ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ENNIO DE GIORGI, MARCO FORTI

Una teoria-quadro per i fondamenti della matematica

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 79 (1985), n.5, p. 55–67.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1985_8_79_5_55_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 22 novembre 1985

Presiede il Presidente della Classe EDOARDO AMALDI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Una teoria-quadro per i fondamenti della matematica* (*). Nota di ENNIO DE GIORGI e MARCO FORTI, presentata (**) dal Corrisp. E. DE GIORGI.

SUMMARY. — We propose a “natural” axiomatic theory of the Foundations of Mathematics (Theory Q) where, in addition to the membership relation (between elements and classes), pairs, sets, natural numbers, n -tuples and operations are also introduced as primitives by means of suitable ground classes. Moreover, the theory Q allows an easy introduction of other mathematical and logical entities.

The theory Q is finitely axiomatized in § 2, using a first-order language with a binary relation $\in$ (membership) and five constants *Kur*, *Ins*, *gsuc*, *Grpl*, *Grop* (ground classes), and it is shown to be equiconsistent with Gödel-Bernays class theory; in fact, in § 3; both these theories are mutually interpreted inside each other.

§ 1. INTRODUZIONE

Scopo di questa Nota è proporre una teoria dei fondamenti della matematica che, pur seguendo nelle grandi linee la classica presentazione insiemistica di Von Neumann-Bernays-Gödel, della quale conserva la finita assiomaticizzabilità, se ne distacca in due punti essenziali: primo, ammette l'esistenza di molti elementi (detti con Zermelo *urelementi*) che non sono insiemi o classi, ma nep-

(*) Ricerca parzialmente finanziata da 40% e 60% M.P.I.

(**) Nella seduta del 22 novembre 1985.

pure semplici atomi privi di proprietà, potendo essere altri oggetti fondamentali della matematica (coppie, numeri naturali, n -ple, operazioni); secondo, rinunciando all'assioma di fondazione, non esclude che molte « grandi » classi (l'universo, l'appartenenza, ecc.) e « grandi » operazioni (la composizione, l'applicazione, ecc.) siano anche elementi e quindi possano appartenere ad insiemi ed essere componenti di n -ple.

La prima caratteristica ci pare auspicabile perché intendiamo proporre una teoria « naturale », in cui definizioni ed assiomi siano il più possibile vicini alla tradizione più antica, all'intuizione comune ed al linguaggio corrente della pratica matematica, evitando l'artificialità di una codificazione che ai principali oggetti matematici (come numeri naturali, coppie e operazioni) sostituisce loro modelli ottenuti attraverso ingegnose costruzioni insiemistiche; ci preme poi in particolare distinguere la nozione di *operazione* da quella di grafico, onde poter inquadrare direttamente nella nostra trattazione anche molte importanti teorie non estensionali (funzioni ricorsive, λ -calcolo, ecc.).

Notiamo anche che la nozione di *coppia* introdotta come concetto primitivo può essere facilmente generalizzata a quella di n -pla, in modo da ottenere senza ambiguità n -ple per ogni scelta di n , compresi i casi $n = 1$ ed $n = 0$, nonché di precisare meglio le nozioni di potenza di una classe e di prodotto cartesiano, distinguendo, per esempio, $A^1 \times A^n$ da $A^n \times A^1$ e da A^{n+1} .

Rimane inoltre aperta la possibilità di « attivare » altri urelementi ogniqualvolta si vogliano introdurre come primitivi altri concetti fondamentali della matematica e della logica (come categorie, strutture, variabili, proprietà o qualità, ecc.).

La seconda scelta permette, in primo luogo, una maggiore disinvoltura nel trattare il postulato di *fondazione* ed i principi di *libera costruzione*: per esempio, si può conservare la fondazione per gli insiemi ed ammettere nel contempo l'esistenza di operazioni che agiscono su se stesse e/o di « autocopie » del tipo $x = (x, x)$, ma anche, invece, ammettere solo coppie ben fondate ma accettare « autosingoli » $x = \{x\}$ (vedi [4], [1]).

In secondo luogo, rinunciando agli assiomi di fondazione si può ammettere l'esistenza di « grandi » *classi* che sono *elementi*, ma non *insiemi*, e sono di notevole interesse nello studio dei problemi di *autoriferimento*; tale possibilità sarà utilizzata in [3], ove introdurremo nella teoria-quadro qui delineata parecchi « assiomi di autoriferimento » che postulano l'esistenza, come « operazioni urelementari », di molte comuni operazioni matematiche (composizione, inversione e trasposizione di funzioni, unione, intersezione e differenza di classi, ecc.) ed implicano la presenza di molti elementi che sono classi notevoli (l'universo, l'appartenenza, ecc.).

Notiamo ancora che la teoria-quadro che presentiamo è *finitamente assiomaticizzata* e quindi, non facendo uso di schemi di assiomi, richiede per la sua lettura e comprensione il minimo di prerequisiti e concetti linguistici; la sua *consistenza*, infine, diversamente da quella delle estensioni proposte in [3], segue facilmente da quella di ZF: vedremo infatti nel terzo paragrafo come sia possi-

bile costruirne un modello all'interno della teoria ABCD di Gödel–Bernays (vedi [5]).

