Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mariano Torrisi, Antonino Valenti

Sulla ricerca di onde di interfaccia in termo-elasticità

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **78** (1985), n.1-2, p. 19–27.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1985_8_78_1-2_19_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1985.

Fisica matematica. — *Sulla ricerca di onde di interfaccia in termoelasticità* (*). Nota di MARIANO TORRISI e ANTONINO VALENTI (**), presentata (***) dal Socio G. GRIOLI.

SUMMARY. — In this paper we study waves propagation along a traction free surface of a infinite body composed of two different thermoelastic isotropic half-spaces in welded contact.

1. INTRODUZIONE

La possibilità di propagazione di onde di interfaccia in un continuo infinito composto da due differenti mezzi elastici saldati insieme è stata presa in considerazione per la prima volta da R. Stoneley [1].

Successivamente tale problema, di particolare interesse nel campo della sismologia, è stato affrontato, anche con metodologie diverse, da vari studiosi [2]-[6].

In questa Nota viene presa in considerazione la ricerca di tali onde nell'ambito del modello termoelastico che si ottiene, nel caso di piccole trasformazioni [7], da quello non lineare proposto da G. Grioli [8], [9], dove si è tenuto conto dell'opportunità di modificare la teoria termoelastica classica basata sulla usuale legge di Fourier.

Dopo alcuni preliminari introduttivi si studia la propagazione di onde di interfaccia nell'ipotesi in cui attraverso la superficie di separazione dei due mezzi si raccordino non solo lo sforzo superficiale e lo spostamento ma anche la temperatura e la componente normale del flusso di calore. Non ci sembra possibile prescindere da questi ulteriori raccordi come a volte invece viene fatto [4].

Le onde risultano sia dispersive che attenuate. Si perviene infatti ad una equazione secolare complessa che lega il numero d'onda, il coefficiente di attenuazione e la frequenza. L'attenuazione è una conseguenza dell'interazione termica. Infatti, supposto che non vi sia interazione termica in ciascuno dei due solidi, si ottengono, per il problema puramente meccanico, le classiche onde di Stoneley che si propagano senza attenuazione [10], [2] e, per quello puramente termico, le onde termiche di interfaccia che si propagano con attenuazione.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito di ricerca del G.N.F.M. del C.N.R.
(**) Dipartimento di Matematica Università di Catania, Viale A. Doria, 6 – 95125 Catania, Italia.
(***) Nella seduta del 24 novembre 1984.

Inoltre, mediante un opportuno controesempio, si fa vedere che le onde termoelastiche di interfaccia di frequenza arbitraria (reale) il cui numero d'onda soddisfa l'equazione secolare che si ottiene prescindendo dai raccordi termici, non sono sempre compatibili con l'equazione secolare cui si perviene nella presente Nota.

2. Notazioni ed equazioni di base

La teoria proposta in [8], [9] postula un legame non lineare tra il flusso di calore $\tilde{\boldsymbol{q}}$, la temperatura T e la storia integrata del gradiente di temperatura $\boldsymbol{g}$ del tipo

$$\tilde{\boldsymbol{q}} = -h\mathrm{L} \int_0^\infty e^{-hs} \boldsymbol{g}(t-s)\, \mathrm{d}s \tag{1}$$

dove h è una costante positiva ed L, nel caso di un mezzo iperelastico ed isotropo, uno scalare funzione della temperatura e della deformazione.

Nell'ambito di tale teoria, alle ben note equazioni di bilancio della quantità di moto e dell'energia viene associata, anzicché l'abituale legge di Fourier, una conseguenza differenziale della (1).

Ciò posto, sia $\mathscr{C}$ un continuo infinito, composto da due differenti solidi C e C′ termoelastici ed omogenei. Denoteremo con C_0 e C'_0 due configurazioni di riferimento che supporremo di equilibrio naturale ed in cui C e C′ sono isotropi.

Fissato un sistema di riferimento cartesiano trirettangolo $0\boldsymbol{i}_r$, si supponga che C occupi il semispazio $x_3 \geq 0$ e C′ il semispazio $x_3 \leq 0$, mentre la superficie di interfaccia coincida con il piano $x_3 = 0$.

Le equazioni che reggono il processo evolutivo termomeccanico nel caso di piccole trasformazioni, in assenza di forze di massa e di sorgenti di calore riferite al solido C ($x_3 \geq 0$), tenuto conto delle relazioni costitutive sulle componenti Y_{rs} del tensore degli sforzi

$$\mathrm{Y}_{rs} = -\lambda u_{k,k}\, \delta_{rs} - \mu\,(u_{r,s} + u_{s,r}) + \beta_0\, \vartheta \delta_{rs}\,, \tag{2}$$

si scrivono [7]

$$\begin{aligned} &\mathrm{V}_\mathrm{T}^2\, u_{r,kk} + (\mathrm{V}_\mathrm{L}^2 - \mathrm{V}_\mathrm{T}^2)\, u_{k,kr} - \gamma_0\, \vartheta_{,r} = \ddot{u}_r \\ &c_0\, \dot{\vartheta} + \beta_0 \mathrm{T}_0\, \dot{u}_{k,k} + q_{k,k} = 0 \\ &z\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{q} + \mathrm{L}_0 \nabla\vartheta = \boldsymbol{0}\,, \end{aligned} \tag{3}$$

dove si è posto

$$\mathrm{V}_\mathrm{T}^2 = (\mu/\rho_0)^{1/2} \quad , \quad \mathrm{V}_\mathrm{L}^2 = [(\lambda + 2\,\mu)/\rho_0]^{1/2} \quad , \quad \gamma_0 = \beta_0/\rho_0 \quad , \quad z = 1/h\,. \tag{4}$$

La (3.III) si deduce per linearizzazione dall'analoga contenuta in [8], [9], conseguenza differenziale della (1).

