
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ETTORE LASERRA, GIOVANNI MATARAZZO

**Il criterio dell'energia e l'equazione di
Maxwell-Cattaneo nella termoelasticità non lineare**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 78 (1985), n.6, p. 286–292.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1985_8_78_6_286_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Il criterio dell'energia e l'equazione di Maxwell-Cattaneo nella termoelasticità non lineare* (*). Nota di ETTORRE LASERRA (**) e GIOVANNI MATARAZZO (**), presentata (***) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — By means of the energy method we determine the behaviour of the canonical free energy of an elastic body, immersed in an environment that is thermally and mechanically passive; we use as constitutive equation for the heat flux a Maxwell-Cattaneo like equation.

INTRODUZIONE

In un precedente lavoro [7] si considerano le equazioni della termoelasticità non lineare relative a un corpo elastico immerso in un ambiente termomeccanicamente passivo a temperatura costante: tale restrizione esprime l'impossibilità dell'ambiente esterno di perturbare meccanicamente o termicamente il sistema (vedi Gurtin [4], [5]). Mediante il criterio dell'energia si mostra che l'andamento del funzionale dell'energia libera canonica, misurato su una sfera che si contrae, è monotono non crescente in un processo che parte da uno stato a temperatura costante. Tale legge di comportamento viene formulata in [7] in due modi diversi caratterizzati dalla presenza o meno di un termine di flusso di calore. A differenza della prima, la formulazione priva di tale termine richiede l'ipotesi che la « velocità di contrazione della sfera » sia finita quando i campi in considerazione tendono a zero e la temperatura del corpo tende a quella dell'ambiente.

In questa nota si mostra che è possibile eliminare tale restrizione mediante l'uso della equazione di Maxwell-Cattaneo [1] al posto della classica equazione di Fourier per il flusso di calore. In una nota successiva si considera l'analogo problema nel caso di un materiale elettromagnetico non lineare immerso in un ambiente a temperatura costante termoelettromagneticamente passivo.

(*) Lavoro eseguito sotto gli auspici del GNFM del C.N.R. e nell'ambito dei progetti di ricerca finanziati con i fondi M.P.I.

(**) Dipartimento di Matematica e applicazioni « Renato Caccioppoli » dell'Università di Napoli, Facoltà di Ingegneria, via Claudio 21, 80125 Napoli.

(***) Nella seduta del 28 giugno 1985.

1. Sia $\mathcal{B}$ un corpo continuo che occupi la regione B_0 dello spazio euclideo R^3 : la funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ designi il moto del punto $\mathbf{X} \in B_0$ nell'intervallo $[0, d_p]$, $d_p \in R^+$. Il comportamento termoelastico del corpo $\mathcal{B}$ viene descritto mediante i funzionali di risposta termoelastici $\hat{\mathbf{T}}, \mathbf{q}, \hat{h}$ in relazione al generico processo $p(t) \equiv (\mathbf{L}(t), \dot{\theta}(t), \mathbf{g}(t))$, dove $\mathbf{L}(t) \in \text{Lin}(V)$ è il gradiente di velocità, legato al gradiente di deformazione $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ dalla relazione $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}$, $\mathbf{q}(\mathbf{X}, t)$ è il vettore flusso di calore, $\mathbf{g}(\mathbf{X}, t) = \nabla_{\mathbf{X}} \theta(\mathbf{X}, t)$ è il gradiente della temperatura assoluta $\theta(\mathbf{X}, t) > 0$. Consideriamo materiali per cui lo stato è dato da $\sigma \equiv (\mathbf{F}, \theta, \mathbf{q})$ e dove i funzionali costitutivi sono così definiti ⁽¹⁾:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}(t) = \hat{\mathbf{T}}(\sigma_t) \\ \hat{h}(t) = \hat{h}(\sigma_t, p(t)) \\ \mathbf{q} + \gamma \mathbf{q} = -k\gamma \mathbf{g} \end{array} \right.$$

con $\gamma, k \in R^+$.

Osserviamo che, a differenza del lavoro [7], supponiamo verificata per il flusso di calore l'equazione di Maxwell-Cattaneo (1)₃. I campi in considerazione, sotto opportune ipotesi di regolarità, verificano [3] le equazioni della quantità di moto e del calore, nonché la Prima e Seconda Legge della termodinamica:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \ddot{\mathbf{x}} = \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}} + \mu \mathbf{b} \\ \mu \dot{\hat{h}} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \mu r \\ \mu \dot{\varepsilon} = \mu \dot{\hat{h}} + \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{L} \\ \mu \dot{\eta} \geq -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) + \mu \frac{r}{\theta} \end{array} \right.$$

dove $\varepsilon(\sigma_t)$, $\eta(\sigma_t)$, r , $\mathbf{b}$ designano rispettivamente la densità per unità di massa di energia interna, di entropia, di sorgente di calore e delle forze di massa, mentre $\mu(\mathbf{X}) > 0$ rappresenta la densità di massa nella configurazione di riferimento. Operando opportunamente sulle prime tre equazioni di (2) è possibile pervenire alla seguente equazione dell'energia:

$$(3) \quad \mu \left[\dot{\varepsilon} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} \right) \right] = \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \nabla \cdot (\hat{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{q}) + \mu r.$$