È impossibile citare qui tutta la bibliografia cui questa nota è più o meno strettamente collegata; limiteremo dunque le citazioni ai soli testi necessari per un riferimento diretto. Ci preme invece sottolineare che il problema di una teoria–quadro per i fondamenti della matematica, adatta anche ad una formulazione naturale dei problemi di autoriferimento, universalità e libera costruzione, è stato ampiamente discusso a partire dai primi anni '80, nell'ambito del corso De Giorgi presso la Scuola Normale Superiore di Pisa (vedi [2]). Ringraziamo quindi tutti i partecipanti ed in particolare ricordiamo M. Boffa, M. Clavelli, F. Honsell, G. Longo e M. Sciuto che hanno portato e continuano a portare contributi allo sviluppo della teoria.

§ 2. GLI ASSIOMI DELLA TEORIA–QUADRO Q

Esporremo la nostra teoria–quadro Q in modo semiformale, facendo precedere ogni gruppo di assiomi da qualche considerazione intuitiva; gli assiomi, in numero finito, sono espressi nel consueto linguaggio del primo ordine con un simbolo di relazione binaria $\in$ (da interpretarsi come l'*appartenenza* di un *elemento* ad una *classe*) e cinque costanti *Kur*, *Ins*, *gsuc*, *Grpl*, *Grop* (da interpretarsi con le *classi fondamentali* che introducono e qualificano *coppie*, *insiemi*, *numeri naturali*, *n–ple* e *operazioni*).

Espliciteremo man mano tutte le definizioni utilizzate, anche allo scopo di fissare le notazioni, per cui cercheremo, nei limiti del possibile, di attenerci alle convenzioni più diffuse.

In generale useremo il carattere **grassetto** per i *predicati* definiti (essere classe, elemento, ecc.), mentre il carattere *italico* sarà riservato agli *oggetti* studiati (classi, elementi, ecc.); ci varremo invece della consueta libertà matematica nell'uso di caratteri maiuscoli, minuscoli, greci, ecc. per indicare classi, elementi, operazioni, ecc.

2.1. *Elementi, classi e insiemi.*

Gli assiomi di questa sezione esprimono l'idea che gli oggetti studiati dalla teoria Q sono *elementi* (**El**) oppure *classi* (**Cl**); che alcune classi, dette *classi elementari*, sono anche elementi (**Cl_{el}**), mentre altre, dette *classi proprie*, non lo sono (**Cl_{pr}**); che alcuni elementi, detti (con Zermolo) *urelementi*, non sono classi (**Ur**).

Classi elementari particolarmente « maneggevoli » sono gli *insiemi*, che costituiscono la *classe fondamentale* *Ins*.

Le classi godono della proprietà di *estensionalità* (assioma Q 2) e sono stabili per *unione* binaria e *complemento* (assioma Q 3).

DEFINIZIONE 1.

$\mathbf{El} x \Leftrightarrow \exists y (x \in y)$	$(x \text{ è un elemento})$
$\mathbf{Cl} x \Leftrightarrow \exists y (y \in x) \vee x \in \text{Ins}$	$(x \text{ è una classe})$
$\mathbf{Cl} \mathbf{el} x \Leftrightarrow \mathbf{El} x \ \& \ \mathbf{Cl} x$	$(x \text{ è una classe elementare})$
$\mathbf{Ur} x \Leftrightarrow \mathbf{El} x \ \& \ \neg \mathbf{Cl} x$	$(x \text{ è un urelemento})$
$\mathbf{Trans} x \Leftrightarrow \mathbf{Cl} x \ \& \ \forall y, z (z \in y \ \& \ y \in x \rightarrow z \in x)$	$(x \text{ è una classe transitiva})$
$x \subseteq y \Leftrightarrow \mathbf{Cl} x \ \& \ \mathbf{Cl} y \ \& \ \forall z (z \in x \rightarrow z \in y)$	$(x \text{ è incluso in } y)$
$\mathbf{Cl} y \ \& \ x = -y \Leftrightarrow \mathbf{Cl} x \ \& \ \forall z (z \in x \leftrightarrow z \notin y)$	$(x \text{ è il complemento di } y)$
$x = y \cap z \Leftrightarrow \mathbf{Cl} x, y, z \ \& \ \forall t (t \in x \leftrightarrow t \in y \ \& \ t \in z)$	$(x \text{ è l'intersezione di } y \text{ e } z)$
$x = y \cup z \Leftrightarrow \mathbf{Cl} x, y, z \ \& \ \forall t (t \in x \leftrightarrow t \in y \vee t \in z)$	$(x \text{ è l'unione di } y \text{ e } z)$
$\mathbf{Cl} y, z \ \& \ x = y - z \Leftrightarrow \mathbf{Cl} x \ \& \ \forall t (t \in x \leftrightarrow t \in y \ \& \ t \notin z)$	$(x \text{ è la differenza di } z \text{ da } y)$
$x = \{y\} \Leftrightarrow \forall t (t \in x \leftrightarrow t = y)$	$(x \text{ è il singolo di } y)$
$x = \{y, z\} \Leftrightarrow \forall t (t \in x \leftrightarrow t = y \vee t = z)$	$(x \text{ è il duetto di } y \text{ e } z).$

ASSIOMA Q 1. *Ci sono solo classi ed elementi.*

$$(Q 1) \quad \forall x (\mathbf{Cl} x \vee \mathbf{El} x).$$

ASSIOMA Q 2. *Classi cui appartengono gli stessi elementi sono uguali.*

$$(Q 2) \quad X \subseteq Y \ \& \ Y \subseteq X \rightarrow X = Y \quad (\text{assioma di estensionalità}).$$

Dall'assioma di estensionalità segue che unione, intersezione, duetto, ecc., *se esistono*, sono *univocamente determinati*; quindi, ad esempio, il duetto $\{x, x\}$ è uguale al singolo $\{x\}$. A garantire l'*esistenza* servono gli assiomi seguenti.

