Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Stefano Mortola, Sergio Steffè

Un problema di omogeneizzazione bidimensionale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **78** (1985), n.3, p. 77–82.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1985_8_78_3_77_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1985.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 9 marzo 1985

Presiede il Presidente della Classe GIUSEPPE MONTALENTI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Analisi matematica. — *Un problema di omogeneizzazione bidimensionale.* Nota di STEFANO MORTOLA e SERGIO STEFFÈ, presentata (*) dal Corrisp. E. DE GIORGI.

SUMMARY. — In this note we study the periodic homogenization problem for a particular bidimensional selfadjoint elliptic operator of the second order.

Theoretical and numerical considerations allow us to conjecture explicit formulae for the coefficients of the homogenized operator.

INTRODUZIONE

Mentre la teoria della omogeneizzazione periodica per operatori lineari del II ordine autoaggiunti può contare su moltissimi risultati generali, solo in pochissimi casi si conoscono formule esplicite per le matrici omogeneizzate.

In questo lavoro affrontiamo il caso particolare in cui la matrice da omogeneizzare sia isotropa e costante nei 4 sottoquadrati del quadrato unitario. Formuliamo una congettura relativa alla possibile formula esplicita (4.1) per la matrice omogeneizzata, congettura che, anche se tuttora non dimostrata, è corroborata da molte considerazioni di carattere teorico ed è confortata da risultati numerici.

Ringraziamo il Prof. Mario Arioli per i preziosi suggerimenti sulla parte numerica e il Prof. Ennio De Giorgi per gli utili colloqui sulla parte teorica.

(*) Nella seduta del 9 marzo 1985.

§ 1. NOTAZIONI E RICHIAMI

Sia Y il quadrato $[0\,,1] \times [0\,,1]$ di $\mathbf{R}^2$, $a_{ij} \in L^\infty(\mathbf{R}^2)$, $i\,,j = 1\,,2$, periodiche di periodo Y, e sia $\nu > 0$ tale che $\Sigma_{ij}\, a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \geq \nu\, |\,\xi\,|^2$ $\forall\, x \in Y$, $\forall\, \xi \in \mathbf{R}^2$. Supponiamo inoltre che $a_{12} = a_{21}$.

Se $u \in H^1(Y)$, sia per $\varepsilon > 0$ $A_\varepsilon(u)$ l'operatore $\Sigma_{ij}\, D_i\,(a_{ij}\,(x/\varepsilon)\, D_j\, u)$ e $F_\varepsilon(u)$ l'energia di u rispetto A_ε:

$$F_\varepsilon(u) = \int_Y \Sigma\, a_{ij}(x/\varepsilon)\, D_i\, u\, D_j\, u\, dx\,.$$

È già dimostrato in [1] e [2] che esiste ed è unica una matrice $\hat{a}_{ij}$ simmetrica costante e definita positiva tale che $\forall f \in L^2(Y)$ valga la:

$$\min_{u \in H_0^1(Y)} \left\{ F_\varepsilon(u) + \int_Y f\, u\, dx \right\} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \min_{u \in H_0^1(Y)} \left\{ \int_Y \Sigma\, \hat{a}_{ij}\, D_i\, u\, D_j\, u + f\, u\, dx \right\} \tag{1.1}$$

e un modo per calcolare gli $\hat{a}_{ij}$ consiste nel risolvere il seguente problema variazionale:

$$\sum\nolimits_{ij} \hat{a}_{ij}\, \xi_i\, \xi_j = \min \left\{ \int_Y \sum\nolimits_{ij} a_{ij}(x)\, D_i\, u\, D_j\, u\, dx : u - \xi\, x \in P(Y) \right\} \quad , \tag{1.2}$$

ove P (Y) è lo spazio delle funzioni di $H^1_{loc}(\mathbf{R}^2)$ periodiche con periodo Y [1].

Anche nel caso in cui a_{ij} non fosse definita positiva ma solo semidefinita positiva, è possibile ugualmente studiare il problema della omogeneizzazione periodica [3], e invece di considerare il minimo in (1.2) si deve considerare l'estremo inferiore relativo allo stesso problema.

