Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Piero Bassanini

Su un teorema di unicità per l'equazione semilineare del calore in un dominio illimitato

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **78** (1985), n.6, p. 278–285.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1985_8_78_6_278_0>

Fisica matematica. — *Su un teorema di unicità per l'equazione semilineare del calore in un dominio illimitato* (*). Nota di PIERO BASSANINI, presentata (**) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — A periodic BVP for a semilinear elliptic-parabolic equation in an unbounded domain Ω contained in a half-space of $\mathbf{R}^n$ is considered, with Dirichlet boundary conditions on the finite part of $\partial\Omega$. A theorem of uniqueness of periodic solutions is proved by showing that a suitable function of the "energy" $E(x)$ is subharmonic in Ω and satisfies a Phragmèn-Lindelöf growth condition at infinity.

1. Sia Ω un dominio (aperto connesso) illimitato di $\mathbf{R}^n$ contenuto nel semispazio $x_n > 0$, e B la parte al finito della sua frontiera. In questa Nota vengono formulate, con un procedimento molto semplice, condizioni di crescita all'infinito sotto le quali l'equazione semilineare del calore

$$(1) \qquad \Delta_n u = u_t + G(u) \quad , \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \, , \qquad t \in \mathbf{R}$$

(ed altre analoghe, di tipo ellittico-parabolico) ha al più una soluzione $u(x, t)$, periodica in t di periodo T, determinata dalla condizione al contorno del tipo di Dirichlet su B

$$(2) \qquad u(y, t) = f(y, t) \quad , \quad (y, t) \in B \times \mathbf{R}$$

dove f è una data funzione, continua su $B \times \mathbf{R}$ e periodica in t di periodo T.

Considereremo soluzioni regolari $u(x, t)$ del problema al contorno (1)-(2), ossia continue in $(\Omega \cup B) \times \mathbf{R}$ e aventi derivate parziali $u_t, u_{x_j}, u_{x_i x_j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ continue in $\Omega \times \mathbf{R}$.

Per $G(u) = 0$ un tipico problema schematizzabile in questo modo è quello della temperatura della crosta terrestre [10], o quello del moto di un fluido viscoso delimitato da una parete oscillante piana [11].

Soluzioni periodiche dell'equazione del calore, e di equazioni paraboliche più generali, sono state studiate da moltissimi autori (cfr. il Cap. 9 e la Biblio-

(*) Ricerca svolta nell'ambito dell'attività del G.N.F.M. del C.N.R., e finanziata dal Ministero Pubblica Istruzione (Fondi 40%).
(**) Nella seduta del 28 giugno 1985.

grafia del recente libro di Cannon [1]): citeremo qui i lavori di Prodi [2], Shmulev [3], Fife [4], Vaghi [5], Liu e Pao [6], Vejvoda [7]. Una situazione simile a quella considerata in questa Nota è stata studiata da Kono [8] e Kusano [9]. Nonostante l'abbondanza della letteratura in proposito, tuttavia, non sembra che il semplice procedimento qui seguito, e basato sullo studio dell'« energia » $\mathrm{E}(x)$, sia mai stato proposto prima. Si osserva in sostanza che una opportuna funzione di $\mathrm{E}(x)$ risulta subarmonica in Ω: allora la condizione di crescita

$$\text{(C)} \qquad \mathrm{E}(x) := {}^1/_2 \int_0^{\mathrm{T}} [u(x\,,t)]^2\,\mathrm{d}t = o(|x|^2) \qquad |x| \to \infty\,, \qquad x \in \Omega$$

assieme all'usuale condizione di monotonicità per $\mathrm{G}(u)$, permette di dimostrare immediatamente il teorema di unicità per (1)–(2) (n. 2).

Al n. 3 il teorema di unicità così provato viene esteso a equazioni e sistemi di equazioni più generali, di tipo ellittico–parabolico, a coefficienti periodici, imponendo diverse condizioni di crescita. Viene così incluso il caso di conducibilità termica esponenziale in x [13].

