Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Forti, Furio Honsell

Sull'ordinamento dei numeri reali non-standard

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **79** (1985), n.1-4, p. 1–8.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1985_8_79_1-4_1_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1985.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1985 (Luglio-Ottobre)

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Logica matematica. — *Sull'ordinamento dei numeri reali non-standard* (*). Nota (**) di MARCO FORTI e FURIO HONSELL, presentata dal Corrisp. E. DE GIORGI.

SUMMARY. — Several order-theoretic properties of the real axis, of the monads and of the infinites in nonstandard models of Analysis are considered. Pseudometrizability and topological completeness of related uniformities are studied.

§ 1. INTRODUZIONE E PRELIMINARI

Un'ampia indagine sulla struttura d'ordine e topologica dell'asse reale nei modelli non-standard dell'analisi è stata condotta da E. Zakon in [7]. Alcuni dei problemi lasciati aperti da [7] sono poi stati affrontati da K. Potthof [4], S. Kamo [2] e [3], S. Yang, D. Wang e J. Wang [6].

Scopo di questa Nota è di approfondire la conoscenza dell'ordinamento dei numeri reali non-standard, fornendo quindi risposte ad alcune delle questioni poste in [7]. Parte dei risultati ottenuti è stata esposta da uno degli autori nel suo contributo [1] al Logic Colloquium '85 (Parigi, 6-13 luglio 1985).

Gli autori ringraziano V.M. Tortorelli per numerose discussioni e indicazioni bibliografiche e H. Fujita per una traduzione di [6].

(*) Ricerca parzialmente finanziata da 40% e 60% M.P.I.
(**) Pervenuta all'Accademia il 29 ottobre 1985.

Fissato un modello non-standard dell'analisi, utilizzeremo le seguenti definizioni e notazioni:

R, **N** i numeri reali e naturali *standard*;

$^*\mathbf{R}$, $^*\mathbf{N}$ i numeri reali e naturali *del modello*;

$M_x = \{y \in {}^*\mathbf{R} \mid \forall n \in \mathbf{N} \quad |y - x| < 1/n\}$ la *monade* di x;

$G_x = \{y \in {}^*\mathbf{R} \mid \exists n \in \mathbf{N} \quad |y - x| < n\}$ la *galassia* di x;

$R_x = \{y \in {}^*\mathbf{R} \mid \exists n \in \mathbf{N} \quad 1/n < y/x < n\}$ il *rango* di x;

$T_x = \{y \in {}^*\mathbf{R} \mid \forall n \in \mathbf{N} \quad n < y < x - n\}$ gli *infiniti* minori di x.

Considereremo in particolare i seguenti *tipi d'ordine*:

ω, λ, λ' t. d'o. di **N**, **R**, $^*\mathbf{R}$ rispettivamente;

λ_0 t. d'o. di G_0 (e di ogni altra galassia);

μ t. d'o. di M_0 (e di ogni altra monade);

θ t. d'o di $^*\mathbf{R}^+/G_0$ (gli infiniti positivi a meno di equivalenza);

τ_x t. d'o. di T_x/G_0 (il segmento determinato da x in θ).

Qualora si debba trattare simultaneamente con più modelli dell'analisi, si porrà il nome del modello come esponente della notazione considerata.

I seguenti fatti valgono in ogni modello non-standard:

– μ, λ', λ_0 e τ_x sono tipi d'ordine simmetrici;

– il tipo d'ordine di $^*\mathbf{N}$ è $\omega + (\omega^* + \omega)\,\theta$ (vedi [5]);

– $\lambda' = \lambda_0(\theta^* + 1 + \theta)$, $\mu = \lambda_0\theta + 1 + \lambda_0\theta^*$ e $\lambda_0 = \mu\lambda$ ([7, Coroll. 2.3]);

– $\mathrm{cof}\,\lambda' = \mathrm{cof}\,\theta$ e $\mathrm{cof}\,\mu = \mathrm{cof}\,\theta^* = \mathrm{cof}\,\tau_x$; inoltre, se il modello è comprensivo le cofinalità di θ e θ^* non sono numerabili ([7, Thm. 3.7]);

– il gruppo dei ranghi $^*\mathbf{R}^+/R_1$ è ordinatamente isomorfo a $^*\mathbf{R}/G_0$; entrambi sono divisibili non archimedei e il loro ordine, di tipo $\theta^* + 1 + \theta$, è totalmente incompleto; in particolare θ è denso ed ogni suo intervallo possiede lacune (vedi [7, § 2]).

