Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Jean-Pierre Vigué

La distance intégrée de Kobayashi sur une variété Banachique complexe

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **78** (1985), n.5, p. 197–204.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1985_8_78_5_197_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1985.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 18 maggio 1985

Presiede il Presidente della Classe GIUSEPPE MONTALENTI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Analisi matematica. — *La distance intégrée de Kobayashi sur une variété Banachique complexe.* Nota di JEAN-PIERRE VIGUÉ (*), presentata (**) dal Corrisp. E. VESENTINI.

RIASSUNTO. — Nel caso di una varietà di Banach complessa X, si costruisce una regolarizzata della metrica infinitesimale di Kobayashi. Se ne deduce una distanza integrata di Kobayashi e, se X è iperbolica, si mostra che questa distanza è uguale alla distanza di Kobayashi.

1. INTRODUCTION

Le but de cet article est d'étudier la pseudodistance de Kobayashi k_M et la métrique infinitésimale de Kobayashi χ_M sur une variété banachique complexe M. Comme en dimension finie, je désire définir la pseudodistance intégrée de Kobayashi et la comparer à la pseudodistance de Kobayashi.

Lorsque M est un ouvert d'un espace de Banach complexe, on montre (voir [1] et [2]) que la métrique infinitésimale de Kobayashi χ_M est semi-continue supérieurement. Ceci permet de définir la longueur $L(\gamma)$ d'un chemin $\gamma : [0, 1] \to M$ de classe C^1 par morceaux par l'intégrale

$$L(\gamma) = \int_0^1 \chi_M(D\gamma(t))\, dt .$$

(*) Membre de l'U.A. 213 « Analyse complexe et géométrie » au C.N.R.S.
(**) Nella seduta del 18 maggio 1985.

La pseudodistance intégrée de Kobayashi de deux points x et y de M est alors la borne inférieure des longueurs des chemins de classe C^1 par morceaux d'origine x et d'extrémité y. La même construction marche aussi lorsque M est une variété complexe de dimension finie, d'après un résultat difficile de Royden [4, 5].

Dans le cas d'une variété banachique complexe M, je ne sais pas démontrer que χ_M est semi-continue supérieurement, et je procéderai de manière différente. Je définirai d'abord une régularisée χ_M^* de χ_M. En remplaçant χ_M par χ_M^*, je définirai une longueur $L^*(\gamma)$, j'en déduirai une pseudodistance intégrée k_M^*, et je montrerai que $k_M^* \leq k_M$. Si M est hyperbolique (ce qui signifie que k_M définit la topologie de M), je montrerai que $k_M = k_M^*$, ce qui généralise, dans une certaine mesure, le résultat de dimension finie.

2. Definitions des metriques et distances invariantes

Soit M une variété banachique complexe connexe. Soient x et y deux points de M. On définit (voir [1] et [2]) $\delta_M(x, y)$ comme la borne inférieure de la distance non euclidienne $\rho(a, b)$ de deux points a et b de Δ tels qu'il existe une application holomorphe $f : \Delta \to M$ telle que $f(a) = x$ et $f(b) = y$. En général, δ_M ne vérifie pas l'inégalité triangulaire et n'est donc pas une pseudodistance. On définit alors la pseudodistance de Kobayashi k_M comme la plus grande pseudodistance inférieure ou égale à δ_M. On vérifie que k_M est une pseudodistance invariante, ce qui signifie que, pour toute application holomorphe $f : M \to M'$, pour tout $x \in M$, pour tout $y \in M$, on a:

$$k_{M'}(f(x), f(y)) \leq k_M(x, y).$$

La métrique infinitésimale de Kobayashi χ_M est définie de la façon suivante (voir [1], [2] et [3]): pour tout $x \in M$, pour tout v appartenant à l'espace tangent $T_x(M)$, $\chi_M(v)$ est la borne inférieure du module des nombres complexes λ tels qu'il existe une application holomorphe $\varphi : \Delta \to M$ telle que $\varphi(0) = x$ et que $D\varphi(0) \cdot \lambda = v$.

On vérifie que χ_M est une métrique infinitésimale invariante, ce qui signifie que, pour toute application holomorphe $f : M \to M'$, pour tout $v \in T_x(M)$, on a:

$$\chi_{M'}(Df(x) \cdot v) \leq \chi_M(v).$$

Je vais maintenant définir une régularisée de χ_M.

Proposition et définition 2.1. *Soit* $x \in M$, *et soit* $v \in T_x(M)$. *Soit*

$$\chi_M^*(v) = \liminf_{w \to v} \chi_M(w)$$

Alors, χ_M^* *est une métrique infinitésimale invariante sur* M. *De plus, l'application*

$$T(M) \to \mathbf{R}$$

$$v \to \chi_M^*(v)$$

est semi-continue inférieurement.

