Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Dionigi Galletto

Sul collasso di un ammasso di materia disgregata. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **78** (1985), n.6, p. 268–277.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1985_8_78_6_268_0>

Meccanica. — *Sul collasso di un ammasso di materia disgregata* (*). Nota II di DIONIGI GALLETTO (**) e BRUNO BARBERIS (**), presentata (***) dal Corrisp. D. GALLETTO.

SUMMARY. — With reference to Nota I, the hypothesis that the cluster $\mathscr{U}$ is spherical is substituted by the hypothesis that it has an isotropic behaviour with respect to a given frame of reference $\mathscr{T}_O$ with origin in an element O internal to $\mathscr{U}$. The kinematical behaviour of $\mathscr{U}$ during the collapse with respect to the frames of reference with origin in the elements of $\mathscr{U}$ and in translatory motion with respect to $\mathscr{T}_O$ is studied. This behaviour is the same with respect to each of such frames, which are in translatory motion with respect to inertial frames. With the hypotheses that the forces at a distance depend on masses and distances only (see [3], 2), the integral equation which such forces must satisfy and in which also the shape of the cluster is unknown is determined. It is proved that if the forces at a distance are those expressed by Newton's law of gravitation the shape of the cluster is necessarily spherical, with the consequence that if it is not spherical $\mathscr{U}$ cannot have an isotropic behaviour during the collapse. Finally, under suitable hypotheses it is proved that the forces at a distance are necessarily expressed by Newton's law of gravitation and that, at least under such hypotheses, the shape of $\mathscr{U}$ is necessarily spherical.

1. Ricollegandosi alle considerazioni svolte al n. 2 della Nota I ([4]), si abbandoni ora l'ipotesi che l'ammasso isolato $\mathscr{U}$ ivi considerato abbia forma sferica e si supponga invece che esso (ritenuto ovviamente limitato), durante il collasso, oltre che a conservarsi omogeneo, abbia *comportamento isotropo* rispetto ad un assegnato riferimento $\mathscr{T}_O$ avente origine in un elemento interno di $\mathscr{U}$ che verrà indicato con O. Con ciò si intende dire che rispetto al riferimento $\mathscr{T}_O$ le velocità degli elementi di $\mathscr{U}$ in tutto l'intervallo di tempo in cui ha luogo il collasso sono radiali.

Non presentandosi più nella presente Nota l'esigenza, dettata da motivi di chiarezza, di distinguere con differenti simboli tra elementi e posizioni da essi occupate rispetto ad un assegnato riferimento, con i caratteri latini maiuscoli verranno ora indicati sia gli elementi considerati che le posizioni da essi occupate.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R.
(**) Istituto di Fisica Matematica « J.-Louis Lagrange », Università di Torino, Via Carlo Alberto 10, 10123 Torino.
(***) Nella seduta del 28 giugno 1985.

Ciò premesso, indicato con P un qualsiasi elemento di $\mathcal{U}$ e ritenendo, ovviamente, che la funzione $\mu(t)$ risulti derivabile quante volte occorre, si faccia la posizione

$$h(t) = -\frac{1}{3}\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}. \tag{1}$$

Introdotto un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x^i $(i = 1, 2, 3)$ con origine in O e solidale al riferimento $\mathcal{T}_O$ e indicate con v^i le componenti della velocità di P nel suddetto sistema di coordinate e con v la velocità scalare, risulta, tenendo presente che $\mathcal{U}$ ha comportamento isotropo rispetto a $\mathcal{T}_O$:

$$v^i = v\,\frac{x^i}{\rho}, \tag{2}$$

dove con ρ si è indicata la distanza di P da O e con x^i si sono indicate le coordinate di P. Si ha pertanto

$$\sum_1^3{}_i \frac{\partial v^i}{\partial x^i} = \frac{\partial v}{\partial \rho} + 2\,\frac{v}{\rho} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 v)$$

e la condizione che $\mathcal{U}$ durante il collasso si mantenga omogeneo comporta quindi, facendo ricorso all'equazione di continuità e tenendo presente la posizione (1):

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 v) = 3\,h\,\rho^2,$$

da cui segue immediatamente

$$v(t) = h(t)\,\rho(t) + \frac{f(t)}{\rho^2(t)}, \tag{3}$$

con la funzione $f(t)$ che, come ora si vedrà, non può essere che identicamente nulla.