Una espressione esplicita degli $\hat{a}_{ij}$ in funzione degli a_{ij} è nota in pochissimi casi; indichiamo con $Y_1\,, Y_2\,, Y_3\,, Y_4$ i 4 sottoquadrati $[0\,,1/2] \times [1/2\,,1]$, $[1/2\,,1]^2$, $[0\,,1/2]^2$, $[1/2\,,1] \times [0\,,1/2]$ del quadrato unitario;

i) se $a_{ij}(x) = \delta_{ij}\, a(x)$ con $a(x)$ che vale α in $Y_1 \cup Y_4$ e β su $Y_3 \cup \cup Y_2$, allora $\hat{a}_{ij} = \delta_{ij}\, \sqrt{\alpha\beta}$ ([4], [5]);

ii) se $a_{ij}(x) = a(x_1)\, b(x_2)\, \delta_{ij}$ allora

$$\hat{a}_{11} = \left(\int_0^1 1/a(t)\, dt \right)^{-1} \left(\int_0^1 b(t)\, dt \right)$$

$$\hat{a}_{22} = \left(\int_0^1 a(t)\, dt \right) \left(\int_0^1 1/b(t)\, dt \right)^{-1}$$

$$\hat{a}_{12} = \hat{a}_{21} = 0$$

come segue direttamente dalle formule di [6].

§ 2. IL PROBLEMA STUDIATO

Il problema che consideriamo è quello della omogeneizzazione periodica bidimensionale di una matrice isotropa del tipo:

$$a_{ij}(x) = \delta_{ij}\, a(x) \quad \text{ove} \quad a(x) = \alpha\, \chi_{Y_1} + \beta \chi_{Y_2} + \gamma \chi_{Y_3} + \delta \chi_{Y_4}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

Vale la seguente:

PROPOSIZIONE 1. *La matrice omogeneizzata $\hat{a}_{ij}$ risulta sempre una matrice diagonale*

$$(\hat{a}_{ij}) = \begin{pmatrix} \hat{a}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) & 0 \\ 0 & \hat{b}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \end{pmatrix}$$

dove $\hat{a}$ e $\hat{b}$ sono funzioni analitiche dei propri argomenti, strettamente positive che soddisfano inoltre queste proprietà:

(2.1) $\hat{a}(1/\alpha, 1/\beta, 1/\gamma, 1/\delta)\, \hat{b}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 1$

(2.2) $\hat{a}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \hat{b}(\alpha, \gamma, \beta, \delta)$

(2.3) $\hat{a}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \hat{a}(\beta, \alpha, \delta, \gamma) = \hat{a}(\gamma, \delta, \alpha, \beta) = \hat{a}(\delta, \gamma, \beta, \alpha)$

(2.4) $\hat{a}$ e $\hat{b}$ *sono omogenee di grado* 1

(2.5) $M_2(N_1(a)) \leq \hat{a}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \leq N_1(M_2(a))$ (1)

(2.6) $M_1(N_2(a)) \leq \hat{b}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \leq N_2(M_1(a))$.

Nel caso particolare in cui $\alpha = \beta = \gamma = 1$, la matrice omogeneizzata è isotropa, cioè del tipo $\hat{a}(\delta)\, \delta_{ij}$; utilizzando i risultati di [3], [4], [5], [7], [8], [9] si può dimostrare la seguente:

(1) Data una funzione $f\colon Y \to \mathbf{R}$ indichiamo con N_i e M_i gli operatori:

$$N_1(f)(x_2) = 1/\Big(\int_0^1 1/f(x_1, x_2)\, dx_1 \quad \ldots \quad \text{media armonica su } x_1$$

$$M_1(f)(x_2) = \int_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_1 \quad \ldots \quad \text{media aritmetica su } x_1$$

e analogamente N_2 e M_2 invertendo i ruoli tra x_1 e x_2.