Démonstration: Soit $f : M \to M'$ une application holomorphe. Pour tout $w \in T_y(M)$, on a

$$\chi_{M'}(Df(y) \cdot w) \leq \chi_M(w).$$

Si w tend vers v, il est clair que $Df(y) \cdot w \to Df(x) \cdot v$. Par suite, on a:

$$\chi_{M'}^*(Df(x) \cdot v) \leq \liminf_{w \to v} \chi_{M'}(Df(y) \cdot w) \leq \liminf_{w \to v} \chi_M(w) = \chi_M^*(v).$$

Ainsi, χ_M^* est une métrique invariante. Montrons maintenant que $v \to \chi_M^*(v)$ est semi-continue inférieurement. Soit $v \in T_x(M)$, et soit $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\chi_M^*(x) > > \alpha$. Comme

$$\chi_M^*(v) = \liminf_{w \to v} \chi_M(w),$$

il existe un voisinage ouvert U de v dans T(M) tel que, pour tout $w \in U$, $\chi_M(w) > \alpha$. Ainsi, pour tout $w \in U$, $\chi_M(w) > \alpha$ et le résultat est démontré.

Soit maintenant $\gamma : [0, 1] \to M$ un chemin de classe C^1 par morceaux. On déduit de la proposition 2.1. que

$$[0, 1] \to \mathbf{R}$$

$$t \to \chi_M^*(D\gamma(t))$$

est intégrable au sens de Lebesgue, et on définit la longueur $L^*(\gamma)$ de γ par l'intégrale

$$L^*(\gamma) = \int_0^1 \chi_M^*(D\gamma(t))\, dt.$$

On montre alors facilement la proposition suivante.

PROPOSITION ET DÉFINITION 2.2. *Soient x et y deux points de* M. *On définit la pseudodistance* $k_M^*(x, y)$ *comme la borne inférieure des longueurs* $L^*(\gamma)$ *des* *chemins* $\gamma : [0, 1] \to M$ *de classe* C^1 *par morceaux tels que* $\gamma(0) = x$ *et* $\gamma(1) = y$. *Alors,* k_M^* *est une pseudodistance invariante.*

REMARQUE 2.3. Dans le cas du disque-unité $\Delta \subset \mathbf{C}$, on a

$$\chi_\Delta^* = \chi_\Delta ,$$

$$k_\Delta^* = k_\Delta = \rho .$$

3. COMPARISON DE k_M^* ET DE k_M

PROPOSITION 3.1. *Soit* M *une variété banachique complexe. Alors pour tout* $x \in M$, *pour tout* $y \in M$, *on a*:

$$k_M^*(x, y) \leq k_M(x, y) .$$

Démonstration: Soit $\varepsilon > 0$. Il suffit de montrer que $k_M^*(x, y) \leq k_M(x, y) + \varepsilon$. Soit donc une chaîne $(x_1, \ldots, x_n)$ telle que $x_1 = x$, $x_n = y$ et que

$$\delta_M(x_1, x_2) + \cdots + \delta_M(x_{n-1}, x_n) \leq k_M(x, y) + \frac{\varepsilon}{2} .$$

On peut alors choisir $(n - 1)$ applications holomorphes $f_i : \Delta \to M$ telles que $f_i(0) = x_i$, $f_i(\zeta_i) = x_{i+1}$ et que

$$\rho(0, \zeta_i) \leq \delta_M(x_i, x_{i+1}) + \frac{\varepsilon}{2n} .$$

Soit $\gamma_i : [0, 1] \to \Delta$ le chemin défini par $\gamma_i(t) = t\,\zeta_i$. On a $L^*(\gamma_i) = \rho(0, \zeta_i)$, et par suite,

$$L^*(f_i \circ \gamma_i) \leq \delta_M(x_i, x_{i+1}) + \frac{\varepsilon}{2n} .$$

Si on considère le chemin γ obtenu en mettant bout à bout tous les $(f_i \circ \gamma_i)$, il est clair que γ est de classe C^1 par morceaux, et que $L^*(\gamma) \leq k_M(x, y) + \varepsilon$. La proposition est démontrée.

4. CAS D'UNE VARIÉTÉ HYPERBOLIQUE

Rappelons d'abord la définition suivante:

Définition 4.1. Soit M une variété banachique complexe. On dit que M est hyperbolique si k_M est une distance qui définit la topologie de M.