Indicata con $\mathcal{C}$ la configurazione di $\mathcal{U}$ nel generico istante t, con $m(t)$ la minima distanza in detto istante della frontiera $\partial\mathcal{C}$ di $\mathcal{C}$ da O e con ρ il valore assunto da $\rho(t)$ in detto istante, si consideri il dominio sferico $\mathcal{S}_\rho$ solidale al riferimento $\mathcal{T}_O$ con centro in O e con il raggio ρ, ovviamente fisso, soggetto all'unica condizione $\rho < m(t + \mathrm{d}t)$. L'incremento di massa che ha luogo in $\mathcal{S}_\rho$ nell'intervallo di tempo che va da t a $t + \mathrm{d}t$, tenendo presenti (3), (2) e (1), è dato da

$$-\,\mathrm{d}t\int_{\partial\mathcal{S}_\rho} \mu(t)\left(h(t)\,\rho + \frac{f(t)}{\rho^2}\right)\mathrm{d}\sigma = \left(\frac{4}{3}\,\pi\,\dot{\mu}(t)\,\rho^3 - 4\,\pi\,\mu(t)\,f(t)\right)\mathrm{d}t\,.$$

D'altra parte il suddetto incremento di massa è pure espresso da

$$\mathrm{d}t \int_{\mathscr{S}_\rho} \dot{\mu}(t)\,\mathrm{d}c = \frac{4}{3}\,\pi\,\dot{\mu}(t)\,\rho^3\,\mathrm{d}t\,,$$

eguaglianza che, confrontata con la precedente e tenendo conto dell'arbitrarietà di t, implica $f(t) \equiv 0$.

Da (3) e (2) segue pertanto [1]

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{OP}}{\mathrm{d}t} = h(t)\,\mathrm{OP}\,. \tag{4}$$

2. Ritenendo, come al n. 2 della Nota I, che il collasso abbia inizio ad un dato istante t_1 a partire dalla quiete rispetto al riferimento $\mathscr{T}_\mathrm{O}$, e fatta la posizione

$$\mathrm{R}(t) = \exp \int_{t_1}^{t} h(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

da (4) segue

$$\mathrm{OP}(t) = \mathrm{R}(t)\,\mathrm{OP}_1\,, \tag{5}$$

dove si è posto

$$\mathrm{OP}(t_1) = \mathrm{OP}_1\,.$$

L'eguaglianza (5) esprime che:

I. *Rispetto al riferimento $\mathscr{T}_\mathrm{O}$ le configurazioni assunte da $\mathscr{U}$ durante il collasso sono tra loro omotetiche con polo in* O.

Ne segue, come al n. 2 della Nota I, che anche ora si può introdurre l'istante t_0, corrispondente all'istante in cui l'ammasso si ridurrebbe a un punto materiale. L'intervallo $[t_1\,,\,t_0)$ rappresenta quindi anche ora l'intervallo di tempo in cui ha luogo il collasso.

Comunque considerato l'elemento O′ di $\mathscr{U}$ e il riferimento $\mathscr{T}_{\mathrm{O}'}$ con origine in esso e in moto traslatorio rispetto al riferimento $\mathscr{T}_\mathrm{O}$, tenendo presente che è

(1) È il caso di osservare che la legge (4) necessariamente implica che la funzione $h(t)$ abbia l'espressione (1). Infatti, come conseguenza di (4), la superficie sferica avente per centro O e raggio $\rho(t) = |\,\mathrm{OP}(t)\,| < m(t)$ risulta una superficie materiale e perciò si ha: $4/3\ \pi\,\mu(t)\,\rho^3(t) = \text{cost}$. Da questa, derivando, si ottiene

$$\dot{\rho}(t) = -\,\frac{1}{3}\,\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}\,\rho(t)\,,$$

la quale, confrontata con (4), implica che la funzione $h(t)$ sia espressa da (1).

