvio che la densità di $G_k(A)$ in $H(A)$ implichi che $H^2(A, C) = 0$ (è la dimostrazione di (5)); dunque, nel caso che A sia un dominio di Hartogs come in *a*) della Definizione 1. si ha senz'altro $H^2(A, C) = 0$, per l'ovvio motivo che si ha $D_1\{H(A)\} = H(A)$.

D'ora in poi, mi occuperò solo dei domini di Hartogs, che sono pure domini d'olomorfia, del tipo *b*) della definizione 1.; per essi è possibile una completa estensione delle equivalenze di 2).

4. Sia A un dominio di Hartogs di C^2; A sia anche un dominio d'olomorfia. A soddisfi alle seguenti due condizioni:

i) $r + R : B \rightarrow R$ *è continua*;

ii) *per ogni curva continua* $\rho : [0, 1] \to B$, *esista* z_ρ *in* C *tale che per ogni* t *in* $[0, 1]$ *si abbia*

$$r(\rho(t)) < |z_\rho| < R(\rho(t)).$$

TEOREMA. *Per i domini di Hartogs come sopra, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) $H^2(A, C) = 0$;

b) B *è un dominio di Runge*;

c) $\forall K \Subset A$

$$\hat{K}_A(D_2) = \{z^0 \in A : |f(z^0)| \leq \sup_{z \in K} |f(z)|, \forall f \in G_2(A)\}$$

è compatto in A;

d) A *è un dominio di Runge rispetto a* $\pi_1(A) \times B$; *e* B *è di Runge*;

e) *per ogni n-upla di polinomi omogenei*, $P_1, P_2, \ldots, P_n$, $n \geq 2$, *primi tra di loro il sistema differenziale*

$$\Sigma_k P_k(D_1, D_2) f_k = f$$

è risolubile in H(A), *per ogni* f *in* H(A);

f) $H_2(A) = 0$.

Osservazione. S'è posto $\pi_k : C^2 \to C$ definita da $\pi_k(z_1, z_2) = z_k$.

Si osservi inoltre che la *c*) del paragrafo 2) corrisponde esattamente alla *f*) del teorema: in verità, dimostrerò che $H_2(A) \simeq H_2(\pi_1(A)) = 0$.

Dimostrazione. *a*) implica *b*).

Se B non fosse un dominio di Runge, esisterebbe una curva $\rho : [0, 1] \to B$, chiusa e con derivata continua, tale che se K_ρ è il compatto che essa limita, esiste z_2^0 in $K \cap (C \setminus B)$. Sia z_ρ in C tale che soddisfi alla precedente condizione ii) per A. È ovvio che il compatto

$$(|z_\rho| e^{iu}, \rho(t))$$

(u, t) in $[0, 2\pi] \times [0, 1]$ sia contenuto in A, e dunque ha senso definire il funzionale $\mu : H(A) \to C$ così:

$$\langle \mu \cdot f \rangle = \int_0^1 \rho'(t)\, dt \left[\int_0^{2\pi} f(|z_\rho| e^{iu} \rho(t)) e^{iu}\, du \right].$$

Poiché $H^2(A, C) = 0$, ogni f di $H(A)$ si scrive: $f = D_1 g + D_2 h$, (g, h) in $H(A)^2$; ovvero, dovrebbe esser $\mu = 0$, mentre

$$\langle \mu \cdot 1/z_1 (z_\rho - z_2^0) \rangle = (2\pi)/|z_\rho| \int_\rho dz_2 / (z_2 - z_2^0) \neq 0 .$$

b) implica *d*).

Si tratta di dimostrare che la restrizione

$$H(\pi_1(A) \times B) \rightarrow H(A)$$

ha immagine densa. Ora, se $(\sigma(t), z_2)$ è una curva chiusa contenuta in A vale lo sviluppo

$$f(z_1, z_2) = \sum_{\infty}^{\infty}{}_n \, c_n \varphi_n(z_2)$$

per ogni f in $H(A)$, dove i coefficienti c_n sono calcolati nello sviluppo di Laurent, [6], pag. 130, e le φ_n appartengono a $H(B)$. Ciò dimostra che $G_2(A)$ è denso in $H(A)$, poiché B è un dominio di Runge; e poiché è ovvio che $G_2(A)$ sia contenuto in $H(\pi_1(A) \times B)$ se ne ha la tesi.

d) implica *a*). La cosa è ovvia, poiché $H^2(\pi_1(A) \times B) = 0$.

a) implica *c*).

Poiché $G_2(A)$ è denso in $H(A)$, la copertura analitica di $K \Subset A$, $\hat{K}_A$ [2], pag. 37, coincide con la $\hat{K}_A(D_2)$.

c) implica *a*).

Se B non fosse un dominio di Runge, posto che ρ sia la curva come nella dimostrazione *a*) implica *b*), si avrebbe

$$(z_\rho, \rho(t)) \Subset A$$

mentre

$$(z_\rho, \rho(t))_{\hat{A}}(D_2) = z_\rho \times K \Subset A ,$$

(teorema del massimo modulo).

f) implica *a*).

È ovvio, vista la (1) del paragrafo 1).

a) implica *f*).