PROPOSIZIONE 2. *La funzione* $\hat{a}(\delta)$ *soddisfa le proprietà:*

(2.7) *esistono* $c', c'' > 0$ *tali che* $c' < \hat{a}(\delta) < c''$ $\forall \delta > 0$

(2.8) $\hat{a}$ *è strettamente crescente*

(2.9) $\hat{a}'(1) = 1/4 \qquad \hat{a}''(1) = -3/16$

(2.10) $\hat{a}(\delta)$ *ha derivate di ordine pari negative e di ordine dispari positive*

(2.11) $\hat{a}(\delta)\,\hat{a}(1/\delta) = 1$

(2.12) $\lim_{\delta\to\infty} \hat{a}(\delta) = \sqrt{3} \qquad \lim_{\delta\to 0} \hat{a}(\delta) = 1/\sqrt{3}$

Le proprietà viste non identificano ancora né $\hat{a}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ né $\hat{a}(\delta)$; si è pensato perciò di provare ad ottenere ulteriori informazioni affrontando il problema numericamente.

§ 3. CONSIDERAZIONI SULL'APPROSSIMAZIONE NUMERICA

Per affrontare dal punto di vista numerico il problema dell'omogeneizzazione della matrice isotropa $a_{ij}(x) = \delta_{ij}\, a(x)$ con $a(x) = \alpha\chi_{Y_1} + \beta\chi_{Y_2} + \gamma\chi_{Y_3} + \delta\chi_{Y_4}$ abbiamo semplicemente diviso il quadrato $[0,1] \times [0,1]$ in N^2 sottoquadratini $Q(i,j)$: $[i/N, (i+1)/N] \times [j/N, (j+1)/N]$, $i, j = 0, \dots, N-1$, e abbiamo introdotto la funzione $\phi_N(\xi_1, \xi_2)$ valore minimo del seguente problema discretizzato:

$$(3.1)\quad \min \Big\{ \sum_{ij}{}_1^N A(i,j)\,[(u(i,j) - u(i-1,j))^2 + (u(i,j) - u(i,j-1))^2] : \\ u(N,j) = u(0,j) + \xi_1;\ u(i,N) = u(i,0) + \xi_2;\ i, j = 0, \dots, N \Big\}$$

ove si è indicato con $A(i,j)$ il valore costante di $a(x)$ sul quadratino $Q(i-1, j-1)$ e si è supposto N intero pari.

Il risultato è una forma quadratica rispetto ξ_1, ξ_2, cioè:

$$(3.2)\qquad \phi_N(\xi_1, \xi_2) = \hat{a}_N\, \xi_1^2 + 2\hat{c}_N\, \xi_1\xi_2 + \hat{b}_N\, \xi_2^2 .$$

Possiamo chiamare la matrice:

$$(\hat{a}_{ij}^{(N)}) = \begin{pmatrix} \hat{a}_N & \hat{c}_N \\ \hat{c}_N & \hat{d}_N \end{pmatrix}$$

la omogeneizzata discreta N-esima della matrice $a_{ij}(x)$.

Dai risultati di [10] e [11] opportunamente adattati al nostro caso, segue

$$\lim_{N\to\infty}\begin{pmatrix}\hat a_N & \hat c_N\\ \hat c_N & \hat b_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat a & 0\\ 0 & \hat b\end{pmatrix}$$

e questo garantisce che la scelta della discretizzazione fatta approssima effettivamente il problema originale.

A sua volta (3.1) è un problema di minimizzazione di un funzionale quadratico su un sottospazio affine di $\mathbf{R}^{(N+1)^2}$ e può essere affrontato con varie tecniche: noi, esplicitando i vincoli ci siamo ricondotti ad un sistema di condizioni lineari di ottimalità, risolto iterativamente con un algoritmo del tipo di Gauss-Seidel.

§ 4. UNA CONGETTURA SULLA MATRICE OMOGENEIZZATA

Analizzando tutti i risultati teorici nonché quelli numerici relativi a diverse quadruple $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, siamo arrivati a formulare una congettura relativa alla espressione delle funzioni $\hat a$ e $\hat b$ mediante le medie M_i e N_i introdotte nella Prop. 1:

$$\text{(4.1)}\qquad \begin{cases}\hat a(\alpha, \beta, \gamma, \delta)=\sqrt{N_1(M_2(a))\,M_2(N_1(a))}\\ \hat b(\alpha, \beta, \gamma, \delta)=\sqrt{N_2(M_1(a))\,M_1(N_2(a))}\end{cases}$$