$O'P = OP - OO'$, da (4) segue che la velocità di P rispetto a $\mathcal{T}_{O'}$ è ancora data da una relazione analoga alla (4):

$$\frac{d\, O'P}{dt} = h(t)\, O'P\,, \tag{4'}$$

dove $h(t)$ è la stessa funzione che compare in (4), relazione dalla quale segue l'analoga della (5):

$$O'P(t) = R(t)\, O'P_1\,,$$

che a sua volta esprime che:

II. *Rispetto al riferimento $\mathcal{T}_{O'}$, le configurazioni assunte da $\mathcal{U}$ durante il collasso sono tra loro omotetiche con polo in* O'.

L'ammasso $\mathcal{U}$ ha quindi comportamento isotropo non solo rispetto a $\mathcal{T}_O$ ma rispetto a ogni riferimento del tipo di $\mathcal{T}_{O'}$. Chiamati *naturali* i riferimenti del tipo di $\mathcal{T}_{O'}$, e con essi ovviamente il riferimento $\mathcal{T}_O$ che da essi, almeno dal punto di vista cinematico, risulta indistinguibile, si può quindi affermare che:

III. *L'ammasso $\mathcal{U}$ ha lo stesso comportamento cinematico, espresso da* (4), (4'), *rispetto a ogni riferimento naturale.*

Da (4) segue poi

$$\frac{d^2 OP}{dt^2} = (\dot{h}(t) + h^2(t))\, OP\,, \tag{6}$$

espressione che conserva immutata la sua forma in ogni riferimento naturale e che corrisponde all'espressione (5) della Nota I, con la funzione $\varphi(t)$ data ora da

$$\varphi(t) = \dot{h}(t) + h^2(t)\,, \tag{7}$$

funzione che verrà anche ora ritenuta continua nel suo intervallo di definizione che si può anche ora ritenere dato da $[t_1, t_0)$.

A questo punto si possono ripetere le stesse considerazioni svolte alla fine del n. 2 della Nota I ed introdurre la funzione $\Phi(\mu) = \varphi(t(\mu))$, definita nell'intervallo $[\mu_1, \infty)$ e ivi continua, per la quale, come per la $\varphi(t)$, non si può per ora escludere la dipendenza dalla configurazione di $\mathcal{U}$ all'istante t_1 (configurazione che verrà indicata con $\mathcal{C}_1$) e da $\mu_1 = \mu(t_1)$. Con l'introduzione della funzione $\Phi(\mu)$, l'eguaglianza (6) diventa

$$\frac{d^2 OP}{dt^2} = \Phi(\mu)\, OP\,, \tag{8}$$

la quale conserva immutata la sua forma in ogni riferimento naturale e che è l'analoga della (6) della Nota I.

3. Intendendo ora con $\mathscr{T}_O$ un qualsiasi riferimento naturale e indicato con G (t) il baricentro di $\mathscr{U}$ all'istante t, poiché le configurazioni assunte da $\mathscr{U}$ rispetto a $\mathscr{T}_O$ sono omotetiche con polo in O e $\mathscr{U}$ si mantiene omogeneo durante il collasso, segue che se G appartiene a $\mathscr{U}$ esso è un elemento di $\mathscr{U}$ e quindi che il riferimento $\mathscr{T}_G$ con origine in G e in moto traslatorio rispetto a $\mathscr{T}_O$ è un riferimento naturale.

Conviene a questo punto addirittura estendere la nozione di riferimento naturale al caso in cui l'origine del riferimento sia un punto esterno a $\mathscr{U}$: il riferimento verrà chiamato naturale se la sua origine si muove durante il collasso con la stessa legge secondo cui si muovono gli elementi di $\mathscr{U}$. Ne segue che, con questa estensione della nozione di riferimento naturale, il riferimento $\mathscr{T}_G$ con origine nel baricentro G di $\mathscr{U}$ è un riferimento naturale indipendentemente dall'appartenenza o meno di G a $\mathscr{U}$.