ASSIOMA Q 3. *Ogni classe ha complemento e due classi hanno sempre intersezione.*

$$(Q 3.1) \quad \mathbf{Cl} X \rightarrow \exists Y (Y = -X).$$

$$(Q 3.2) \quad \mathbf{Cl} X \ \& \ \mathbf{Cl} Y \rightarrow \exists Z (Z = X \cap Y).$$

Dall'assioma Q 3 segue che vi è la *classe vuota* $\emptyset$ priva di elementi e la *classe universale* V di tutti gli elementi e che due classi hanno sempre l'*unione* e la *differenza*.

Si noti che dalle definizioni date segue che gli *insiemi* sono *classi elementari*, i.e. $x \in \text{Ins} \rightarrow \mathbf{Cl} \mathbf{el} x$.

2.2. *Coppie e grafici.*

Partiremo dall'idea che la nozione di coppia sia primitiva e indicheremo con (x, y) la *coppia* che ha x come *primo* e y come *secondo elemento*. Dunque le coppie nella teoria **Q** saranno urelementi da non confondersi con i *duetti*, che sono insiemi, ed in particolare con i *duetti* di Kuratowski (insiemi del tipo $\{\{x\}, \{x, y\}\}$).

Il collegamento fra le coppie e i duetti di Kuratowski è assicurato dalla *classe fondamentale Kur* cui appartengono (assioma **Q 4**) tutti e soli i duetti $\{(x, y), \{\{x\}, \{x, y\}\}\}$.

Le *classi di coppie* rivestono un particolare interesse in quanto possono essere considerate i *grafici di relazioni fra elementi (Grel)*; fra di esse si possono caratterizzare i *grafici funzionali (Gfun)* e quelli *iniettivi (Gfinj)*.

L'assioma **Q 5** garantisce l'*esistenza dei grafici* delle più importanti relazioni ed operazioni, mentre l'assioma **Q 6** completa le proprietà di *stabilità* delle classi.

ASSIOMA **Q 4**. *Esiste ed è unica la coppia di due qualunque elementi.*

$$(Q 4.1) \quad \mathbf{El} x \ \& \ \mathbf{El} y \rightarrow \exists u (\mathbf{Ur} u \ \& \ \{u, \{\{x\}, \{x, y\}\}\} \in Kur).$$

$$(Q 4.2) \quad z \in Kur \rightarrow \exists u, x, y (\mathbf{Ur} u \ \& \ \{u, \{\{x\}, \{x, y\}\}\} = z).$$

$$(Q 4.3) \quad x \in Kur \ \& \ y \in Kur \ \& \ x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset.$$

L'esistenza ed unicità delle coppie permette di introdurre le nozioni seguenti:

DEFINIZIONE 2.

$$u = (x, y) \Leftrightarrow \{u, \{\{x\}, \{x, y\}\}\} \in Kur$$

(u è la *coppia* di *primo elemento* x e di *secondo elemento* y)

$$z = x \times y \Leftrightarrow \mathbf{Cl} x, y, z \ \& \ \forall t (t \in z \leftrightarrow \exists u \in x \ \exists v \in y (t = (u, v)))$$

(z è il *prodotto cartesiano* di x ed y)

$$z = \hat{x}(y) \Leftrightarrow \mathbf{Cl} x, y, z \ \& \ \forall t (t \in z \leftrightarrow \exists u \in y ((u, t) \in x))$$

(z è l'*immagine* di y mediante la classe x)

$$\mathbf{Grel} x \Leftrightarrow \mathbf{Cl} x \ \& \ \forall u \in x \ \exists y, z (u = (y, z))$$

(x è un *grafico relazionale* o semplicemente *grafico*)

$$\mathbf{Gfun} x \Leftrightarrow \mathbf{Grel} x \ \& \ \forall u, v, w ((u, v) \in x \ \& \ (u, w) \in x \rightarrow v = w)$$

(x è un *grafico funzionale*)

$$\mathbf{Gfinj} x \Leftrightarrow \mathbf{Gfun} x \ \& \ \forall u, v, w ((u, v) \in x \ \& \ (w, v) \in x \rightarrow u = w)$$

(x è un *grafico funzionale iniettivo*)

ASSIOMA Q 5. *Esistono i seguenti grafici relazionali:*

$$(Q 5.1) \quad E = \{(x, y) \mid \mathbf{E}l x, y \ \& \ x \in y\}$$

(il grafico dell'appartenenza di un elemento ad una classe elementare)

$$(Q 5.2) \quad Gp_1^2 = \{((x, y), x) \mid \mathbf{E}l x, y\}$$

(il grafico della prima proiezione di coppie)

$$(Q 5.3) \quad Ginv = \{((x, y), (y, x)) \mid \mathbf{E}l x, y\}$$

(il grafico dell'inversione di coppie)

$$(Q 5.4) \quad Gsc = \{(((x, y), z), (x, (y, z))) \mid \mathbf{E}l x, y, z\}$$

$$(Q 5.5) \quad Gsc' = \{(((x, y), z), ((x, z), y)) \mid \mathbf{E}l x, y, z\}$$

(i grafici degli scambi di coppie composte).