Semplici controesempi, riportati al n. 4, mostrano che le principali ipotesi fatte, ossia la condizione di crescita per u, quella di monotonicità per G, e quella sulla forma caratteristica dell'equazione, non sono sovrabbondanti.

2. Ci servirà il seguente ben noto corollario del teorema di Phragmèn–Lindelöf (cfr. [12]):

Sia D *un aperto illimitato nel semispazio* $x_n > 0$ *e* B′ *la parte al finito di* ∂ D. *Sia* $\mathrm{U}(x)$ *una funzione a valori in* **R**, *due volte differenziabile in* D, *tale che* $\Delta_n \mathrm{U} \geq 0$ *in* D *e* $\limsup_{x \to \mathrm{B}',\, x \in \mathrm{D}} \mathrm{U}(x) \leq 0$. *Se in aggiunta la parte positiva* $\mathrm{U}^+(x) := \max\{0\,,\mathrm{U}(x)\}$ *di* $\mathrm{U}(x)$ *soddisfa*

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{U}^+(x) = o(|x|) \qquad |x| \to \infty\,, \quad x \in \mathrm{D}$$

allora $\mathrm{U}(x) \leq 0$ *in* D.

Converrà supporre $\mathrm{G}(u)$ continua in **R** e monotona; basterà che

$$\text{(M)} \qquad \int_0^{\mathrm{T}} (u - v)\,[\mathrm{G}(u) - \mathrm{G}(v)]\,\mathrm{d}t \geq 0$$

per ogni $x \in \Omega$ e per ogni coppia di funzioni ammissibili $u(x\,,t)\,,\,v(x\,,t)$. Siano $u_1\,,u_2$ due soluzioni del problema ai limiti (1)–(2) con il medesimo dato al bordo

f e soddisfacenti la condizione di crescita (C). Posto $u := u_1 - u_2$ [(1)] sia

$$E(x) := {}^1/_2 \int_0^T [u_1(x, t) - u_2(x, t)]^2 \, dt \tag{4}$$

l'« energia » relativa ad u per un periodo di oscillazione (cfr. (C)). Nelle nostre ipotesi, $E(x)$ risulta continua in $\Omega \cup B$ con derivate parziali prime e seconde continue in Ω, non negativa in Ω e nulla su B, e infine, per (C), soddisfa la condizione di crescita all'infinito

$$E(x) = o(|x|^2) \qquad |x| \to \infty, \qquad x \in \Omega. \tag{5}$$

Per dimostrare il teorema di unicità basterà provare che $E(x) \equiv 0$ in Ω. Per $x \in \Omega$ si ha infatti, per (M) e per la periodicità di u:

$$\operatorname{grad} E = \int_0^T u \operatorname{grad} u \, dt, \tag{6}$$

$$\Delta_n E = \int_0^T \operatorname{grad}^2 u \, dt + \int_0^T u \, \Delta_n u \, dt \geq \int_0^T \operatorname{grad}^2 u \, dt \tag{7}$$

di modo che $E(x)$ risulta subarmonica in Ω. D'altra parte è, per la (6)

$$\operatorname{grad}^2 E \leq \int_0^T u^2 \, dt \int_0^T \operatorname{grad}^2 u \, dt \tag{8}$$

sicché risulta

$$2 E \, \Delta_n E - \operatorname{grad}^2 E \geq 0 \qquad \text{in } \Omega. \tag{9}$$

Sia $D := \{x \in \Omega \mid E(x) > 0\}$ l'interno del supporto di $E(x)$. Posto

$$U(x) := [E(x)]^{1/2} \tag{10}$$

si trova

$$\Delta_n U = \frac{1}{4 E^{3/2}} [2 E \, \Delta_n E - \operatorname{grad}^2 E] \tag{11}$$

(1) Ovviamente, questa u non è, in generale, la u della (1).

di modo che, per la (9), $U(x)$ è subarmonica e positiva in D. Se D non fosse vuoto, si avrebbe per le (5)–(11)

$$\text{(12)} \quad \Delta_n U \geq 0 \text{ in } D, \quad U(x) = O \text{ in } B', \quad U(x) = o(|x|) \text{ per } |x| \to \infty, \; x \in D$$

dove B' denota la parte al finito di ∂D. Per il corollario del teorema di Phragmèn–Lindelöf riportato sopra, sarebbe $U \equiv 0$ in D, e si arriverebbe all'assurdo. Dunque D è necessariamente vuoto, ossia $E \equiv 0$ in $\bar{\Omega}$.