Poiché abbiamo considerato la temperatura assoluta come variabile indipendente è opportuno introdurre l'energia libera di Helmholtz $\psi(\sigma_t) = \varepsilon(\sigma_t) - \theta(\mathbf{X}, t) \eta(\sigma_t)$.

(1) Se indichiamo con ρ la funzione di transizione degli stati $\sigma_t = \rho(\sigma, p_t)$, dove p_t è la restrizione di $p(t)$ a $[0, t]$, $t \in [0, d_p]$, $\hat{h}(\sigma_t, p(t))$ è la potenza calorica, mentre $\hat{\mathbf{T}}(\sigma_t)$ è il valore attuale del primo tensore di Piola-Kirchoff.

Ricordiamo ora che, per un materiale del tipo (1), le funzioni ψ , $\hat{\mathbf{T}}$, η sono espresse mediante le seguenti relazioni:

$$(4) \quad \psi = \psi(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \theta), \quad \hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \theta), \quad \eta = \eta(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \theta).$$

Nell'ipotesi di sufficiente regolarità per le equazioni costitutive (1) è possibile dimostrare [2], imponendo le restrizioni che seguono dalla disuguaglianza di Clausius-Duhem (2)₄ che l'energia libera di Helmholtz costituisce un potenziale termodinamico non solo per le funzioni $\hat{\mathbf{T}}$ e η , ma anche per la funzione $\mathbf{q}$, cioè risulta:

$$(5) \quad \hat{\mathbf{T}} = \mu \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}}, \quad \eta = - \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \mathbf{q} = \gamma k \theta \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{q}}.$$

Inoltre supponiamo:

$$(6) \quad C(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{q}) = - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \geq 0,$$

dove C è legato alla capacità termica K dalla relazione $C = K/2 \theta$. Sia ora l'ambiente circostante al corpo $\mathcal{B}$ a temperatura θ_0 uniforme, localmente termicamente [6] e meccanicamente passivo [7]; siano cioè verificate rispettivamente le seguenti disuguaglianze:

$$(7) \quad \nabla \alpha \cdot \mathbf{q} \frac{\theta - \theta_0}{\theta} \geq \alpha \left[\nabla \cdot \left(\mathbf{q} \frac{\theta_0 - \theta}{\theta} \right) - \mu r \frac{\theta_0 - \theta}{\theta} \right]$$

su $B_0 \times [0, d_p]$, $\forall \alpha(X, t) \in C_0^\infty(R^3 \times [0, d_p])$;

$$(8) \quad \int_{B_0} \alpha \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dm + \int_{\partial B_0} \alpha \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{x}} \, d\sigma \leq - \int_{B_0} \alpha V(\mathbf{x}) \, dm$$

dove $\alpha(X, t) \geq 0$ è una qualunque funzione di $C_0^\infty(R^3 \times [0, d_p])$, $\mathbf{n}$ è il versore della normale esterna alla superficie ∂B_0 e $V(\mathbf{x}) \geq 0$ è la densità per unità di massa di energia potenziale di tutte le forze esterne applicate a $\mathcal{B}$; in particolare, se nella (8) vale il segno di eguaglianza, l'ambiente esterno al corpo viene detto conservativo.

Il significato della condizione (7) si comprende ad esempio scegliendo α costante. Allora integrando su B_0 si ha:

$$\int_{\partial B_0} \frac{\theta_0 - \theta}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - \int_{B_0} \mu r \frac{\theta_0 - \theta}{\theta} \, d\mathbf{x} \leq 0.$$

Se sono verificate le seguenti ipotesi:

$$(9) \quad \begin{aligned} \psi(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \theta_0) &\geq 0, \quad \psi(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0) = \\ &= 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{F}^2}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0) > 0, \end{aligned}$$

si perviene al seguente:

TEOREMA. *In ogni processo termoelastico che inizia da uno stato a temperatura costante $\theta(X, 0) = \theta_0$, l'energia libera canonica $\psi(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \theta_0)$ del corpo $\mathcal{B}$ immerso in un ambiente a temperatura costante θ_0 , localmente termicamente e meccanicamente passivo, evolve secondo la legge:*

$$\begin{aligned} \int_{S_t(X_0)} \left[\psi(\mathbf{F}(t), \mathbf{q}(t), \theta_0) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + V(\mathbf{x}(t)) \right] dm &\leq \\ \leq \int_{S_0(X_0)} \left[\psi(\mathbf{F}(0), \mathbf{0}, \theta_0) + \frac{1}{2} \mathbf{x}^2(0) + V(\mathbf{x}(0)) \right] dm \end{aligned}$$

$\forall t \in [0, d_p]$, dove $S_t(X_0) = \{X \in B_0 : |X - X_0| \leq Z + N(d_p - t), Z > 0\}$ con

$$N = \sup_{p(t)} \frac{\left| \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \theta) \cdot \dot{\mathbf{x}} \right| + \left| \frac{\theta - \theta_0}{\theta} \mathbf{q} \right|}{\psi(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \theta_0) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + C(\theta - \theta_0)^2 + V(\mathbf{x})}.$$

Dimostrazione. Su ogni processo $p(t)$ compatibile consideriamo la seguente grandezza:

$$(10) \quad \varphi(t) = \int_{B_0} \alpha(X, t) \left(\varepsilon - \theta_0 \eta + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + V(\mathbf{x}) \right) dm$$

dove $\varepsilon - \theta_0 \eta + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + V(\mathbf{x})$ è la densità per unità di massa di energia libera canonica, mentre $\alpha(X, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, d_p])$ è una funzione non negativa; derivando la (10) rispetto a t e tenendo conto di (2) e (3) si ottiene:

$$(11) \quad \begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &\leq \int_{B_0} \dot{\alpha} \left(\varepsilon - \theta_0 \eta + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + V(\mathbf{x}) \right) dm + \int_{B_0} \alpha (\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \\ &+ \frac{1}{\mu} \nabla \cdot (\hat{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) + \dot{V}) dm + \int_{B_0} \alpha \left[\nabla \cdot \left(\mathbf{q} \frac{\theta_0 - \theta}{\theta} \right) - r \mu \frac{\theta_0 - \theta}{\theta} \right] d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

che possiamo riscrivere, ricordando le (7), (8), nel modo seguente:

$$(11') \quad \dot{\phi}(t) \leq \int_{B_0} \dot{\alpha}(\varepsilon - \theta_0 \eta + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + V) dm - \int_{B_0} \nabla \alpha \cdot (\hat{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) d\mathbf{x} + \\ + \int_{B_0} \nabla \alpha \cdot \mathbf{q} \frac{\theta - \theta_0}{\theta} d\mathbf{x}.$$

Per la formula di Taylor e ricordando la (6) abbiamo:

$$(12) \quad C(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \theta')(\theta - \theta_0)^2 + \psi(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \theta_0) = \varepsilon(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \theta) - \\ - \theta_0 \eta(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \theta),$$

dove θ' è un opportuno valore di θ compreso tra θ e θ_0 ; se integriamo la (11') su $[0, t] \subset [0, d_p]$ e teniamo conto di (12), risulta:

$$(13) \quad \int_{B_0} \alpha(t) \left[\psi(\mathbf{F}(t), \mathbf{q}(t), \theta_0) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2(t) + V(\mathbf{x}(t)) \right] dm \leq \\ \leq \int_{P_0} \alpha(0) \left[\psi(\mathbf{F}(0), \mathbf{0}, \theta_0) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2(0) + V(\mathbf{x}(0)) \right] dm + \\ + \int_0^t \int_{B_0} (\dot{\alpha} + N |\nabla \alpha|) \left[\psi(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \theta_0) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + V(\mathbf{x}) + C(\theta - \theta_0)^2 \right] dm d\tau$$

con $\theta(\mathbf{X}, 0) = \theta_0$ e

$$N = \sup_{p(t)} \frac{|\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \theta) \cdot \dot{\mathbf{x}}| + \left| \frac{\theta - \theta_0}{\theta} \mathbf{q} \right|}{\psi(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \theta_0) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + C(\theta - \theta_0)^2 + V(\mathbf{x})}.$$

Osserviamo che la definizione ora scritta di N è giustificabile mediante il seguente:

LEMMA. Nelle ipotesi di regolarità ammesse per le funzioni $\hat{\mathbf{T}}, \mathbf{q}, \psi, C, \theta$ e $p(t)$, su ogni processo $p(t)$ che inizia a temperatura θ_0 compatibile con l'am-

biente a temperatura costante θ_0 , localmente termomeccanicamente passivo, risulta:

$$\frac{|\hat{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{x}}| + \left| \frac{\theta - \theta_0}{\theta} \mathbf{q} \right|}{\psi(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \theta_0) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + C(\theta - \theta_0)^2 + V(\mathbf{x})} \leq N, \quad N \in \mathbb{R}^+$$