ASSIOMA Q 6. *Esistono sempre il prodotto cartesiano di due classi e l'immagine dell'una mediante l'altra.*

$$(Q 6.1) \quad \mathbf{C}l X \ \& \ \mathbf{C}l Y \rightarrow \exists Z (Z = X \times Y).$$

$$(Q 6.2) \quad \mathbf{C}l X \ \& \ \mathbf{C}l Y \rightarrow \exists Z (Z = \hat{X}(Y)).$$

Si noti che dall'assioma Q 4 segue che il *duetto* di elementi qualsiasi esiste sempre ed è una classe elementare; per questa ragione abbiamo ommesso il consueto assioma del duetto nella sezione 2.1. Che tutti i duetti sono *insiemi* seguirà poi dall'assioma di rimpiazzamento (vedi sezione 2.3).

È facile vedere che, a parte l'uso delle coppie primitive al posto dei duetti di Kuratowski, gli assiomi Q 1-Q 6 sono sostanzialmente quelli dei gruppi A B della teoria di Von Neumann-Bernays-Gödel (vedi [5]): naturalmente l'estensionalità è data in modo da permettere l'esistenza di urelementi.

Sarebbe quindi possibile formulare e dimostrare a partire dagli assiomi Q 1-Q 6 un *principio di comprensione predicativa* per classi («teorema di Bernays»); preferiamo invece limitarci ad elencare (fissando nel contempo la notazione) le classi che ci serviranno nel seguito: la loro esistenza è, in ogni caso, facilmente deducibile dagli assiomi.

Esistono le seguenti classi:

$$V \times V = V^2 \quad (\text{la classe delle coppie})$$

$$Gid = \{(x, x) \mid x \in V\} \quad (\text{il grafico dell'identità o dell'uguaglianza})$$

$$Gp_2^2 = \{((x, y), y) \mid x, y \in V\} \quad (\text{il grafico della seconda proiezione di coppie})$$

$$Clcl = \{x \mid \mathbf{C}lel x\} \quad (\text{la classe delle classi elementari})$$

$$Grel = \{x \in V \mid \mathbf{G}rel x\} \quad (\text{la classe dei grafici elementari})$$

$Gfun = \{x \in V \mid Gfun\ x\}$ (la classe dei *grafici funzionali elementari*)

$Gfinj = \{x \in V \mid Gfinj\ x\}$ (la classe dei *grafici iniettivi elementari*).

Se X è una classe qualsiasi, vi sono anche le classi:

$\cup X = \{y \mid \exists x \in X (y \in x)\}$ (l'*unione* delle classi appartenenti a X)

$\cap X = \{y \mid \forall x \in X (y \in x)\}$ (l'*intersezione* delle classi appartenenti a X)

$\mathcal{P}(X) = \{y \in Clel \mid y \subseteq X\}$ (la classe delle *parti o potenza* di X)

$TC(X) = \{y \mid \forall t (\mathbf{Trans}\ t \ \& \ t \supseteq X \rightarrow y \in t)\}$ (la *chiusura transitiva* di X).

Se G è un grafico relazionale, vi sono le classi

$Img\ G = \hat{G}(V)$ (l'*immagine* di G)

$Dom\ G = (Gp_1^2) \wedge (G)$ (il *dominio* di G)

$G^{-1} = (Ginv) \wedge (G)$ (il *grafico inverso* di G)

e, per ogni elemento x

$\tilde{G}(x) = \{y \mid (x, y) \in G\} = \hat{G}(\{x\})$ (la *fibra* di G in x).

Se F e G sono grafici, vi sono anche i grafici

$F \circ G = \{(x, y) \mid \exists z ((x, z) \in G \ \& \ (z, y) \in F)\}$ (la *composizione* di F e G)

$\langle F, G \rangle = \{(x, (y, z)) \mid (x, y) \in F \ \& \ (x, z) \in G\}$ (il *prodotto fibrato* di F e G).

Si noti che $\langle F, G \rangle$ è caratterizzato dalla proprietà

$$\langle \tilde{F}, \tilde{G} \rangle (x) = \tilde{F}(x) \times \tilde{G}(x) \quad \text{per ogni } x.$$

Seguendo l'uso corrente, scriveremo in genere $y = F(x)$ in luogo di $(x, y) \in F$ quando F è un grafico funzionale.

2.3. *Insiemi.*

Come accennato nella sezione 2.1 gli *insiemi* sono classi elementari particolarmente maneggevoli. L'idea che gli insiemi possono essere maneggiati « facilmente e senza rischi » è espressa dai postulati di questa sezione, che sono sostanzialmente identici a quelli del gruppo C di [5].

Si ricordi, però, che dalle nostre definizioni segue soltanto l'inclusione $Ins \subseteq Clel$, e quindi *non* si è assunto che gli *insiemi* sono *tutte* le *classi elementari*, ma li si è introdotti mediante la *classe fondamentale* Ins . Di fatto quasi tutti gli assiomi che introduciamo in [3] implicano l'esistenza di classi notevoli che sono elementi, ma non possono consistentemente appartenere a Ins .