Si può osservare che, per l'esistenza di una soluzione regolare (questione di cui non ci occupiamo qui), occorrerà che il dato al bordo f soddisfi esso pure alla condizione di crescita (C), che può così intendersi su tutto $\bar{\Omega}$.

Supponiamo ora che u_1 e u_2 siano le soluzioni di (1)–(2) corrispondenti ai dati al contorno f_1, f_2; procedendo come si è appena fatto per la funzione $V(x) := U(x) - A$, con

$$A := \left\{ \tfrac{1}{2} \sup_{y \in B} \int_0^T [f_1(y,t) - f_2(y,t)]^2 \, dt \right\}^{1/2}$$

si ha $\Delta_n V \geq 0$ in D, $V \leq 0$ su B', $V^+(x) = o(|x|)$ per $|x| \to \infty$, $x \in D$. Applicando ancora il corollario riportato all'inizio del paragrafo, segue $V(x) \leq 0$ in D, ossia

$$\text{(13)} \qquad \sup_{x \in \Omega} \int_0^T (u_1 - u_2)^2 \, dt \leq \sup_{y \in B} \int_0^T (f_1 - f_2)^2 \, dt$$

da cui si riconosce che la soluzione, se esiste, dipende con continuità dal dato al bordo, nel senso della norma $\mathscr{L}^\infty(\Omega\,;L^2(0,T))$.

Se $G(0) = 0$, la soluzione corrispondente a $f = 0$ è $u = 0$, sicché da (13) segue

$$\text{(14)} \qquad \sup_{\in \Omega} \int_0^T [u(x,t)]^2 \, dt \leq \sup_{y \in B} \int_0^T [u(y,t)]^2 \, dt$$

anzi questa vale sostituendo a Ω un qualsiasi dominio $\hat{\Omega}$ di frontiera $\hat{B}$ ivi contenuto.

3. Il procedimento visto si estende facilmente a equazioni del second'ordine semilineari del tipo ellittico–parabolico

$$\text{(15)} \qquad \Delta_n u = a(x)\, u_{tt} + b(x)\, u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i\, u_{x_i} + G(x, t, u) \quad \text{in } \Omega \, x \, \mathbf{R}$$

con

$$(16)\qquad \begin{cases} G(x, t, u) \text{ periodica in } t \text{ di periodo } T, \; a(x) \le 0\,, \\ b \in C^0(\Omega)\,, \quad a \in C^0(\Omega)\,, \quad G \in C^0(\Omega \times \mathbf{R}^2) \end{cases}$$

e G soddisfacente (M).

Introduciamo le funzioni ausiliarie non negative

$$(17)\qquad \begin{aligned} U_1(x) &:= E(x) \exp\left[-\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right], \\ U_2(x) &:= \left[E(x)\right]^{1/2} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\sum_{1}^{n} a_i x_i\right] \end{aligned}$$

con $E(x)$ definita come alla (4). Procedendo come al n. 2, e tenendo conto delle (16), si trova, posto $c := \exp\left[\tfrac{1}{2}\sum_i a_i x_i\right]$

$$c\,\Delta_n U_1 = \Delta_n E - \sum_i a_i E_{x_i} + E \sum_i a_i^2/4 \ge \Delta_n E - \sum_i a_i E_{x_i} \ge 0 \qquad \text{in } \Omega\,,$$

di modo che U_1 risulta subarmonica in Ω, e nulla su B. Con calcoli analoghi si ha anche

