Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Ettore Laserra, Giovanni Matarazzo

Il criterio dell'energia e l'equazione di Maxwell-Cattaneo nella termodinamica dei sistemi elettromagnetici non lineari

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **79** (1985), n.1-4, p. 31–36.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1985_8_79_1-4_31_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1985.

Fisica matematica. — *Il criterio dell'energia e l'equazione di Maxwell–Cattaneo nella termodinamica dei sistemi elettromagnetici non lineari* (*). Nota di ETTORE LASERRA e GIOVANNI MATARAZZO (**), presentata (***) dal SOCIO D. GRAFFI.

SUMMARY. — We study the evolution law of the canonical energy of an electromagnetic material, immersed in an environment that is thermally and electromagnetically passive, at constant temperature. We use as constitutive equation for the heat flux a Maxwell-Cattaneo like equation.

INTRODUZIONE

Come è noto, nel lavoro [1] si propone l'equazione costitutiva di Maxwell-Cattaneo, al posto della classica equazione di Fourier per il flusso di calore, per risolvere il paradosso della velocità di propagazione infinita delle onde termiche. Nel presente lavoro utilizziamo l'equazione di Maxwell-Cattaneo per formulare, col metodo proposto nella precedente Nota [8], il criterio dell'energia [5] nella termodinamica dei sistemi elettromagnetici non lineari, immersi in un ambiente a temperatura costante e termoelettromagneticamente passivo. Proviamo infatti che l'energia libera canonica, relativa a una sfera che si contrae, ha un andamento monotono non crescente. Come dimostriamo, la « velocità di contrazione » della sfera risulta finita anche quando i campi in considerazione tendono a zero e la temperatura del corpo tende a quella dell'ambiente. Riusciamo così a generalizzare i risultati del secondo teorema dimostrato nel lavoro [7], dove si affronta lo stesso problema utilizzando invece l'equazione di Fourier per il flusso di calore: in tal caso è necessario formulare come ipotesi la suddetta proprietà della « velocità di contrazione » della sfera.

1. Sia $\mathscr{M}$ un mezzo in quiete che occupa una regione Ω dello spazio euclideo R^3, mentre $\boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$ designi la posizione occupata dal generico punto materiale di $\mathscr{M}$ e $t \in [0, d_p)$ la variabile temporale. Indichiamo con $p(t) \doteq (\dot{\mathbf{D}}(t), \dot{\mathbf{B}}(t), \dot{\theta}(t), \boldsymbol{g}(t))$ il generico processo termoelettromagnetico [2] e con $\sigma \doteq (\mathbf{D}, \mathbf{B}, \boldsymbol{q}, \theta)$ il generico stato termoelettromagnetico del materiale

(*) Lavoro eseguito sotto gli auspici del GNFM del CNR e nell'ambito dei progetti di ricerca finanziati con i fondi M.P.I.

(**) Dipartimento di Matematica e applicazioni « Renato Caccioppoli » dell'Università di Napoli, Facoltà di Ingegneria, via Claudio 21, 80125 Napoli.

(***) Nella seduta del 28 giugno 1985.

$\mathcal{M}$ [3], dove $\mathbf{D}(\boldsymbol{x}, t)$ e $\mathbf{B}(\boldsymbol{x}, t)$ sono rispettivamente i vettori spostamento elettrico e induzione magnetica, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) = \nabla\,\theta(\boldsymbol{x}, t)$ è il gradiente della temperatura assoluta $\theta(\boldsymbol{x}, t) > 0$ e $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t)$ è il vettore flusso di calore. Nel seguito si indicherà con $\sigma_t = \rho(\sigma, p_t)$ lo stato raggiunto all'istante t, dove ρ è la funzione di transizione degli stati [2], [3] e p_t è la restrizione di $p(t)$ a $[0, t)$, $t \in [0, d_p)$.

Se supponiamo verificata su $\Omega \times [0, \mathrm{d}_p)$ l'equazione di Maxwell-Cattaneo:

$$\boldsymbol{q} + \gamma\,\boldsymbol{q} = -k\,\gamma\,\boldsymbol{g} \tag{1}$$

con $\gamma, k \in \mathrm{R}^+$, il materiale $\mathcal{M}$ è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive [3], [4]:

$$\begin{gathered}\psi = \psi(\sigma_t), \quad \eta = \eta(\sigma_t), \ \mathbf{E} = \mathbf{E}(\sigma_t), \ \mathbf{H} = \mathbf{H}(\sigma_t), \\ h(t) = h(\sigma_t, p(t)), \ \mathbf{J} = \mathbf{J}(\sigma_t)\end{gathered} \tag{2}$$