Ciò premesso, indicato con $\boldsymbol{g}\,(\mathrm{P}\,(t))$ il risultante all'istante t delle forze a distanza specifiche esercitate dagli elementi di $\mathscr{U}$ su P (le uniche forze effettive agenti su P), si consideri sulla parallela a $\boldsymbol{g}\,(\mathrm{P}\,(t))$ passante per P (t) il punto O$'$ (t) (o l'elemento di $\mathscr{U}$ che nel suddetto istante si trova su essa se O$'$ (t) appartiene alla configurazione assunta da $\mathscr{U}$ in detto istante) definito da

$$\mathrm{O}'\,(t)\,\mathrm{P}\,(t) = \frac{\boldsymbol{g}\,(\mathrm{P}\,(t))}{\dot{h}\,(t) + h^2\,(t)}\,. \tag{9}$$

Per tale punto (o elemento) si può considerare il riferimento naturale che nell'istante t ha origine in esso, riferimento rispetto al quale in detto istante, ricordando (6) e (9), l'accelerazione di P risulta data da $\boldsymbol{g}\,(\mathrm{P}\,(t))$. Stante il significato di $\boldsymbol{g}\,(\mathrm{P}\,(t))$ e quanto osservato per le forze che lo originano, ciò implica che in detto istante il suddetto riferimento naturale si comporti come inerziale e coincida pertanto, sempre nel suddetto istante, con il riferimento naturale $\mathscr{T}_G$. In tale istante risulta quindi O$'$ $(t) = $ G (t).

Poiché le considerazioni ora svolte si possono ripetere per ogni $t \in [t_0\,,\,t_1)$ segue che:

IV. *In tutto l'intervallo di tempo* $[t_0\,,\,t_1)$ *in cui avviene il collasso il riferimento naturale* $\mathscr{T}_G$ *risulta inerziale.*

I riferimenti naturali si muovono quindi di moto traslatorio rispetto ai riferimenti inerziali.

4. Tenendo conto dell'espressione (2) della Nota I per il risultante delle forze a distanza esercitate dagli elementi Q di $\mathscr{U}$ sull'elemento P, dell'espressione (6) riferita a $\mathscr{T}_G$ nonché della posizione (7), e, in analogia a quanto fatto nella Nota I, indicando d'ora in poi il baricentro di $\mathscr{U}$ con O invece che con G, il risultato ora stabilito permette di scrivere l'equazione

$$\int_{\mathscr{C}} f(|\,\mathrm{PQ}\,|)\,\frac{\mathrm{PQ}}{|\,\mathrm{PQ}\,|}\,\mathrm{d}c = \frac{\varphi\,(t)}{\mu\,(t)}\,\mathrm{OP}\,, \tag{10}$$

ossia, osservando che il primo membro dipende da t soltanto tramite il volume v della configurazione $\mathscr{C}$ (la quale, conformemente a quanto detto alla fine del n. 1 della Nota I, verrà ritenuta un dominio):

$$\int_{\mathscr{C}} f(|\mathrm{PQ}|) \frac{\mathrm{PQ}}{|\mathrm{PQ}|} dc = - \lambda(v) \mathrm{OP}, \tag{11}$$

con $\lambda(v)$ funzione incognita di v e dove, come nella Nota I, il segno negativo a secondo membro è stato introdotto per comodità espositiva. Si può inoltre a questo punto osservare che, essendo il primo membro di (11) indipendente da $\mathscr{C}_1$ e da μ_1, anche $\lambda(v)$ è indipendente da $\mathscr{C}_1$ e μ_1.

L'equazione (11) nelle due funzioni incognite $f(x)$ $(x = |\mathrm{PQ}|)$ e $\lambda(v)$, risulta verificata per ogni $\mathrm{P} \in \mathscr{C}$, nonché per ogni dominio $\mathscr{C}$ omotetico a $\mathscr{C}_1$ con polo in O e rapporto di omotetia compreso nell'intervallo $(0, 1]$, e quindi per ogni $v \in (0, v_1]$, con v_1 volume di $\mathscr{C}_1$.