I problemi della simmetria di θ, dell'isomorfismo fra θ e i suoi intervalli aperti, dell'uguaglianza fra i tipi λ' e μ e della possibilità che abbiano cofinalità numerabile, tutti proposti in [7, Quest. 1, 4, 5], hanno ricevuto parziali risposte in [2], [3], [4], [6] e saranno sistematicamente affrontati nel § 3 della presente Nota.

Il § 2 sarà dedicato alla costruzione di classi di modelli dotati delle proprietà richieste nei paragrafi successivi.

Infine, nel § 4, si studierà il problema della completezza topologica e della pseudometrizzabilità delle topologie uniformi associate all'ordinamento dell'asse reale non-standard, introdotte in [7, §§ 5-7]; risultati analoghi, in risposta a [7, Quest. 2-3], si trovano in [2], [3], [4].

§ 2. COSTRUZIONE DI ALCUNI MODELLI NON-STANDARD

Forniremo in questo paragrafo alcuni procedimenti per ottenere, a partire da un dato modello base dell'analisi $\mathcal{M}$, delle estensioni elementari di $\mathcal{M}$ i cui ordinamenti godono di determinate proprietà. Considereremo pertanto fissato in tutto il paragrafo un *modello base* $\mathcal{M}$, peraltro arbitrario.

È anzitutto possibile costruire, come limiti di catene elementari ottenute per successive aggiunzioni di costanti all'interno di ogni taglio di Dedekind, modelli che verificano le condizioni del seguente

TEOREMA 2.1. *Per ogni ordinale limite* α *vi è un'estensione elementare* $\mathscr{C}_\alpha$ *in cui ogni taglio di Dedekind* (X, Y) *in* θ *come in* $^*\mathbf{R}$, *verifica almeno una delle uguaglianze* $\operatorname{cof} X = \operatorname{cof} \alpha$, $\operatorname{cof} Y^* = \operatorname{cof} \alpha$.

In particolare in $\mathscr{C}_\alpha$ *si ha* $\operatorname{cof} \theta = \operatorname{cof} \theta^* = \operatorname{cof} \alpha$.

La seconda costruzione utilizza ancora limiti di catene elementari ottenute « riempiendo le lacune » con l'aggiunzione di opportuni insiemi di costanti e permette di costruire modelli « simmetrici ».

TEOREMA 2.2. *Per ogni ordinale limite* α *vi è un'estensione elementare* $\mathscr{S}_\alpha$ *che verifica le seguenti proprietà:*

(i) $\theta = \mu$, *quindi anche* $\theta = \theta^*$;

(ii) $|\theta| = |\alpha| \cdot |{}^*\mathbf{R}^{\mathcal{M}}|$.

(iii) $\operatorname{cof} \theta = \operatorname{cof} \theta^* = \operatorname{cof} \alpha$.

Si noti che anche il modello $\mathscr{C}_\alpha$ verifica le tesi del Teorema 2.2 quando α è un cardinale inaccessibile; infatti in tal caso θ, μ e λ' sono insiemi η_α di Hausdorff.

Per la terza classe di estensioni che considereremo, allo scopo di costruire modelli « asimmetrici », è necessario stabilire il seguente Lemma, che precisa e completa [2, Lemma 2.3]:

LEMMA 2.3. *Sia* F *un ultrafiltro* ω*-incompleto sul cardinale* k *e sia* $\mathcal{N}$ *l'ultrapotenza* $\mathcal{M}^k/F$. *Si ha*

(i) *se* $k < \operatorname{cof} \theta^{\mathcal{M}}$, *allora* $^*\mathbf{N}^{\mathcal{M}}$ *è cofinale in* $^*\mathbf{N}^{\mathcal{N}}$ *e quindi* $\operatorname{cof} \theta^{\mathcal{M}} = \operatorname{cof} \theta^{\mathcal{N}}$;

(ii) $^*\mathbf{N}^{\mathcal{N}}$ *ha un segmento iniziale isomorfo a* $\mathbf{N}^k/F$, *quindi esiste* x *in* $\mathcal{N}$ *tale che* $|\tau_x| \leq 2^k$ *e dunque* $\operatorname{cof} \theta^{*\mathcal{N}} \leq 2^k$;

(iii) *sia* T *l'insieme degli interi di* $\mathcal{M}$ *che appartengono alle galassie di un segmento iniziale* τ *di* $\theta^{\mathcal{M}}$; *allora* T^k/F *determina in* $\mathcal{N}$ *un segmento iniziale di* $\theta^{\mathcal{N}}$ *la cui cardinalità non supera* $|\tau|^k$.