Per ogni z_2 in B la curva $(((r(z_2) + R(z_2)/2) e^{iu}, z_2)$ sta in A. Sia, per brevità, $(r(z_2) + R(z_2)/2) e^{iu} = \rho(z_2, u)$; e sia

$$G : A \rightarrow \bigsqcup (\rho(z_2, u), z_2), z_2 \text{ in } B) = A'$$

definita da

$$G(z_1, z_2) = (|\rho(z_2, u)|\, z_1 / |z_1|, z_2);$$

G è una retrazione continua di A su A'; sicché la

$$F : [0, 1] \times A \to A$$

definita da $F(t, (z_1, z_2)) = ((1 - t)\, z_1 + t\, |\rho(z_2, u)|\, z_1 / |z_1|, z_2)$, è una deformazione continua che retrae A su A', visto che

$$F(0, (z_1, z_2)) = (z_1, z_2)$$
$$F(1, (z_1, z_2)) = G(z_1, z_2).$$

In base a [1] pag. 21, l'omologia di A e quella di A' coincidono; in particolare $H_2(A) \cong H_2(A')$; ora, visto che se $\sigma(u) = e^{iu}$, u in R, A' è omeomorfo a $\sigma \times B$, in virtù del già citato Teorema di Künneth, risulta, visto che B è un dominio di Runge

$$H_2(A) \cong H_2(\sigma \times B) \cong H_2(\pi_1(A)) = 0.$$

Resta, per ultima, la dimostrazione dell'equivalenza fra *a*) ed *e*). Poiché è ovvio che *e*) implichi *a*), ponendo $P_1 = D_1$ e $P_2 = D_2$, dimostrerò ora che *a*) implica *e*).

L'ipotesi *a*) implica che l'applicazione lineare

$$g : (H(A)^2) \to H(A)$$

definita da $g(f_1, f_2) = D_1 f_1 + D_2 f_2$ è suriettiva, e quindi, in base al Teorema sulle suriezioni fra spazi di Fréchet si ha:

i) se δ sta in $H'(A)$ (duale di $H(A)$) e $D_1\delta = D_2\delta = 0$, allora $\delta = 0$;

ii) la ${}^t g : H'(A) \to (H'(A)^2)$ ha immagine debolmente chiusa.

Sia

$$G : (H(A)^n) \to H(A)$$

definita da $G(f_1, \ldots, f_n) = \Sigma_k P_k(D_1, D_2) f_k$; senza ledere la generalità si può supporre che i P_k abbian tutti lo stesso grado. Sia $\deg(P_k) = 1$; se ${}^t G(\delta) = 0$ risulta subito che $D_1\delta = D_2\delta = 0$; il che dimostra che la G ha immagine densa. La fattorizzazione dei P_k in fattori lineari, permette di concludere che la G ha sempre immagine densa.

Sia $\lim_n {}^t G(\beta_n) = \lim_n ({}^t P_k(\beta_n)) = (q_k)$ in $(H'(A)^n)$, ancora con $\deg(P_k) = 1$; si controlla subito che

$$q_k = {}^t P_k(\nu),\ \nu \text{ in } H'(A); \text{ e che: } \lim_n \beta_n = \nu \text{ in } H'(A).$$

Se $\deg(P_k) = r + 1$, e se $\lim_n {}^tG(\beta_n) = (q_k)$, sempre in $(H'(A)^n)$, posto ${}^tP_k = R_k S_k$, con $\deg(R_k) = 1$, risulta

$$\begin{cases} \lim_n S_k(R_h R_k(\beta_n)) = R_h(q_k) \\ \lim_n S_h(R_h R_k(\beta_n)) = R_k(q_h) \end{cases}$$

con $h \neq k$, che danno, in base all'ipotesi induttiva:

$$\begin{cases} R_h(q_k) = S_k(\theta) \\ R_k(q_h) = S_h(\theta) \end{cases}$$

e

$$\lim_n R_h R_k(\beta_n) = \theta \quad , \quad \text{con } \theta \text{ in } H'(A) .$$

Ancora in base all'ipotesi induttiva, risulta che i limiti

$$\begin{cases} \lim_n R_h R_k(\beta_n) = \theta \\ \lim_n S_h(R_h(\beta_n)) = q_h \end{cases}$$

implicano che: $\theta = R_k(\tau)$, $q_h = S_h(\tau)$, con τ in $H'(A)$, ed inoltre che

$$\lim_n R_h(\beta_n) = \tau ;$$

dunque, si ha pure

$$\begin{cases} \theta = R_h(\sigma) \\ q_k = S_k(\sigma) \\ \lim_n R_k(\beta_n) = \sigma , \end{cases}$$

con σ in $H'(A)$; in base alla prima parte della dimostrazione, segue che

$$\begin{cases} \tau = R_h(\xi) \\ \sigma = R_k(\xi) \end{cases}$$

con ξ in $H'(A)$. In definitiva: $q_k = {}^tP_k(\xi)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. E ciò conclude la dimostrazione.

Bibliografia

[1] H. Cartan (1953) – *Variétées analytiques complexes et cohomologie*, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, CBRM, Bruxelles.
[2] L. Hormander (1973) – *An introduction to complex analysis in several variables*, North Holland/American Elsevier.
[3] W.S. Massey (1980) – *Singular homology theory*, Springer-Verlag.
[4] J–P. Serre (1953) – *Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein*, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, CBRM, Bruxelles.
[5] J–P. Serre (1966) – *Une propriété topologique des domaines de Runge*, « Proc. Amer. Math. Soc. », (6).
[6] V.S. Vladimirov (1966) – *Methods of the theory of the functions of many complex variables*, « The M.I.T. », Press, 1966.