ASSIOMA Q 7. *La classe degli insiemi è stabile per rimpiazzamento, unione e potenza.*

$$(Q 7.1) \quad x \in Ins \ \& \ \mathbf{Gfun} \ F \rightarrow \hat{F}(x) \in Ins \quad (\text{assioma di rimpiazzamento})$$

$$(Q 7.2) \quad x \in Ins \cap \mathcal{P}(Ins) \rightarrow \cup x \in Ins \quad (\text{assioma dell'unione})$$

$$(Q 7.3) \quad x \in Ins \rightarrow \mathcal{P}(x) \in Ins \quad (\text{assioma dell'insieme potenza}).$$

ASSIOMA Q 8. *Esiste un insieme chiuso per aggiunta di singolo cui appartiene il $\emptyset$.*

$$(Q 8) \quad \exists x \in Ins (\emptyset \in x \ \& \ \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)) \quad (\text{assioma dell'infinito}).$$

Come accennato nella sezione 2.2, abbiamo ommesso l'assioma del *duetto* che segue da Q 4.1, Q 7.1 e Q 8. Si noti inoltre che non sono stati inseriti né l'assioma di *scelta* né quello di *fondazione*.

Di fatto l'assioma di scelta per *insiemi* diviene *deducibile* nella teoria Q se, p. es., si assume l'esistenza di un'operazione che associa ad ogni operazione urelementare una sua *inversa destra* (vedi sotto, sez. 2.6 e [3]).

Al contrario buona parte degli assiomi della nota [3] sono *incompatibili* con la *fondazione*, ove si tenga conto che tutti i singoli e i duetti sono insiemi anche se ad essi appartengono « grandi » classi elementari che insiemi non sono; in effetti non è neppure possibile dimostrare che la *chiusura transitiva* di un *insieme* è a sua volta un *insieme*. Risultano pertanto utili le seguenti classi:

DEFINIZIONE 3.

$$Itrans = \{x \in Ins \mid \mathbf{Trans} \ x\} \quad (\text{gli insiemi transitivi})$$

$$Ibtrans = \{x \in Itrans \mid \forall y \in \mathcal{P}(x) - \mathcal{P}(Ur) \exists z \in y (z \cap (y - Ur) = \emptyset)\} \\ (\text{gli insiemi ben transitivi})$$

$$Ifond = \{x \in Ins \mid TC(x) \in Ins\} \quad (\text{gli insiemi fondati})$$

$$Ibfond = \{x \in Ins \mid TC(x) \in Ibtrans\} \quad (\text{gli insiemi ben fondati}).$$

2.4. Numeri naturali.

Come preannunciato non intendiamo identificare i numeri naturali con gli *ordinali finiti* di Von Neumann. I *numeri naturali* saranno dunque un insieme di urelementi $\mathbf{N}$, le cui proprietà sono espresse dagli *assiomi di Peano*; il collegamento con la teoria degli insiemi è assicurato dalla *classe fondamentale gsuc* (il grafico dell'operazione-*successore*): *gsuc* è un insieme per il quale si assumono gli assiomi Q 9 e Q 10.

ASSIOMA Q 9. *gsuc è un grafico funzionale iniettivo ed un insieme di coppie di urelementi (che non sono coppie).*

$$(Q 9) \quad gsuc \in Gfinj \cap Ins \cap \mathcal{P}((Ur - V^2)^2).$$

L'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali è il *dominio* di $gsuc$: $\mathbf{N} = \text{Dom } gsuc$.

L'*esistenza* di un unico numero naturale (0, lo *zero*), tale che l'immagine di $gsuc$ sia $\mathbf{N} - \{0\}$ ed il *principio d'induzione* sono assicurati da

ASSIOMA Q 10. *Esistenza di zero e principio d'induzione.*

$$(Q 10) \quad \exists z \in \mathbf{N} (\widehat{gsuc}(\mathbf{N}) = \mathbf{N} - \{z\} \ \& \ \forall X (z \in X \ \& \ \widehat{gsuc}(X) \subseteq X \rightarrow \mathbf{N} \subseteq X)).$$

L'*ordinamento naturale* e le *operazioni aritmetiche* s'intendono definite sui numeri naturali nel modo consueto, a partire dall'operazione successore.

È anche facile definire la *bigezione canonica* fra $\mathbf{N}$ e l'*ordinale* di Von Neuman $\omega = \bigcap \{X \in \text{Ins} \mid \emptyset \in X \ \& \ \forall t (t \in X \rightarrow (t \cup \{t\}) \in X)\}$.

Si noti infine che disponendo degli assiomi Q 9–Q 10 sui naturali e del rimpiazzamento Q 7.1 è facile dedurre l'assioma dell'infinito Q 8, che abbiamo ugualmente elencato onde mantenere l'autonomia delle sezioni 2.1–2.3.