$$\begin{aligned} c\,\Delta_n U_2 &= (4E^{3/2})^{-1}\left[2E(\Delta_n E - \sum_i a_i E_{x_i}) - \operatorname{grad}^2 E + E^2 \sum_i a_i^2\right] \\ &\ge (4E^{3/2})^{-1}\left[2E(\Delta_n E - \sum_i a_i E_{x_i}) - \operatorname{grad}^2 E\right] \ge 0 \qquad \text{in } D\,, \end{aligned}$$

ossia U_2 risulta subarmonica nell'aperto $D := \{x \in \Omega \mid E(x) > 0\}$, e nulla su B′ (la parte al finito di ∂D). Supponiamo soddisfatta l'una o l'altra (la meno restrittiva) delle condizioni di crescita

$$(G)\qquad \int_0^T [u(x, t)]^2\, dt = o\left(|x|^{2\alpha} \exp\left[\alpha \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right]\right) \qquad |x| \to \infty\,, x \in \Omega$$

con $\alpha = 1/2$ oppure $\alpha = 1$. Allora per $\alpha = 1/2$ la funzione U_1 soddisfa la condizione di crescita (3), mentre per $\alpha = 1$ vi soddisfa la U_2. In entrambi i casi, ripetendo il ragionamento svolto al n. 2, si riconosce che D è vuoto, ossia $E(x) \equiv 0$ in $\overline{\Omega}$, e quindi $u_1 \equiv u_2$.

Resta così dimostrato il seguente

TEOREMA. *Sotto le ipotesi* (M), (G), (16) *il problema al contorno* (15), (2) *ha al più una soluzione regolare* $u(x, t)$, *periodica rispetto alla* t *con periodo* T.

La dipendenza continua, nella norma $\mathscr{L}^\infty(\Omega\,;\,L^2(0, T))$ (pesata opportunamente secondo il valore prescelto per α), segue dalla relazione analoga alla (13), che ora si scrive

$$\begin{aligned}(18)\qquad &\sup_{x\in\Omega} \exp\left[-\alpha \sum_i a_i x_i\right] \int^{T} [u_1(x, t) - u_2(x, t)]^2 \, dt \\ &\leq \sup_{y\in B} \exp\left[-\alpha \sum_i a_i y_i\right] \int_0^T [f_1(y, t) - f_2(y, t)]^2 \, dt\end{aligned}$$

e, se $G(x, t, 0) = 0$ sussiste anche l'analoga della (14).

Il teorema di unicità può ulteriormente estendersi a sistemi ellittico–parabolici della forma

$$(19)\qquad \begin{cases} \Delta_n u = a(x)\, u_{tt} + b(x)\, u_t + v_t + G(x, t, u, v) \\ \Delta_n v = \hat{a}(x)\, v_{tt} + \hat{b}(x)\, v_t + \beta\, u_t + H(x, t, u, v) \end{cases} \quad \text{in } \Omega\, x\, \mathbf{R}$$

$$(20)\qquad u = f \quad , \quad v = g \quad (f \text{ e } g \text{ assegnate}) \text{ su } B \times \mathbf{R}$$

con le solite ipotesi di regolarità e periodicità delle funzioni incognite, dati e coefficienti, e con $a(x) \leq 0$, $\hat{a}(x) \leq 0$, $\beta > 0$.

La condizione di monotonicità (M) va sostituita da

$$\int_0^T (u_1 - u_2)(G_1 - G_2)\, dt \geq 0 \qquad \int_0^T (v_1 - v_2)(H_1 - H_2)\, dt \geq 0$$

(dove $G_i := G(x, t, u_i, v_i)$, $H_i := H(x, t, u_i, v_i)$, $i = 1,2$) e la condizione di crescita (C) da

$$E(x) := \tfrac{1}{2} \int^{T} \left[u^2 + \frac{1}{\beta} v^2\right] dt = o(|x|^2) \qquad |x| \to \infty, x \in \Omega\,.$$

4. (Controesempi e osservazioni). L'esempio

$$u_{xx} = u_t - u \;\; (x > 0) \quad ; \quad u(0, t) = 0 \qquad (n = 1, \Omega = (0 + \infty))$$

avente le infinite soluzioni (periodiche in x e t) $u = \lambda \sin x$ ($\lambda \in \mathbf{R}$), mostra che la condizione (M) non si può omettere (ferme restando le altre).