Con l'ipotesi che la funzione $f(x)$ sia di classe C^2 e che sia un infinito di ordine finito rispetto a $\frac{1}{x}$ per x tendente a 0^+ (2), assumendo che il rapporto di omotetia vari nell'intervallo $(0, +\infty)$ e che quindi l'intervallo di definizione di $f(x)$ (e conseguentemente di $\lambda(v)$) sia $(0, +\infty)$, l'equazione (11) è stata studiata in [1] e, con riferimento al caso n-dimensionale $(n \geq 2)$ e con la presente limitazione per il rapporto di omotetia (e quindi con l'intervallo di definizione di $f(x)$ dato da $(0, d_1]$, con d_1 diametro di $\mathscr{C}_1$, e con l'intervallo di definizione di $\lambda(v)$ dato da $(0, v_1]$), in [2], 3 (3). Per essa si è dedotto che $\mathscr{C}$ risulta necessariamente sferico con centro in O e che risulta, in accordo con quanto stabilito nella Nota I:

$$f(x) = \frac{k}{x^2} + \beta x \quad , \tag{12}$$

$$\lambda(v) = \beta v + \frac{4}{3} \pi k , \tag{13}$$

con β costante arbitraria e k costante soggetta all'unica condizione di essere diversa da 0.

(2) Nel senso che esista un numero reale positivo α tale che il limite $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha f(x)$ esista finito e diverso da 0.

(3) Al riguardo va detto che in [2] il termine «polo per $x = 0$» a cui per motivi di brevità si è impropriamente fatto ricorso, come esplicitamente emerge dal testo, va inteso nel senso sopra ricordato, e cioè che la funzione $f(x)$ sia un infinito di ordine finito rispetto a $1/x$ per x tendente a 0.

Al riguardo, in analogia con quanto visto al n. 4 della Nota I, si può provare che la determinazione dell'espressione esplicita di $\lambda(v)$, data da (13), qualora si faccia esplicito riferimento al problema fisico che origina l'equazione (11), è indipendente dalla conoscenza della funzione $f(x)$ e si può pertanto effettuare senza dover far ricorso a quest'ultima funzione.

5. Per provare quanto ora affermato si osservi che, tenendo conto di (8), l'equazione (10) equivale a

$$\int_{\mathscr{C}} f(|\,\mathrm{PQ}\,|)\,\frac{\mathrm{PQ}}{|\,\mathrm{PQ}\,|}\,\mathrm{d}c = \frac{\Phi(\mu)}{\mu}\,\mathrm{OP}\,, \tag{14}$$

da cui, essendo il primo membro indipendente da $\mathscr{C}_1$ e μ_1, segue che anche $\dfrac{\Phi(\mu)}{\mu}$ deve essere indipendente da $\mathscr{C}_1$ e μ_1, con la conseguenza che, comunque variando μ_1, e quindi μ (stante il vincolo $\mu_1 v_1 = \mu v$), il suddetto rapporto deve risultare indipendente da μ.

A questo punto le considerazioni svolte al n. 4 della Nota I per la funzione $\Phi(\mu)$ si possono estendere immutate al presente caso e portano al risultato che deve essere anche ora

$$\Phi(\mu) = -\left(\frac{4}{3}\,\pi k + \beta v\right)\mu\,,$$

con k e β costanti, con che l'equazione (14) diventa

$$\int_{\mathscr{C}} f(|\,\mathrm{PQ}\,|)\,\frac{\mathrm{PQ}}{|\,\mathrm{PQ}\,|}\,\mathrm{d}c = -\left(\frac{4}{3}\,\pi k + \beta v\right)\mathrm{OP}\,, \tag{15}$$

equazione che deve essere verificata per ogni $\mathrm{P} \in \mathscr{C}$ e per ogni $\mathscr{C}$ omotetico a $\mathscr{C}_1$ con polo in O e rapporto di omotetia compreso nell'intervallo $(0\,,1]$.

Il confronto di (11) con (15) comporta che deve sussistere (13) in tutto l'intervallo $(0\,,v_1]$, conformemente a quanto si intendeva provare [4].

6. Il problema di risolvere l'equazione (15) (ritenuta ovviamente verificata per ogni $\mathrm{P} \in \mathscr{C}$ e per ogni $\mathscr{C}$ omotetico a $\mathscr{C}_1$ con polo in O e rapporto di omotetia contenuto in $(0\,,1])$ senza opportune ipotesi sulla funzione $f(x)$, quale

(4) In [2], 5.3, con riferimento ad un analogo problema fisico, a cui si accennerà al prossimo n. 6, si è pervenuti a detto risultato per altra via e precisamente tramite il ricorso al principio di sovrapposizione delle forze simultanee.