2.5. *Uruple.*

Dopo l'introduzione dei numeri naturali la nozione di coppia può essere estesa a quella di *n-pla* $(x_1, \dots, x_n)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

La *classe fondamentale Grpl* stabilisce il collegamento fra il *grafico funzionale* $\{(1, x_1), \dots, (n, x_n)\}$ e la corrispondente *n-pla* $(x_1, \dots, x_n)$. L'assioma Q 11 stabilisce l'*esistenza* e l'*unicità* delle *n-ple* di elementi qualsiasi per ogni $n \in \mathbf{N}$; in particolare vi sarà un'unica 0-pla di grafico $\emptyset$ (denotata ϕ) ed un'1-pla di grafico $\{(1, x)\}$ per ogni elemento x (denotata $[x]$ per evitare ambiguità).

Le *n-ple* sono *urelementi* e per questo la classe di tutte le *n-ple* al variare di $n \in \mathbf{N}$ sarà chiamata classe delle *uruple* (*Urpl*).

Richiederemo infine con l'assioma Q 12 che le *2-ple* siano esattamente le *coppie* già introdotte nella sezione 2.2.

ASSIOMA Q 11. *Grpl è un grafico funzionale iniettivo che stabilisce una bigezione fra la classe dei grafici funzionali il cui dominio è un segmento iniziale di $\mathbf{N}$ ed una classe di urelementi (che non sono numeri naturali).*

$$(Q 11) \quad \mathbf{Gfinj} \ Grpl \ \& \ \text{Dom } Grpl \subseteq Ur - \mathbf{N} \ \& \ \text{Img } Grpl = \{g \in Gfun \mid \\ \mid \exists n \in \mathbf{N} (\text{Dom } g = \{1, \dots, n\})\}.$$

ASSIOMA Q 12. *La coppia (x, y) coincide con la 2-pla di grafico $\{(1, x), (2, y)\}$.*

$$(Q 12) \quad \forall x, y \in V ((x, y), \{(1, x), (2, y)\}) \in Grpl.$$

DEFINIZIONE 4.

$$Urpl = \text{Dom } Grpl \quad (\text{la classe delle uruple})$$

$$V^n = \{u \in Urpl \mid \text{Dom } Grpl(u) = \{1, \dots, n\}\} \quad (\text{la classe delle } n\text{-ple}).$$

Se $u \in V^n$ si dirà che n è la *lunghezza* di u ($n = \text{lng } u$), che $\text{Grpl}(u)$ è il *grafico* di u ($\text{graf } u$), che $\text{Img } \text{Grpl}(u)$ è il *sostegno* o l'insieme delle *componenti* di u ($\text{sost } u$) e che $(\text{Grpl}(u))(i)$, per $1 \leq i \leq n$, è l'*i-esima componente* di u (u_i).

Salvo i casi $n=0$ ed $n=1$, in cui useremo la notazione ϕ e $[u_1]$, scriveremo $(u_1, \dots, u_n)$ per indicare l'*n-pla* di *i-esima componente* u_i , $1 \leq i \leq n$.

Se $u \in V^n$ e $v \in V^m$, la *concatenazione* di u e v è la $(n+m)$ -pla $w = \underbrace{u \cdot v}$ le cui componenti sono $w_i = u_i$ per $1 \leq i \leq n$ e $w_i = v_{i-n}$ per $n+1 \leq i \leq n+m$.

Se $u \in V^n$, $v \in V^k$ e $\text{sost } v \subseteq \{1, \dots, n\}$, la *composizione* di u con v è la k -pla $w = u \circ v$ le cui componenti sono $w_i = u_{v_i}$ per $1 \leq i \leq k$.

$$A^n = \{u \in V^n \mid \text{sost } u \subseteq A\} \quad (\text{la } n\text{-esima potenza della classe } A)$$

$$\underbrace{A \times B} = \{u \cdot v \mid (u, v) \in A \times B\} \quad (\text{per } A, B \subseteq \text{Urpl: il prodotto concatenato})$$

$$\langle G_1, \dots, G_n \rangle = \{(x, (y_1, \dots, y_n)) \mid (x, y_i) \in G_i, 1 \leq i \leq n\}$$

(**Grel** $G_1, \dots, G_n$: il prodotto fibrato n -ario di grafici)

$$Gp_h = \{(u, u_h) \in \text{Urpl} \times V \mid \text{lng } u \leq h\} \quad (\text{il grafico dell}'h\text{-esima proiezione})$$

$$Gp_h^n = Gp_h \cap (V^n \times V) \quad (\text{il grafico dell}'h\text{-esima proiezione di } n\text{-ple}).$$

Si noti che

$$A^0 = \{\phi\}, \quad A^2 = A \times A, \quad A \times B = A^1 \times B^1, \quad A^n \times B^0 = B^0 \times A^n = A^n, \quad \text{ma}$$

$$A^1 \neq A \quad \text{e in generale } \underbrace{A^n \times A^m} = A^{n+m} \neq \underbrace{A^n \times A^m}.$$

2.6. Operazioni urelementari.

Il concetto destinato ad avere un ruolo privilegiato nei successivi ampliamenti della teoria-quadro è quello di *operazione urelementare*, che considereremo primitivo e ben distinto da quello di *grafico funzionale*.

Supporremo dunque che fra gli urelementi vi siano molte operazioni che costituiscono una classe (che noteremo *Urop*); se $f \in \text{Urop}$ scriveremo $fx = y$ (o anche $f(x) = y$) per significare che *in* x *l'operazione* f *è definita* e dà y come *risultato* (o *valore*).