dove $\psi(\sigma_t) = \varepsilon(\sigma_t) - \theta(\boldsymbol{x}, t)\,\eta(\sigma_t)$ è la densità per unità di volume di energia libera e h è la potenza calorica per unità di volume. In ipotesi di sufficiente regolarità delle equazioni costitutive (1), (2) si può dimostrare [3] che valgono le seguenti relazioni:

$$\eta = -\frac{\partial\,\psi}{\partial\,\theta}, \ \mathbf{E} = \frac{\partial\,\psi}{\partial\mathbf{D}}, \ \mathbf{H} = \frac{\partial\,\psi}{\partial\,\mathbf{B}}, \ \boldsymbol{q} = k\,\gamma\,\theta\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,\boldsymbol{q}}. \tag{3}$$

Inoltre assumiamo

$$\mathrm{C} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\,\theta^2} \geq 0. \tag{4}$$

L'uscita elettromagnetica U del mezzo $\mathcal{M}$ è allora definita dalla terna:

$$\mathrm{U} = (\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{J})$$

dove i vettori $(\mathbf{E}(t), \mathbf{H}(t), \mathbf{J}(t))$ sono i valori attuali rispettivamente dei vettori campo elettrico, magnetico, e densità di corrente elettrica. Nel seguito supporremo i valori attuali dei campi considerati funzioni limitate su $[0, \mathrm{d}_p)$.

Nel generico processo termoelettromagnetico $p(t)$ i campi considerati verificano in ipotesi di sufficiente regolarità le equazioni:

$$\left\{\begin{aligned} &\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \\ &\nabla \times \mathbf{H} = -\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{J} \\ &h = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} + r \\ &\dot{\varepsilon} = h + \mathrm{R} \\ &\dot{\eta} \geq -\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\right) + \frac{r}{\theta} \end{aligned}\right. \tag{5}$$

dove $R = \nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ è la densità per unità di volume di energia elettromagnetica che entra in Ω.

Osserviamo ora che la $(5)_4$, ove si tenga conto del teorema di Poynting e della $(5)_3$, si può scrivere nel seguente modo (cfr. [3]):

$$\dot{\varepsilon} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} + r + \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} . \tag{6}$$

Supponiamo ora l'ambiente in cui è immerso $\mathcal{M}$ a temperatura costante $\theta_0 = \theta(\boldsymbol{x}, 0)$, localmente termicamente e elettromagneticamente passivo [7], cioè risulti rispettivamente:

$$\tag{7} \begin{aligned} &\nabla \alpha \cdot \boldsymbol{q} \frac{\theta - \theta_0}{\theta} \geq \alpha \left[\nabla \cdot \left(\boldsymbol{q} \frac{\theta_0 - \theta}{\theta} \right) - r \frac{\theta_0 - \theta}{\theta} \right] \\ &\int_{\partial\Omega} \alpha(\boldsymbol{x}, t) \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma \geq - \int_{\Omega} \alpha(\boldsymbol{x}, t) \dot{V}(\mathbf{D}, \mathbf{B}) \, d\Omega , \end{aligned}$$

$\forall \alpha(\boldsymbol{x}, t) > 0$, $\alpha \in C_0^\infty(R^3 \times [0, d_p))$, $\boldsymbol{n}$ è il versore della normale esterna e $V(\mathbf{D}, \mathbf{B})$ è una funzione non negativa differenziabile rispetto a $\mathbf{D}$ e $\mathbf{B}$.

Supponiamo ora verificate le seguenti ipotesi:

$$\tag{8} \begin{aligned} &\psi(\mathbf{D}, \mathbf{B}, \boldsymbol{q}, \theta_0) \geq 0 , \psi(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0) = 0 , \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{D}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0) = \\ &= \mathbf{0} , \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0) = \mathbf{0} , \end{aligned}$$

ψ sia una funzione convessa rispetto a $\mathbf{D}$ e $\mathbf{B}$ in $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{q} = \mathbf{0}$, $\theta = \theta_0$; tenendo conto di $(3)_{2,3}$, deve allora esistere un $c > 0$ tale che [6]:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{D}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + 2 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{D}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{B}} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} > c(\mathbf{D}^2 + \mathbf{B}^2) \tag{9}$$

dove le derivate dei campi sono calcolate in $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0)$.