Dimostrazione. Sviluppando $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \theta)$ in serie di Taylor in un intorno di θ_0 , a meno di infinitesimi di θ del secondo ordine, si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{|\hat{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{x}}| + \left| \frac{\theta - \theta_0}{\theta} \mathbf{q} \right|}{\psi(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \theta_0) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + C(\theta - \theta_0)^2 + V(\mathbf{x})} \leq \\ & \leq \frac{|\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \theta_0) \cdot \dot{\mathbf{x}}| + \left| \frac{\theta - \theta_0}{\theta} \mathbf{q} \right| + |(\theta - \theta_0) \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{x}}|}{\psi(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \theta_0) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + C(\theta - \theta_0)^2} \end{aligned}$$

dove $\mathbf{M} = \sup_{\rho(i)} \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \theta} \right]_{\theta=\theta_0}$;

se sviluppiamo ancora in serie di Taylor $\psi(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \theta_0)$ e $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \theta_0)$ in un intorno di $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, teniamo conto di (5), (9) e delle ipotesi di limitatezza dei campi in considerazione, l'andamento del secondo membro della disuguaglianza ora scritta in un intorno del punto $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0)$ risulta descritto dal seguente rapporto:

$$\frac{\left| \frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0) : \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{x}} \right| + \left| \frac{\theta - \theta_0}{\theta} \mathbf{q} \right| + |(\theta - \theta_0) \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{x}}|}{\frac{1}{2\mu} \frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0) : \mathbf{F} : \mathbf{F} + \frac{1}{2\gamma k \theta} \mathbf{q}^2 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + C(\theta - \theta_0)^2}$$

il quale è maggiorato da:

$$R(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{x}}, \theta) = \frac{a\mathbf{F}^2 + b\dot{\mathbf{x}}^2 + e\mathbf{q}^2 + n(\theta - \theta_0)^2}{c\mathbf{F}^2 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + m\mathbf{q}^2 + C(\theta - \theta_0)^2}$$

dove a, b, e, n, c, m sono opportune costanti positive; considerando poi che $R(\mathbf{F}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{x}}, \theta)$ è limitato e che il suo limite converge quando $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{0}$, $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{0}$ e $\theta \rightarrow \theta_0$, conseguiamo il risultato del Lemma.

Consideriamo ora per ogni $h > 0$ e $X_0 \in B_0$ le seguenti funzioni [7]

$$(14) \quad \chi_h = 1 - \lambda_h (|X - X_0| - N(d_p - t) - Z + h),$$

dove:

$$\lambda_h(\xi) = \int_{-h}^{\xi} \delta_h(v) dv, \quad \delta_h(\xi) \in C^\infty(-\infty, +\infty), \quad \int_{-h}^h \delta_h(\xi) d\xi = 1,$$

$$\delta_h(\xi) \geq 0, \quad \delta_h(\xi) \leq \frac{\text{cost.}}{h}, \quad \delta_h(\xi) = 0 \text{ per } |\xi| \geq h;$$

se poniamo infine nella (13) $\alpha(X, t) = \chi_h(X, t)$ e passiamo al limite per $h \rightarrow 0$, otteniamo la disuguaglianza espressa nel teorema.

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. CATTANEO (1948) - *Sulla conduzione del calore*, « Atti Sem. Mat. e Fis. Univ. Modena », 3, 13-21.
- [2] M. CIARLETTA (1984) - *Sulle restrizioni termodinamiche per continui del tipo Maxwell-Cattaneo*, « Boll. UMI », (6) 3-A, 275-281.
- [3] M. FABRIZIO (1983) - *Entropy equation and absolute temperature for simple materials*, « Suppl. BUMI (fis. mat.) », 2, 261-271.
- [4] M.E. GURTIN (1973) - *Thermodynamics and the potential energy of an elastic body*, « J. Elasticity », 3, 23-26.
- [5] M.E. GURTIN (1974) - *Thermodynamics and the energy criterion for stability*, « Arch. Rational Mech. Anal. », 52, 33-103.
- [6] E. LASERRA (1980) - *Il criterio dell'Energia per un sistema elettromagnetico dissipativo*, « Ann. Univ. di Ferrara », Serie VII, Sc. Mat., 26, 155-163.
- [7] G. MATARAZZO (1980) - *Sull'andamento dell'energia libera canonica in un processo termoelastico*, « Rend. Accad. Naz. Lincei, Sci. Fis. Mat. e Nat. », Serie VIII, 69 (1-2).