che si possono anche scrivere esplicitamente:

$$\text{(4.2)}\qquad \begin{cases}\hat a(\alpha, \beta, \gamma, \delta)=\sqrt{\dfrac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\,\dfrac{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}}\\[2ex] \hat b(\alpha, \beta, \gamma, \delta)=\sqrt{\dfrac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\,\dfrac{(a+\beta)(\gamma+\delta)}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}}\end{cases}$$

e che nel caso $\alpha=\beta=\gamma=1$ si riducono alla

$$\text{(4.3)}\qquad \hat a(\delta)=\sqrt{(1+3\,\delta)/(3+\delta)}\,\cdot$$

Queste formule hanno il pregio di generalizzare i casi teorici noti riportati nel § 1., di soddisfare tutte le proprietà dimostrate nel § 2., e sono in buon accordo con i risultati numerici ottenuti per valori di $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ compresi tra 1/10 e 10 e con N tra 40 e 100 [(2)].

(2) La Prof.ssa Donatella Marini dell'I.A.N. di Pavia ha recentemente comunicato agli Autori di avere effettuato ulteriori verifiche numeriche con risultati perfettamente in accordo con le (4.1).

Osservazioni :

Non si può invece sperare che le formule (4.1) rappresentino la matrice omogeneizzata nel caso più generale di una generica matrice $a_{ij}(x)$ uniformemente ellittica, e in realtà neppure quando la matrice omogeneizzata risultasse diagonale: già infatti se $a_{ij}(x) = \delta_{ij}\, a(x)$ con $a(x) = \delta$ su $[0, \varepsilon]^2$ e $= 1$ negli altri punti di Y, è facile verificare che per δ, ε sufficientemente piccoli esse non sono corrette.

Infine si noti che l'espressione del determinante della matrice $\hat{a}_{ij}$ congetturata risulta una funzione simmetrica rispetto ai parametri α, β, γ, δ; inoltre si può dimostrare che essa coincide con il determinante della $\hat{a}_{ij}^{(2)}$ del § 3.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. De Giorgi e S. Spagnolo (1973) – *Sulla convergenza dell'integrale della energia per operatori ellittici del II ordine.* « Boll. Un. Mat. Ital. », (4) *8*, 391-411.

[2] E. De Giorgi (1981) – *Generalized limits in calculus of variations in « Topics in Functionals Analysis 1980-81 ».* « Quaderni della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze », 117-148.

[3] S. Mortola e A. Profeti (1982) – *On the convergence of the minimum points of non equicoercive quadratic functionals.* « Comm. in P.D.E. » (7), *6*, 645-673.

[4] A.M. Dykhne (1971) – *Conductivity of two dimensional two phase system.* « Soviet Physics JETP » (1), *32*, 63-65.

[5] F. Murat e L. Tartar (1983) – Manoscritto.

[6] A. Marino e S. Spagnolo (1969) – *Un tipo di approssimazione dell'operatore* $\Sigma D_i(a_{ij} D_j)$ *con operatori* $\Sigma D_i(\beta(x) D_i)$. « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. » (4), *23*, 657-673.

[7] J.F. Bourgat (1979) – *Numerical experiments of the homogenization method for operators with periodic coefficients.* In « Lecture Notes in Mathematics 704 », 330-356.

[8] J. Hersch (1982/83) – *On harmonic measures, conformal moduli and some elementary symmetry methods.* « J. Analyse Math. », *42*, 211-228.

[9] L. Tartar (1979) – *Estimation de coefficients homogénéisés.* In « Lecture Notes in Mathematics 704 », 364-373.

[10] J. Cea (1964) – *Approximation variationelle de problèmes aux limites.* « Ann. Inst. Fourier », (2), *14*, 345-444.

[11] R. Temam (1970) – *Analyse numérique.* « Collection SUP Presses Universitaires de France ».

[12] S. Mortola e S. Steffé (1985) – *Un problema di omogeneizzazione bidimensionale : considerazioni teoriche e numeriche.* « Pubbl. Dip. Mat. Pisa », 106.