Ciò premesso, dimostriamo il seguente

TEOREMA. *L'energia libera canonica del materiale $\mathcal{M}$ immerso in un ambiente a temperatura costante $\theta_0 = \theta(\boldsymbol{x}, 0)$ localmente termoelettromagneticamente passivo si evolve in ogni processo termoelettromagnetico $p(t)$, che inizia da uno stato a temperatura θ_0, secondo la legge*:

$$\tag{10} \begin{aligned} &\int_{S_t(\boldsymbol{x}_0) \cap \Omega} [\psi(\mathbf{D}(t), \mathbf{B}(t), \boldsymbol{q}(t), \theta_0) + V(\mathbf{D}(t), \mathbf{B}(t))] \, d\boldsymbol{x} \leq \\ &\leq \int_{S_0(\boldsymbol{x}_0) \cap \Omega} [\psi(\mathbf{D}(0), \mathbf{B}(0), \mathbf{0}, \theta_0) + V(\mathbf{D}(0), \mathbf{B}(0))] \, d\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

dove $S_t(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x} \in R^3 : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \leq z + N(d_p - t),\ z > 0\}$ con

$$N = \sup_{p(t)} \frac{|\mathbf{E} \times \mathbf{H}| + \left| \dfrac{\theta - \theta_0}{\theta} \boldsymbol{q} \right|}{\psi(\mathbf{D}, \mathbf{B}, \boldsymbol{q}, \theta_0) + V(\mathbf{D}, \mathbf{B}) + C(\theta - \theta_0)^2}$$

Dimostrazione. Consideriamo la grandezza

$$\gamma(t) = \int_\Omega \alpha(\boldsymbol{x}, t)(\varepsilon - \theta_0 \eta + V)\, d\Omega, \tag{11}$$

dove la quantità $\varepsilon - \theta_0 \eta + V$ è detta densità di energia libera canonica e $\alpha(\boldsymbol{x}, t)$ è una funzione non negativa di $C_0^\infty(R^3 \times [0, d_p))$. Derivando la (11) rispetto alla variabile temporale e utilizzando $(5)_5$, (6) otteniamo:

$$\dot{\gamma}(t) \leq \int_\Omega \dot{\alpha}(\varepsilon - \theta_0 \eta + V)\, d\Omega +$$
$$+ \int_\Omega \alpha \left[\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{q} \frac{\theta_0 - \theta}{\theta} \right) - r \frac{\theta_0 - \theta}{\theta} + \dot{V} \right] d\Omega.$$

Ricordando le (7) risulta allora

$$\dot{\gamma}(t) \leq \int_\Omega \dot{\alpha}(\varepsilon - \theta_0 \eta + V)\, d\Omega + \int_\Omega \nabla \alpha \cdot \left(\mathbf{E} \times \mathbf{H} - \boldsymbol{q} \frac{\theta_0 - \theta}{\theta} \right) d\Omega. \tag{12}$$

Per la formula di Taylor e ricordando la (4), troviamo [5]:

$$\varepsilon(\mathbf{D}, \mathbf{B}, \boldsymbol{q}, \theta) - \theta_0 \eta(\mathbf{D}, \mathbf{B}, \boldsymbol{q}, \theta) = \psi(\mathbf{D}, \mathbf{B}, \boldsymbol{q}, \theta_0) + C(\theta - \theta_0)^2 \tag{13}$$

dove C è il calore specifico in corrispondenza di una temperatura compresa tra θ_0 e θ. Se integriamo la (12) nell'intervallo $[0, t) \subset [0, d_p)$ e teniamo conto di (11), (12) e (13), abbiamo:

$$\int_\Omega \alpha(t)\,[\psi(\mathbf{D}(t), \mathbf{B}(t), \boldsymbol{q}(t), \theta_0) + V(\mathbf{D}(t), \mathbf{B}(t))]\, d\Omega \leq$$
$$\leq \int_\Omega \alpha(0)\,[\psi(\mathbf{D}(0), \mathbf{B}(0), \mathbf{0}, \theta_0) + V(\mathbf{D}(0), \mathbf{B}(0)]\, d\Omega + \tag{14}$$
$$+ \int_0^t \int_\Omega (\dot{\alpha} + N|\nabla \alpha|)\,[\psi(\mathbf{D}, \mathbf{B}\ \ \boldsymbol{q}\ \ \theta_0) + V(\mathbf{D}, \mathbf{B}) + C(\theta - \theta_0)^2]\, d\Omega\, dt$$

con

$$\mathrm{N} = \sup_{p\,(t)} \frac{|\,\mathbf{E} \times \mathbf{H}\,| + \left|\dfrac{\theta - \theta_0}{\theta}\,\boldsymbol{q}\right|}{\psi\,(\mathbf{D}\,,\mathbf{B}\,,\boldsymbol{q}\,,\theta_0) + \mathrm{V}\,(\mathbf{D}\,,\mathbf{B}) + \mathrm{C}\,(\theta - \theta_0)^2}\,,$$

dove N è finito anche se $\mathrm{V} = 0\,,\ \theta \rightarrow \theta_0\,,\ \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{0}\,,\ \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{q} \rightarrow \mathbf{0}$.