Il collegamento con la teoria delle classi è assicurato dalla *classe fondamentale Grop* che permette di generare il *grafico funzionale associato* ad ogni operazione urelementare; il relativo assioma Q 13 dovrà però essere formulato in modo differente dal corrispondente assioma Q 11 per le uruple, in quanto da una parte non intendiamo postulare l'*estensionalità* delle operazioni e dall'altra non vogliamo escludere la possibilità (della quale intendiamo servirci in [3]) che vi siano *operazioni urelementari* il cui grafico è una *classe propria*.

La particolare maneggevolezza degli insiemi si manifesta anche nell'*assioma di comprensione* Q 14 che garantisce l'esistenza di operazioni urelementari associate ad ogni grafico funzionale che sia un *insieme*.

Si noti che la necessità di ammettere operazioni con grafico *vuoto* impedisce di scegliere semplicemente la classe fondamentale in modo che il grafico di ogni

operazione urelementare sia la fibra di $Grop$ ad essa corrispondente. A posteriori risulterà che $Grop$ è un grafico che ha per dominio $Urop$ e per fibra in f il grafico di f se questo è non vuoto, altrimenti $\{\emptyset\}$.

ASSIOMA Q 13. $Grop$ è un grafico il cui dominio è incluso in $Ur - (\mathbf{N} \cup \cup Urpl)$ e le cui fibre diverse da $\{\emptyset\}$ sono grafici funzionali.

$$(Q 13) \quad \mathbf{Grel} \ Grop \ \& \ \text{Dom } Grop \subseteq Ur - (\mathbf{N} \cup Urpl) \ \& \ \forall f (\widetilde{Grop}(f) = \{\emptyset\} \vee \mathbf{Gfun} \ \widetilde{Grop}(f)).$$

ASSIOMA Q 14. Fra le fibre di $Grop$ vi sono $\{\emptyset\}$ e tutti i grafici funzionali che sono insieme.

$$(Q 14) \quad \forall g \in \text{Ins} \cap \text{Gfun} \ \exists f \in \text{Dom } Grop (g = \widetilde{Grop}(f) \cap V^2).$$

DEFINIZIONE 5.

$$Urop = \text{Dom } Grop \quad (\text{la classe delle operazioni urelementari})$$

Per $f \in Urop$ scriveremo $y = fx$ per significare $(f, (x, y)) \in Grop$ e porremo:

$$\text{graf } f = \widetilde{Grop}(f) \cap V^2 = \{(x, y) \mid y = fx\} \quad (\text{il grafico di } f)$$

$$\text{dom } f = \text{Dom } \text{graf } f = \{x \mid \exists y (y = fx)\} \quad (\text{il dominio di } f)$$

$$\text{img } f = \text{Img } \text{graf } f = \{y \mid \exists x (y = fx)\} \quad (\text{l'immagine di } f).$$

$$\hat{f}(C) = (\text{graf } f) \wedge (C) \quad (\text{per ogni classe } C: \text{l'immagine di } C \text{ mediante } f).$$

Diremo che $f, g \in Urop$ sono *equivalenti* (in simboli $f \simeq g$) se hanno lo stesso grafico.

La mancanza di un assioma di *estensionalità* per le *operazioni* impedisce di definire operazioni assegnandone semplicemente il grafico, anche nel caso in cui l'assioma Q 14, o qualche altro più forte principio di comprensione (vedi [3]), ne garantisce l'esistenza; in particolare a questo stadio non vi è la possibilità di definire composizione, trasposizione, inversione di operazioni urelementari.

Ciò può essere ottenuto ugualmente in due modi: o postulando direttamente la possibilità di eseguire determinate manipolazioni sulle operazioni urelementari, ovvero assumendo qualche principio di selezione: non inseriremo però alcun assioma di tal genere nella teoria Q, riservandoci invece di proporre parecchi in [3].

2.7. Urelementi atomici.

L'ultimo assioma che assumeremo ha lo scopo di garantirci una *riserva* sufficiente di urelementi per ogni eventuale futura necessità, ad esempio, come accennato nel § 1, per introdurre in modo naturale altri importanti concetti primi-

tivi della matematica e della logica, come cardinali, numeri reali, categorie, proprietà o qualità, strutture, linguaggi, ecc. Chiameremo dunque urelementi *atomici* quegli urelementi che non sono ancora stati caratterizzati come uruple, operazioni o numeri naturali e postuleremo

ASSIOMA Q 15. *Esiste un'immersione dell'universo negli urelementi atomici.*

(Q 15) $\exists J (\mathbf{Gfin} J \ \& \ \text{Dom } J = V \ \& \ \text{Img } J \subseteq Ur - (N \cup Urpl \cup Urop))$.

Chiameremo dunque *Teoria Q* la teoria determinata dagli assiomi Q 1-Q 15: è questa la *teoria-quadro* che costituirà, d'ora in poi, la premessa e l'ambiente formale in cui inseriremo gli assiomi di autoriferimento di [3] ed i futuri sviluppi del nostro programma di organizzazione dei fondamenti della matematica.

§ 3. CONSISTENZA DELLA TEORIA-QUADRO Q

Non è difficile vedere che, dal punto di vista della *consistenza*, la Teoria Q è esattamente *equivalente* alla teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel ZF.