Scegliendo k in modo che sia $|\theta^{\mathcal{M}}| > 2^k$, si ottiene

COROLLARIO 2.4.

(i) *Se* $\mathrm{cof}\,\theta^{\mathcal{M}} > 2^k$, *allora* $\mathrm{cof}\,\theta^{\mathcal{N}} > \mathrm{cof}\,\theta^{*\mathcal{N}}$;

(ii) *se* $|\theta^{\mathcal{M}}| > 2^k \geq \mathrm{cof}\,\theta^{\mathcal{M}}$, *allora esistono* x *ed* y *in* $\mathcal{N}$ *tali che* $|\tau_x| \leq \leq 2^k < |\tau_y|$.

In entrambi i casi si ha $\theta \neq \theta^*$ *in* $\mathcal{N}$.

Considerando ora limiti di catene costruite iterando ultrapotenze relative ad un ultrafiltro k-regolare su di un cardinale $k < \mathrm{cof}\,\theta^{\mathcal{M}}$, si ottiene una classe di estensioni elementari che soddisfano le condizioni del seguente

TEOREMA 2.5. *Sia* α *un ordinale limite e sia* k *un cardinale minore di* $\mathrm{cof}\,\theta^{\mathcal{M}}$. *Vi è un'estensione elementare* $\mathcal{A}_\alpha^k$ *che verifica*:

(i) $\mathrm{cof}\,\theta = \mathrm{cof}\,\theta^{\mathcal{M}}$, *ed anzi* $^*\mathbf{N}^{\mathcal{M}}$ *è cofinale in* $^*\mathbf{N}$;

(ii) $\mathrm{cof}\,\theta^* = \mathrm{cof}\,\alpha$;

(iii) *in corrispondenza di ogni decomposizione ordinale* $\alpha = \beta + \gamma$ *esiste* x *in* $\mathcal{A}_\alpha^k$ *tale che* $|\tau_x| = \sum_{\delta<\gamma} |\delta|^k$.

COROLLARIO 2.6. *Sia* $k < k_0 = \mathrm{cof}\,\theta^{\mathcal{M}}$ *e pongasi* $\alpha = (k_0^k)^+ + k_0$. *Allora si ha in* $\mathcal{A}_\alpha^k$:

(i) $\mathrm{cof}\,\theta = \mathrm{cof}\,\theta^* = k_0$;

(ii) *esiste un intervallo* τ_x *di cardinalità* k_0^k;

(iii) *esiste un intervallo* τ_y *di cardinalità* $(k_0^k)^+$.

In particolare θ *non è simmetrico pur avendo cofinalità e coinizialità uguali.*

§ 3. IL TIPO D'ORDINE θ

Sui tipi d'ordine θ, λ', μ e τ_x, oltre alle proprietà elencate nel § 1, siamo in grado di provare anzitutto il seguente

TEOREMA 3.1. *In ogni modello non-standard sono equivalenti le condizioni*

$$\theta = \theta^* , \tag{3.1}$$

$$\theta = \theta + 1 + \theta , \tag{3.2}$$

$$\theta = \theta^* + 1 + \theta , \tag{3.3}$$

$$\theta = \tau_x \quad \textit{per qualche } x . \tag{3.4}$$

$$\theta = \tau_x \quad \textit{per ogni } x . \tag{3.5}$$

Ciascuna di esse implica sia

$$\lambda' = \mu\,, \tag{3.6}$$

sia

$$\tau_x = \tau_y \qquad \textit{per ogni} \quad x\,, y; \tag{3.7}$$

inoltre da (3.6) *segue*

$$\operatorname{cof} \theta = \operatorname{cof} \theta^*\,. \tag{3.8}$$

Se poi $\operatorname{cof} \theta = \omega$, *allora* (3.6) *è equivalente a* (3.8) *mentre ciascuna delle* (3.1)-(3.5) *equivale alla congiunzione* (3.7) & (3.8).

NOTE.

– L'implicazione (3.3) $\Rightarrow$ (3.6) è contenuta nella dimostrazione di [6, Thm. 2.12].