Rappelons aussi [6] que, si U est un ouvert borné d'un espace de Banach complexe E, une partie A de U est dite complètement intérieure à U (et on le note $A \subset\subset U$) si la distance de A à la frontière de U est strictement positive.

On montre facilement le lemme suivant:

LEMME 4.2. *Soit* M *una variété banachique complexe hyperbolique. Soit* U *un ouvert de* M *tel qu'il existe une carte* $\varphi : U \to V$, *où* V *est un domaine borné d'un espace de Banach complexe* E, *et soit* a *un point de* U. *En identifiant* U *et* V, *on peut trouver un nombre réel* $\rho > 0$ *et un ouvert convexe* W *de* E *tel que*

$$B_{k_M}(a, 2\rho) \subset\subset W \subset\subset V .$$

LEMME 4.3. *Sous les hypothèses du Lemme 4.2, il existe un nombre réel* $r > 0$ *tel que, pour toute application holomorphe* $f : \Delta \to M$ *telle que* $f(0) \in B_{k_M}(a, \rho)$, $\varphi \circ f$ *est définie sur* $\Delta_r = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < r\}$, *à valeurs dans* V.

Démonstration: Soit $r > 0$ tel que $|z| < r$ entraîne $\rho(0, z) < \rho$. Comme f est contractante pour k_M et ρ, on a, pour tout $z \in \Delta_r$, $k_M(f(0), f(z)) \leq \rho(0, z) < \rho$. Par suite,

$$k_M(a, f(z)) < 2\rho ,$$

ce qui prouve que $f(z) \in U$. Ainsi, $\varphi \circ f$ est définie.

LEMME 4.4. *Sous les hypothèses du lemme* 4.2, *il existe une constante* $K > 0$ *telle que, pour tout* $x \in W$, *pour tout* $y \in W$, *on ait*:

$$k_M(x, y) \leq K \| x - y \| .$$

Démonstration: Comme $V \subset M$, on a

$$k_M(x, y) \leq k_V(x, y) .$$

Il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in W$, V contienne B (x, R). Choisissons un réel r tel que $0 < r < R$. On montre facilement que, pour tout $x \in W$, pour tout $y \in B(x, r)$, on a

$$k_M(x, y) \leq k_V(x, y) \leq \rho\left(0, \frac{\| x - y \|}{R}\right) \leq K \| x - y \| .$$

Le cas général s'en déduit en considérant une chaîne $x_1, \ldots, x_n$ telle que $x_1 = x$, $x_n = y$, que $x_1, \ldots, x_n$ appartiennent au segment $[x, y]$ et que $\| x_{i+1} - x_i \| < r$.

Nous pouvons maintenant montrer le théorème suivant:

THÉORÈME 4.5. *Soit* M *une variété banachique complexe hyperbolique. Alors, on a*:

$$k^*_M = k_M .$$

Démonstration: Il reste seulement à montrer que x et $y \in M$, et ε_0 étant donnés, on a

$$k_M(x, y) \leq k^*_M(x, y) + \varepsilon_0 .$$

Choisissons un chemin γ de classe C^1 par morceaux tel que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ et que $L^*(\gamma) \leq k^*_M(x, y) + \frac{\varepsilon_0}{2}$. Par un raisonnement de compacité, on peut trouver un nombre fini de boules $B_{k_M}(a_i, \rho_i)$, contenues dans des ouverts de cartes U_i, comme au Lemme 4.2, et une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ de $[0, 1]$ tels que γ soit de classe C^1 sur $[t_i, t_{+1}]$ et que $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ soit contenu dans U_i.

Quitte à reparamétriser γ, et à poser $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2n}$, on se ramène à montrer le résultat suivant: soit $\gamma : [0, 1] \to M$ de classe C^1. Soit U un ouvert de cartes, comme au Lemme 4.2, tel que $\gamma([0, 1]) \subset B_{k_M}(a, \rho)$. Il nous faut montrer que

$$k_M(\gamma(0), \gamma(1)) \leq \int_0^1 \chi^*_M(D\gamma(t))\, dt + \varepsilon .$$

Soit $A = \{t \in [0, 1] \mid k_M(\gamma(0), \gamma(t)) \leq \int_0^t \chi^*_M(D\gamma(t)\, dt + \varepsilon t\}$.

A est fermé et contient 0. Pour montrer que $A = [0, 1]$, il suffit de montrer que, si $t_0 < 1$ appartient à A, il existe $h > 0$ tel que $[t_0, t_0 + h[\subset A$.