Più precisamente, molte classi definibili nella teoria Q forniscono *modelli interni* di ZF: ad esempio, basta considerare la classe

$$U = \{x \in \text{Ibfond} \mid \text{TC}(x) \cap Ur = \emptyset\}$$

con la relazione di appartenenza ristretta ad $U \times U$, per ottenere un modello naturale di ZF internamente a Q.

Definiremo ora un modello interno di Q entro la teoria di Gödel-Bernays ABCD, che è notoriamente un'estensione conservativa di ZF (cfr. [5]).

Dato un modello $\mathcal{M} = (V, C, \in)$ di ABCD si definisce un modello di Q.

$$\mathcal{M}' = (V, C', \in', \text{Ins}, \text{Kur}, \text{gsuc}, \text{Grpl}, \text{Grop})$$

nel modo seguente:

$$C' = (C - V) \cup \{x, \underline{0} \mid x \in V\}$$

$$x \in' y \Leftrightarrow (x \in y \in C - V) \vee (y =]z, \underline{0}[\ \& \ x \in z)$$

$$\text{Ins} = \{x, \underline{0} \mid x \in V\}$$

$$\text{Kur} = \{ \{ \{ \underline{1}, x[, \underline{2}, y] \}, \underline{2}[,] \{ \{ x \}, \underline{0}[,] \{ x, y \}, \underline{0}[] , \underline{0}[] \}, \underline{0}[\mid x, y \in V \}$$

$$\text{gsuc} = \{ \{ \{ \underline{1}, \underline{n}[, \underline{2}, \underline{n+1}] \}, \underline{2}[\mid \underline{n} \in \omega \}, \underline{0}[$$

$$\text{Grop} = \{ \{ \{ \underline{1},]g, \underline{1}[] ,]\underline{2},] \{ \underline{1}, x[,]\underline{2}, y] \}, \underline{2}[] , \underline{2}[\mid x, y \in g, \\ g \text{ grafico funzionale in } \mathcal{M} \}$$

$$\text{Grpl} = \{ \{ \{ \underline{1},] \{ \underline{1}, x_1[, \dots,]\underline{n}, x_n] \}, \underline{2}[] , \\]\underline{2},] \{ \{ \underline{1}, \underline{1}[,]\underline{2}, x_1] \}, \underline{2}[, \dots,] \{ \underline{1}, \underline{n}[,]\underline{2}, x_n] \}, \\ \underline{2}[] , \underline{0}[] \}, \underline{2}[\mid x_1, \dots, x_n \in V \}.$$

N.B. : nelle definizioni soprastanti, che sono poste *nella* teoria ABCD, abbiamo indicato con $]x, y[$ il duetto di Kuratowski e con $\underline{0}, \underline{1}, \dots, \underline{n}, \dots$ gli ordinali finiti di Von Neumann.

Con tali definizioni si ottiene:

(i) $\mathcal{M}'$ ha gli stessi *elementi* e le stesse *classi proprie* di $\mathcal{M}$, in particolare la stessa *classe universale* V ;

(ii) $]x, \underline{0}[$ è in $\mathcal{M}'$ l'*insieme* che ha per elementi gli elementi di x in $\mathcal{M}$;

(iii) il *numero naturale* n di $\mathcal{M}'$ è l'ordinale $\underline{n}$ di $\mathcal{M}$ (che non è un insieme in $\mathcal{M}'$), quindi $N =]\omega, \underline{0}[$;

(iv) $]g, \underline{1}[$ è l'*operazione urelementare* di $\mathcal{M}'$ che agisce come la funzione di grafico g in $\mathcal{M}$;

(v) $] \{ \underline{1}, x_1 [\underline{n} \dots] , x_n [\} , \underline{2}[$ è l'*n-pla* $(x_1, \dots, x_n)$ in $\mathcal{M}'$ (in particolare $] \emptyset , \underline{2}[= \emptyset$);

(vi) in $\mathcal{M}'$ $Ins = Clel$ e $Urop$ è in corrispondenza *biunivoca* con $Gfun$.

Lasciamo al lettore la dimostrazione, facile e diretta, che gli assiomi Q 1-Q 15 valgono in $\mathcal{M}'$: essa non presenta differenze sostanziali rispetto al caso dei « modelli di permutazione » estesamente trattati in [6].

Infine, dato un modello della teoria Q si ottiene immediatamente un *modello naturale* di ABCD avente come *universo* la classe U sopra definita e come *classi* le sottoclassi di U; si è dunque dimostrata l'*equivalenza* delle teorie Q ed ABCD non solo nel senso della *consistenza*, ma anche in quello, più forte, dell'*interpretabilità reciproca*.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CLAVELLI M. (1984) - *Nuove presentazioni dei fondamenti della matematica*. Tesi di laurea, Pisa.
- [2] DE GIORGI E. e FORTI M. (1984) - *Premessa a nuove teorie assiomatiche dei fondamenti della matematica*. Dip. di Matematica, Pisa, Quad. n. 54.
- [3] DE GIORGI E. e FORTI M. - *Sul problema dell'autoriferimento* (in preparazione).
- [4] FORTI M. e HONSELL F. (1983) - *Set theory with free construction principles*. « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. », (4) 10, 493-522.
- [5] GOEDEL K. (1940) - *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis*. « Ann. Math. Stud. », 3, Princeton.
- [6] RIEGER L. (1957) - *A contribution to Gödel's axiomatic set theory, I*. « Czech. Math. Journ. », 7, 323-357.