è appunto quella che $f(x)$ sia un infinito di ordine finito rispetto a $\frac{1}{x}$ (5), rimane aperto, come, conseguentemente, rimane aperto il problema più generale di risolvere l'equazione (11) senza l'ausilio dell'equazione (14). Al riguardo, in [1], 10 è stata avanzata la seguente congettura: *anche senza ipotesi opportune, la soluzione generale dell'equazicne* (11) (*e quindi quella dell'equazione* (15)) *è ancora data dalle espressioni* (12), (13), *con* $\mathscr{C}_1$ *necessariamente sferico con centro in* O *se è* $k \neq 0$, *con* $\mathscr{C}_1$ *arbitrario e* O *suo baricentro se è* $k = 0$.

In [2], 4.2 è stata prospettata una dimostrazione di detta congettura nel caso in cui il limite $\lim\limits_{v \to 0^+} \lambda(v)$ esista finito e diverso da 0 (caso che quindi include quello dell'equazione (15)), ma la conclusione a cui si perviene non appare sufficiente per ritenere completa la dimostrazione e richiede pertanto un ulteriore approfondimento.

Facendo esplicito riferimento al problema fisico che la origina e con la sola ipotesi della continuità per la funzione $f(x)$, l'equazione (11) – e quindi l'equazione (15) a cui, come si è visto al n. 5, essa si riduce quando si fa riferimento al suddetto problema fisico – verrà risolta nella Nota III in cui verranno anche sviluppate le considerazioni dinamiche che la suddetta equazione, una volta risolta, comporta.

La soluzione che così si ottiene per la funzione $f(x)$ – data ancora, in pieno accordo con la congettura sopra richiamata, da (12) – fornisce piena validità alle conclusioni a cui si perviene in [2], 5, dove si tratta brevemente del caso di un fluido omogeneo isolato il cui comportamento viene ritenuto isotropo rispetto al riferimento inerziale che ha origine nel suo baricentro, con considerazioni che sono state in parte riprese in un contesto più generale e ampliate nella presente Nota. Su esse si ritornerà nella Nota III, in cui, oltre a opportuni commenti, verranno anche dati alcuni riferimenti bibliografici, connessi soprattutto ai tentativi fatti in passato dagli Autori per pervenire ad una sistemazione definitiva dell'argomento di cui è oggetto la presente Nota e la Nota III.

Nel prossimo n. 7, a conclusione della presente Nota, vengono esposte alcune considerazioni relative all'equazione (15) nonché alcune conseguenze di natura dinamica relative al collasso di $\mathscr{U}$ e che da esse seguono.

7. Si supponga che le forze a distanza siano espresse dalla legge di gravitazione universale, ossia che si abbia

(5) Ritenendo ovviamente $k \neq 0$, il problema è risolto anche nelle ipotesi (in cui la seconda è invero altamente restrittiva) che $f(x)$ sia una funzione positiva e che il dominio $\mathscr{C}$ sia convesso.

Infatti, considerato il caso in cui in (15) è $\beta = 0$ e tenuto conto di quanto esposto in [2], 2.2, dall'ipotesi della convessità di $\mathscr{C}$ segue che questo deve essere necessariamente sferico, con che l'equazione (15) si riduce all'equazione (15) della Nota I, la cui soluzione generale, come si è visto al n. 5 di detta Nota, è data da (12).

$$f(x) = \frac{\varkappa}{x^2}, \tag{16}$$

dove con $\varkappa$ si è indicata la costante di gravitazione universale.

Sostituendo (16) in (15), si ottiene

$$\varkappa \int_{\mathscr{C}} \frac{\mathrm{PQ}}{|\mathrm{PQ}|^3} \, \mathrm{d}c = -\left(\frac{4}{3}\pi k + \beta v\right) \mathrm{OP},$$

da cui, supposto P interno a $\mathscr{C}$ e considerata la divergenza di entrambi i membri, si ottiene

$$4\pi\varkappa = 4\pi k + 3\beta v,$$

da cui, essendo $\varkappa$ e k costanti, segue $\beta = 0$ e quindi $k = \varkappa$. A questo punto dalle considerazioni svolte in [2], 1.4 segue che il dominio $\mathscr{C}$ è necessariamente sferico.