Soit donc $t_0 \in A$, et soit $T > 0$. Comparons $k_M(\gamma(t_0), \gamma(t_0 + T))$ et $\int_{t_0}^{t_0+T} \chi^*_M(\gamma(t), \gamma'(t))\, dt$. (Nous sommes dans un ouvert de cartes, on peut identifier $T(V)$ à $V \times E$, ce qui justifie la notation pour χ^*_M). Comme χ^*_M est semi-continue inférieurement, il existe $h > 0$ tel que $T < h \Rightarrow \int_{t_0}^{t_0+T} \chi^*_M(\gamma(t), \gamma'(t))\, dt \geq \left(\chi^*_M(\gamma(t_0), \gamma'(t_0)) - \frac{\varepsilon}{2}\right) t$.

Majorons $k_M(\gamma(t_0), \gamma(t_0 + T))$. Supposons $\gamma'(t_0) \neq 0$. [Le cas où $\gamma'(t_0) = 0$ est très simple et laissé en exercice]. On déduit du Lemme 4.3 que B =

$= \chi_M^* (\gamma(t_0), \gamma'(t_0))$ est > 0. On peut donc trouver une suite de fonctions holomorphes $f_n : \Delta \to M$ telle que $x_n = f_n(0) \to \gamma(t_0)$, $v_n = f_n'(0) \to \dfrac{\gamma'(t_0)}{B}$.

D'après le Lemme 4.3, f_n est une application holomorphe de Δ_r dans V. On déduit des inégalités de Cauchy qu'il existe une constante K_1 telle que, pour T assez petit,

$$\| f_n(BT) - f_n(0) - BTv_n \| \leq K_1 |T|^2 .$$

Un calcul simple montre alors que

$$\| f_n(BT) - \gamma(t_0 + T) \| \leq \| f_n(0) - \gamma(t_0) \| + |T| \, \| Bv_n - \gamma'(t_0) \| + |T| \cdot \eta(T),$$

où $\eta(T) \to 0$ quand $T \to 0$.

On peut maintenant majorer $k_M(\gamma(t_0), \gamma(t_0 + T))$

$$k_M(\gamma(t_0), \gamma(t_0 + T)) \leq k_M(\gamma(t_0), f_n(0)) + k_M(f_n(0), f_n(BT)) + \\ + k_M(f_n(BT), \gamma(t_0 + T)) .$$

D'après la lemme 4.4,

$$k_M(\gamma(t_0), f_n(0)) \leq K \| \gamma(t_0) - f_n(0) \| ,$$
$$k_M(f_n(BT), \gamma(t_0 + T)) \leq K \| f_n(BT) - \gamma(t_0 + T) \| .$$

D'autre part $k_M(f_n(0), f_n(BT)) \leq \rho(0, BT)$.

En reportant ces valeurs dans l'inégalité précédente, et en choisissant un entier n suffisamment grand, on montre l'inégalité annoncée.

REMARQUE 4.6. Soit M une variété banachique complexe hyperbolique. S'il est possible de définir la distance intégrée de Kobayashi k_M^i sur M, le théorème précédent montre que $k_M^i = k_M$.

Soit M une variété banachique complexe hyperbolique. Soit comme au Lemme 4.2, un ouvert de carte U contenant $B_{k_M}(a, 2\rho)$. Il est facile de voir que, sur $B_{k_M}(a, \rho)$, la distance k_M^* et la distance induite par la norme soit uniformément équivalentes. On peut alors montrer comme dans [6] (voir aussi Franzoni et Vesentini [1]) le théorème suivant:

THÉORÈME 4.7. *Soit* M *une variété banachique complexe hyperbolique homogène. Alors* M *est* k_M*-complète.*

Bibliographie

[1] Franzoni T. e Vesentini E. (1980) – *Holomorphic maps and invariant distances.* « Mathematical Studies », *40*, North Holland, Amsterdam.

[2] Harris L. (1979) – *Schwarz Pick systems of pseudometrics for domains in normed linear spaces*, in « Advances in Holomorphy », 345-406, « Mathematical Studies », 34, North Holland, Amsterdam.

[3] Kobayashi S. (1976) – *Intrinsic distances, measures and geometric function theory.* « Bull. AMS », *82*, 357-416.

[4] Royden H. (1971) – *Remarks on the Kobayashi metric, in Several Complex variables II* (Maryland, 1970), 125-137, « Lecture Notes in Math », *185*, Springer, Berlin.

[5] Royden H. (1974) – *The extension of regular holomorphic maps.*, « Proc. A.M.S. », *43*, 306-312.

[6] Vigué J.-P. (1976) – *Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Application aux domaines bornés symétriques.* « Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. », (4), *9*, 203-282.