– L'equivalenza fra (3.6) e (3.8) è asserita in generale da [3, Lemma 3.2], ma la dimostrazione ivi fornita non è conclusiva se $\operatorname{cof} \theta > \omega$; ne segue che anche l'implicazione (3.1) $\Rightarrow$ (3.6) non è validamente stabilita in [3].

– Tutte le altre implicazioni non banali del teorema sembrano essere nuove.

Sulla base dei modelli definiti nella sezione precedente è possibile precisare ulteriormente lo status e i rapporti reciproci delle proprietà (3.1)-(3.8):

TEOREMA 3.2. (i) *Esistono modelli in cui* (3.8) *non vale, ed anzi le cofinalità di* θ *e* θ^* *possono essere arbitrariamente prefissate.*

(ii) *Esistono modelli* (*di cofinalità non numerabile arbitraria*) *in cui vale* (3.8) *ma non* (3.7)*; quindi non possono essere invertite né l'implicazione* (3.7) $\Rightarrow$ (3.8) *né una almeno delle* (3.1) $\Rightarrow$ (3.6) $\Rightarrow$ (3.8).

(iii) *Esistono modelli* (*di cofinalità arbitraria*) *in cui vale* (3.1), *ed anzi la più forte proprietà* $\theta = \mu = \lambda'$; *inoltre ogni modello ammette un'estensione della stessa cardinalità che verifica* $\theta = \mu$.

NOTE.

– (i) è già stato provato in [4] e [2, Thm. 2.7].

– la consistenza di (3.1) è provata in [2] con l'uso di modelli saturati, quindi di fatto con l'ipotesi aggiuntiva $|\,\theta\,| = \operatorname{cof} \theta = k^+ = 2^k$.

– Resta aperto il problema di determinare quale delle implicazioni (3.1) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (3.6) $\Rightarrow$ (3.8) sia (eventualmente) invertibile e quali relazioni intercorrano fra

(3.6) e (3.7). A tale problema è collegata anche la possibilità di ottenere $\theta = \theta^* \neq \mu$.

§ 4. Topologie indotte dall'ordinamento di *R

Dato un gruppo abeliano ordinato divisibile A è noto che ad ogni *sottogruppo isolato* H di A corrisponde un'*uniformità* U (H) di base

$$\{E(a) \mid a \in A^+ - H\} \qquad \text{ove} \quad E(a) = \{(x, y) \in A^2 \mid |x - y| < a\}.$$

In particolare la canonica topologia di Hausdorff su A è indotta dall'uniformità U (0) corrispondente al sottogruppo banale.

Nel caso qui considerato dell'asse reale non-standard, i sottogruppi isolati (e quindi le uniformità associate) sono in corrispondenza biunivoca con i *tagli di Dedekind del gruppo* (moltiplicativo) *dei ranghi* $^*\mathbf{R}^+/R_1$, il cui tipo d'ordine è $\theta^* + 1 + \theta$. In particolare (vedi [7, § 5]):

(i) la Q-uniformità U (0) corrisponde al segmento iniziale $\varnothing$;

(ii) ad ogni $a \in {}^*R^+$ corrispondono le due uniformità « adiacenti » S (a) e L (a) associate ai tagli determinati in $^*R^+/R$ dal rango di a (considerato a destra e, rispettivamente, a sinistra);

(iii) altre uniformità corrispondono alle lacune « monadiche » di $^*R^+$, cioè a quelle lacune che partiscono i ranghi senza spezzarne alcuno.

In analogia con [7] ci occuperemo qui della (pseudo) metrizzabilità e della completezza topologica di tali uniformità; esse sono traducibili in semplici proprietà dei tipi d'ordine λ' e θ sulla base del seguente lemma:

Lemma 4.1. *Sia* H *un sottogruppo isolato di* $^*\mathbf{R}$ *e sia* U = U (H) *l'uniformità generata da* H. *Allora*

(i) U *è pseudometrizzabile se e solo se* $^*\mathbf{R}^+ - H$ *ha coinizialità numerabile, e quindi se e solo se il taglio corrispondente a* H *nel gruppo dei ranghi* $^*\mathbf{R}^+/R_1$ *ha tipo* (α, ω) *ovvero* $(\alpha, 1)$.