Si può quindi affermare che:

V. *Se le forze a distanza sono espresse dalla legge di gravitazione universale, sia la configurazione $\mathscr{C}_1$ che le configurazioni assunte da $\mathscr{U}$ durante il collasso sono necessariamente sferiche.*

Il risultato ora visto comporta pertanto che:

VI. *Se le forze a distanza sono espresse dalla legge di gravitazione universale e la configurazione iniziale di $\mathscr{U}$ non è sferica l'ammasso non può avere comportamento isotropo durante il collasso.*

Il risultato V è contenuto nella soluzione dell'equazione (15) che si ottiene assumendo che la funzione $f(x)$, supposta ovviamente continua, sia un infinito di ordine finito rispetto a $\frac{1}{x}$ per x tendente a 0^+.

Infatti, indicato con $2 + \gamma\ (\gamma > -2)$ l'ordine del suddetto infinito e introdotta la funzione

$$g(x) = x^{2+\gamma} f(x),$$

si ponga

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = c, \tag{17}$$

dove è $c \neq 0$.

Indicando con α il rapporto di omotetia, da (15) si ottiene

$$\int_{\mathscr{C}_1} g(\alpha \mid PQ \mid) \frac{PQ}{\mid PQ \mid^{3+\gamma}} \, dc = - \alpha^{\gamma} \left(\frac{4}{3} \pi k + \beta \alpha^3 v_1 \right) OP \,, \tag{18}$$

equazione verificata per ogni $P \in \mathscr{C}_1$ e per ogni $\alpha \in (0\,,1]$ e da cui segue che deve essere $\gamma < 1$.

Stante (17) da (18) segue, come agevolmente si può constatare, $\gamma = 0$ e

$$c \int_{\mathscr{C}_1} \frac{PQ}{\mid PQ \mid^3} \, dc = - \frac{4}{3} \pi \, k \, OP \,,$$

da cui, procedendo come sopra, si ottiene $c = k$, e quindi la sfericità di $\mathscr{C}_1$.

L'equazione (15) si riduce pertanto all'equazione (15) della Nota I, la cui soluzione generale, come si è visto al n. 5 di detta Nota, è data appunto da (12), che include come caso particolare il caso (16).

Le considerazioni ora svolte provano che l'equazione (11), con esplicito riferimento al problema fisico che la origina, ossia tramite l'ausilio dell'equazione (14), può essere risolta supponendo che la funzione $f(x)$, oltre ad essere un infinito di ordine finito rispetto a $\frac{1}{x}$, sia semplicemente di classe C^0 invece che di classe C^2.

Ritenendo, come indica l'esperienza, che le forze a distanza non crescano in grandezza al crescere di x e che abbiano carattere attrattivo, da (12) segue $k > 0$ e $\beta = 0$ e quanto ora visto permette di concludere che:

VII. *Dalle ipotesi che la funzione $f(x)$ che caratterizza le forze a distanza sia di classe C^0 e sia un infinito di ordine finito rispetto a $\frac{1}{x}$ per x tendente a 0^+ segue che le configurazioni assunte da $\mathscr{U}$ durante il collasso sono necessariamente sferiche e che le forze a distanza (forze gravitazionali) sono necessariamente del tipo di quelle espresse dalla legge di gravitazione universale.*

BIBLIOGRAFIA

[1] GALLETTO D. (1982) – *Un teorema di inversione nella teoria del campo di attrazione newtoniano*, « Atti Accad. Sci. Torino », *116*, 349-356.

[2] GALLETTO D. (1983) – *Some Converse Theorems in Newtonian Field Theory and Their Applications*, « Applicable Anal. », *15*, 313-337.

[3] GALLETTO D. e BARBERIS B. (1984) – *Sulla legge di gravitazione universale. I*, « Atti Accad. Naz. Lincei Rend. », Ser. VIII, *76*, 359-366.

[4] GALLETTO D. e BARBERIS B. (1985) – *Sul collasso di un ammasso di materia disgregata. I*, « Atti Accad. Naz. Lincei Rend. », Ser. VIII, *78*, 138-147.