Similmente non può omettersi la condizione di crescita (C), come mostra l'esempio

$$u_{xx} + u_{yy} = u_t \ (x > 0 \, , \, y \in \mathbf{R}) \quad ; \quad u(0 \, , y \, , t) = 0 \qquad (y \in \mathbf{R})$$

che ammette le infinite soluzioni $u = \lambda x$, $u = e^{-\lambda y} \sin \lambda x$ ($\lambda \in \mathbf{R}$).

Infine, il problema iperbolico (con $a(x) > 0$)

$$u_{xx} - u_{tt} = 0 \ (x > 0) \quad , \quad u(0 \, , t) = 0$$

ha infinite soluzioni $u = \omega(t - x) - \omega(t + x)$, con ω T–periodica arbitraria.

Perciò l'ipotesi che l'equazione abbia forma caratteristica non negativa non si può omettere [(2)].

Osserviamo, per concludere, che nel caso in cui sia $\mathrm{G}(u) = 0$ nella (1), ed $u(x \, , t)$ sia soluzione di classe C^∞, l'energia $\mathrm{E}(x)$ corrispondente verifica le disuguaglianze

$$\Delta_n^m \mathrm{E} \geq 0 \quad , \quad \mathrm{grad}^2 \Delta_n^m \mathrm{E} \leq 2 \, \Delta_n^m \mathrm{E} \, \Delta_n^{m+1} \mathrm{E} \qquad (x \in \Omega \, , m = 1 \, , 2 \, , \ldots)$$

le quali mostrano che tanto i Laplaciani iterati $\Delta_n^m \mathrm{E}$ quanto le loro radici quadrate sono funzioni subarmoniche in Ω.

Bibliografia

[1] J.R. Cannon (1984) – *The one-dimensional heat equation*, Addison-Wesley.

[2] G. Prodi (1952) – *Soluzioni periodiche di equazioni a derivate parziali di tipo parabolico non lineari*, « Riv. Mat. Univ. Parma », *3*, 265-290.

[3] I.I. Shmulev (1961) – *Periodic solutions of boundary value problems without initial conditions for parabolic equations*, « Dokl. Akad. Nauk SSSR », *141*, 1313-1316.

[4] P. Fife (1964) – *Solutions of parabolic boundary value problems existing for all times*, « Arch. Rat. Mech. Anal. », *16*, 155-186.

[5] C. Vaghi (1972) – *Soluzioni limitate o quasiperiodiche dell'equazione quasi lineare del calore*, « Rend. Sem. Mat. Fis. Milano », *42*, 25-46.

[6] B.–P. Liu e C.V. Pao (1982) – *Periodic solutions of coupled semilinear parabolic boundary value problems*, « Nonlinear Anal. », *6*, 237-252.

[7] O. Vejvoda (1966) – *Periodic solutions of nonlinear partial differential equations of evolution*, Equadiff II (Conf. Bratislava, 1966), 293-300.

[8] M. Kono (1966) – *Remarks on periodic solutions of linear parabolic differential equations of the second order*, « Proc. Japan. Acad. », *42*, 5-9.

[9] T. Kusano (1966) – *A remark on a periodic boundary value problem of parabolic type*, « Proc. Japan. Acad. », *42*, 10-12.

(2) L'ipotesi di connessione per Ω si può invece tralasciare.

[10] A.N. TIHONOV e A.A. SAMARSKII (1963) – *Equations of Mathematical Physics*, Macmillan.
[11] N. CURLE e H.J. DAVIES (1968) – *Modern Fluid Dynamics*, Van Nostrand.
[12] M.H. PROTTER e H.F. WEINBERGER (1967) – *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall.
[13] D. GRAFFI (1980) – *Nonlinear partial differential equations in physical problems*, Pitman.