(ii) U *è topologicamente completa se e solo se il quoziente* $^*\mathbf{R}/H$ *non ha lacune regolari.*

Nota. Un taglio (X, Y) nel gruppo abeliano ordinato A è detto regolare se per ogni $a \in A^+$ esiste $x \in X$ tale che $a + x \in Y$; il tipo di un taglio (X, Y) è la coppia (cof X, cof Y*).

Dalla parte (i) del Lemma 4.1 segue subito

Corollario 4 2. *In ogni modello non-standard si ha*:

(i) *le uniformità* S (a) *sono pseudometrizzabili*;

(ii) *le uniformità* L (a) *sono pseudometrizzabili se e solo se* $\operatorname{cof}\theta^* = \omega$;

(iii) *la* Q-*uniformità è metrizzabile se e solo se* $\operatorname{cof}\theta = \omega$;

(iv) *ad ogni successione crescente o decrescente in* θ *corrisponde un'uniformità pseudometrizzabile.*

Sulla base dei modelli definiti nel § 2 è facile vedere che, senza l'ipotesi di comprensività, sia la Q– che le L (a)–uniformità possono essere o non essere (pseudo) metrizzabili (vedi [7, Thm. 6.6–6.7]). Inoltre in ogni modello vi sono uniformità pseudometrizzabili corrispondenti a lacune nel gruppo dei ranghi. Questo fornisce una completa risposta, già parzialmente anticipata in [4] e [2], a [7, Quest. 1] e problemi connessi.

Il problema della completezza delle uniformità considerate è invece assai più complesso e ancora lungi dall'ottenere una risposta soddisfacente. Condizioni sufficienti sono fornite dai Teoremi seguenti; si noti che in [2, § 4] è data una differente dimostrazione del nostro Corollario 4.4, che risolve positivamente una congettura di Zakon.

Teorema 4.3. *Se un gruppo ordinato possiede una minima lacuna positiva, allora non possiede lacune regolari.*

Corollario 4.4. *In ogni modello non-standard le* S (a)-*uniformità sono complete.*

Teorema 4.5 *Sia* (α, β) *il tipo di una lacuna regolare nel gruppo ordinato* A; *allora* $\min(\alpha, \beta) \geq \operatorname{cof} A^-$.

Corollario 4.6. *Suppongasi che* $^*\mathbf{R}$ *non abbia tagli di tipo* (k, k); *allora l'uniformità* U (H) *è completa purchè sia* $\operatorname{cof}(^*\mathbf{R}^- - H) \geq k$.

In particolare la Q-*uniformità è completa se* $\operatorname{cof}\theta \geq k$, *mentre le* L (a)-*uniformità lo sono se* $\operatorname{cof}\theta^* \geq k$.

È facile vedere che la Q- e le L (a)-uniformità sono incomplete in tutti i modelli $\mathscr{C}_\alpha$ e $\mathscr{S}_\alpha$ con con $\alpha = \omega$, in quanto essi presentano lacune regolari sia in $^*\mathbf{R}$ sia in θ; non sono invece ancora noti modelli in cui l'una e/o le altre siano complete. Pertanto le questioni 2-3 di [7] attendono ancora una risposta definitiva.

Bibliografia

[1] M. Forti e F. Honsell (1986) – *On the order structure of the nonstandard real axis* (abstract). Apparirà su « J. Symb. Logic ».

[2] S. Kamo (1981) – *Nonstandard Natural Number Systems and Nonstandard Models.* « J. Symb. Logic », *46*, 365-376.

[3] S. Kamo (1981) – *Nonstandard Real Number Systems with Regular Gaps.* « Tsukuba J. Math. », *5*, 21-24.

[4] K. Potthof (1972) – *Ordnungseigenschaften von Nichtstandard Modellen,* in « *Theory of Sets and Topology* (*in Honour of Felix Hausdorff*) », a cura di G. Asser, J. Flaschmeyer e W. Rinow. VEB, Berlin 1972, 403-426.

[5] A. Robinson (1966) – *Non-Standard Analysis.* North Holland, Amsterdam 1966.

[6] S. Yang, D. Wang e J. Wang (1980) – *Sulla struttura d'ordine dei numeri iperreali di un'estensione ω-regolare* (in cinese). « Acta Math. Sin. », *23*, 658-667.

[7] E. Zakon (1969) – *Remarks on the Nonstandard Real Axis,* in « *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability* », a cura di W.A.J. Luxemburg, New York, 1969, 195-227.