Se consideriamo infatti lo sviluppo in serie di Taylor del primo ordine dei campi $\mathbf{E}\,,\mathbf{H}$ in un intorno di θ_0, possiamo maggiorare il suddetto rapporto tramite:

$$(15)\qquad \frac{|\,\mathrm{E}\,(\mathbf{D}\,,\mathbf{B}\,,\boldsymbol{q}\,,\theta_0) \times \mathbf{H}\,(\mathbf{D}\,,\mathbf{B}\,,\boldsymbol{q}\,,\theta_0)\,| + \left|\dfrac{\theta - \theta_0}{\theta}\,\boldsymbol{q}\right|}{\psi\,(\mathbf{D}\,,\mathbf{B}\,,\boldsymbol{q}\,,\theta_0) + \mathbf{C}\,(\theta - \theta_0)^2} + \\ + \frac{l\,(|\,\mathbf{E}\,(\mathbf{D}\,,\mathbf{B}\,,\boldsymbol{q}\,,\theta_0)\,| + |\,\mathbf{H}\,(\mathbf{D}\,,\mathbf{B}\,,\boldsymbol{q}\,,\theta_0)\,|)\,|\,\theta - \theta_0\,| + m\,(\theta - \theta_0)^2}{\psi\,(\mathbf{D}\,,\mathbf{B}\,,\boldsymbol{q}\,,\theta_0) + \mathbf{C}\,(\theta - \theta_0)^2}\,,$$

dove $\quad l = \sup\limits_{p\,(t)} \left(\left|\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \theta}\right| + \left|\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial \theta}\right| \right)_{\theta = \theta_0}, \quad m = \sup\limits_{p\,(t)} \left|\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \theta} \times \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial \theta}\right|_{\theta = \theta_0}.$

Se sviluppiamo in serie di Taylor del primo ordine $\mathbf{E}\,(\mathbf{D}\,,\mathbf{B}\,,q\,,\theta_0)$ e $\mathbf{H}\,(\mathbf{D}\,,\mathbf{B}\,,\boldsymbol{q}\,,\theta_0)$ in un intorno di $\mathbf{D} = 0\,,\ \mathbf{B} = 0\,,\ \boldsymbol{q} = 0$ e teniamo conto di (3), (8), a meno di termini di ordine superiore al secondo abbiamo:

$$|\,\mathrm{E}\,(\mathbf{D}\,,\mathbf{B},\boldsymbol{q}\,,\theta_0) \times \mathbf{H}\,(\mathbf{D}\,,\mathbf{B}\,,\boldsymbol{q}\,,\theta_0)\,| \leq \left(\left|\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{D}}\right| \left|\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{B}}\right| + \left|\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{D}}\right| \left|\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{B}}\right| + \right. \\ \left. + \left|\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{B}}\right|^2 \right) \mathbf{D}^2 + \left(\left|\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{B}}\right| \left|\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{B}}\right| + \left|\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{D}}\right| \left|\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{B}}\right| + \left|\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{B}}\right|^2 \right) \mathbf{B}^2\,,$$

$$(16)\qquad (|\,\mathbf{E}\,(\mathbf{D},\mathbf{B},\boldsymbol{q}\,,\theta_0)\,| + |\,\mathbf{H}\,(\mathbf{D}\,,\mathbf{B}\,,\boldsymbol{q}\,,\theta_0)\,|)\,|\,\theta - \theta_0\,| \leq \left(\left|\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{B}}\right| + \right. \\ \left. + \left|\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{D}}\right| \right) \mathbf{D}^2 + \left(\left|\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{B}}\right| + \left|\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{D}}\right| \right) \mathbf{B}^2 + \left(\left|\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{D}}\right| + 2 \left|\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{D}}\right| + \right. \\ \left. + \left|\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{B}}\right| \right) (\theta - \theta_0)^2\,,$$

dove le derivate dei campi sono calcolate in $(\mathbf{0}\,,\mathbf{0}\,,\mathbf{0}\,,\theta_0)$. Se consideriamo ora lo sviluppo in serie di Taylor di $\psi\,(\mathbf{D}\,,\mathbf{B}\,,\boldsymbol{q}\,,\theta_0)$ in un intorno di $\mathbf{D} = \mathbf{0}\,,\mathbf{B} = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{q} = \mathbf{0}$ e ricordiamo le (3), (8), (9), a meno di termini di ordine superiore al secondo risulta:

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{D},\mathbf{B},\boldsymbol{q},\theta_0) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{D}^2}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{D} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{D}\,\partial\mathbf{B}}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{B} + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{B}^2}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} + \frac{1}{2k\gamma\theta}\boldsymbol{q}^2 > 2c(\mathbf{D}^2+\mathbf{B}^2) + \frac{1}{2k\gamma\theta}\boldsymbol{q}^2\end{aligned} \tag{17}$$

dove le derivate della ψ sono calcolate in $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0)$. Se teniamo conto delle (16), (17), (9) e delle ipotesi di limitatezza dei campi in considerazione, possiamo maggiorare il rapporto (15) tramite la funzione:

$$\mathrm{R}(\mathbf{D},\mathbf{B},\boldsymbol{q},\theta) = \frac{a\,\mathbf{D}^2 + \beta\,\mathbf{B}^2 + \delta\,\boldsymbol{q}^2 + l(\theta-\theta_0)^2}{c(\mathbf{D}^2+\mathbf{B}^2) + \nu\,\boldsymbol{q}^2 + \mathrm{C}(\theta-\theta_0)^2},$$

dove a, β, δ, l, ν sono opportune costanti positive; considerando poi che $\mathrm{R}(\mathbf{D},\mathbf{B},\boldsymbol{q},\theta)$ è limitata e converge quando $\mathbf{D}\to\mathbf{0}$, $\mathbf{B}\to\mathbf{0}$, $\boldsymbol{q}\to\mathbf{0}$ e $\theta\to\theta_0$, conseguiamo la verifica della suddetta proprietà di N.

Infine consideriamo per ogni $h>0$ e $x_0 \in \Omega$ le seguenti funzioni

$$\chi_h(x,t) = 1 - \lambda_h(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0| - \mathrm{N}(\mathrm{d}_p - t) - r + h), \quad r>0$$

$$\text{ove } \lambda_h(u) = \int_{-\infty}^{u}\delta_h(s)\,\mathrm{d}s\,,\ \delta_h(s)\in \mathrm{C}_0^\infty(-\infty,+\infty)\,,\ \int_{-h}^{h}\delta_h(s)\,\mathrm{d}s = 1\,,$$

$$\delta_h(s)\geq 0\,,\ \delta_h(s)\leq\frac{\text{cost.}}{h}\,,\ \delta_h(s)=0 \text{ per } |s|>h;$$

se poniamo infine nella (14) $\alpha(\boldsymbol{x},t) = \chi_h(\boldsymbol{x},t)$ e passiamo al limite per $h\to 0$ (cfr. [7]), otteniamo la (10).

Bibliografia

[1] C. Cattaneo (1948) – *Sulla conduzione del calore*, « Atti Sem. Mat. e Fis. univ. Modena », *3*, 13-21.

[2] M. Ciarletta e G. Matarazzo – *Sulla termodinamica dei sistemi elettromagnetici: equazione dell'entropia e temperatura assoluta*, in corso di stampa sul « Boll. UMI ».

[3] M. Ciarletta e G. Matarazzo – *Sui potenziali termodinamici dei sistemi elettromagnetici semplici*, in corso di stampa.

[4] D. Graffi (1981) – *Questioni sull'elettromagnetismo*, Liguori ed., Napoli.

[5] M.E. Gurtin (1974) – *Thermodynamics and the energy criterion for stability*, « Arch. Rational Mech. Anal. », *52*, 33-103.

[6] Fabrizio M. (1973) – *Convessità dei potenziali termodinamici dell'elettromagnetismo ereditario*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *60*, 241-248.

[7] E. Laserra (1980) – *Il criterio dell'energia per un sistema elettromagnetico dissipativo*, « Ann. Univ. di Ferrara », Serie VII-Sc. Mat., *26*, 155-163.

[8] E. Laserra e G. Matarazzo (1985) – *Il criterio dell'energia e l'equazione di Maxwell-Cattaneo nella termoelasticità non lineare*, « Rend. Accad. Naz. Lincei, Sci. Fis. Mat. e Nat. », *78*.