Con u_r, ϑ e $\boldsymbol{q}$ si sono indicate le componenti dello spostamento e le variazioni di temperatura e del flusso di calore rispettivamente; λ e μ sono le costanti di Lamè che soddisfano le note relazioni

$$(5) \qquad 3\,\lambda + 2\,\mu > 0 \quad , \quad \mu > 0\,,$$

inoltre $\beta_0 = (3\,\lambda + 2\,\mu)\,\alpha_t$ (α_t è il coefficiente di dilatazione termica lineare), ρ_0, c_0, T_0 ed L_0 sono delle costanti positive che esprimono rispettivamente, la densità di massa, il calore specifico sotto configurazione costante, la temperatura ed il valore di L calcolati in C_0, mentre $(\ )_{,k}$ denota $\partial/\partial x_k$ ed il punto sovrapposto denota $\partial/\partial t$.

Le stesse relazioni, in cui a tutte le quantità viene apposto l'apice, si devono supporre scritte per il solido C' ($x_3 \leq 0$). Si suppone inoltre che la temperatura T'_0 di C'_0 coincida con T_0.

3. ONDE TERMOELASTICHE DI INTERFACCIA

Nel presente paragrafo si prende in esame la possibilità di propagazione di onde del tipo

$$(6) \qquad (\boldsymbol{u}\,,\vartheta\,,\boldsymbol{q}) = (\mathbf{A}\,,\mathrm{B}\,,\mathbf{D}) \exp\left[i\,(kx_1 + k_2\,x_2 + k_3\,x_3 - \omega t)\right] \text{ in } C\,(x_3 \geq 0)$$

e

$$(7) \qquad (\boldsymbol{u}'\,,\vartheta'\,\boldsymbol{q},') = (\mathbf{A}'\,,\mathrm{B}'\,,\mathbf{D}') \exp\left[i\,(kx_1 + k'_2\,x_2 + k'_3\,x_3 - \omega t)\right] \text{ in } C'(x_3 \leq 0)$$

dove i vettori costanti $\mathbf{A}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{A}'$, $\mathbf{D}'$ e le costanti B, B', k, k_i, k'_i sono complessi ed ω è la frequenza reale e positiva.

Le (6) e (7) rappresentano onde armoniche piane progressive. Affinché tali onde siano onde di interfaccia, le soluzioni relative ad esse debbono decadere a zero quando la distanza dall'interfaccia tende all'infinito. Tale richiesta è soddisfatta se e solamente se [6]

$$(8) \qquad \mathrm{Im}\,k_3 > 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}\,k'_3 < 0\,.$$

Com'è noto, le onde superficiali, alla cui classe appartengono le onde di interfaccia, decrescono così rapidamente a zero da essere apprezzabili solamente in un sottilissimo strato, di spessore circa il doppio della loro lunghezza d'onda, attorno alla superficie di separazione [11]. Sostanzialmente, quindi, si può assumere che la propagazione avvenga parallelamente all'interfaccia, ovvero, senza ledere la generalità, parallelamente all'asse x_1.

Le condizioni sulla superficie di interfaccia, $x_3 = 0$, alle quali debbono soddisfare lo spostamento, lo sforzo, la temperatura ed il flusso di calore sono:

$$(9) \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' \quad , \quad \mathrm{Y}_{r3} = \mathrm{Y}'_{r3} \quad , \quad \vartheta = \vartheta' \quad , \quad q_3 = -\,q'_3\,.$$

Le (9.I e III) impongono la continuità dello spostamento e della temperatura attraverso l'interfaccia, mentre la (9.II) impone la continuità dello sforzo, dovuta all'assenza di forze esterne sull'interfaccia. La (9.IV) esprime l'ipotesi che i flussi di calore relativi alle normali interne ai due solidi siano uguali.

Inoltre, senza ledere la generalità si assumerà

$$k_2 = k'_2 = A_2 = A'_2 = D_2 = D'_2 = 0 . \tag{10}$$

Si osservi che in contrasto con il caso puramente elastico per il quale è possibile dimostrare, con semplici considerazioni energetiche [10], [2], che le onde di Stoneley, cui si riducono le onde di interfaccia considerate, si propagano senza attenuazione, nel caso termoelastico invece è possibile dimostrare, mutuando analoghe osservazioni fatte in [12], che le onde considerate, qualora sussista l'interazione termica, si propagano con attenuazione. Ovviamente, quindi, per il seguito riterremo k un parametro complesso il cui valore resterà determinato dall'equazione secolare che scaturisce dalle condizioni sull'interfaccia.

Sostituendo le (6) nelle (3) si ottiene un sistema lineare omogeneo in A_1, A_3, B, D_1 e D_3 la cui matrice dei coefficienti è

$$\begin{vmatrix} (V_L^2 k^2 + V_T^2 k_3^2 - \omega^2) & (V_L^2 - V_T^2)\, k k_3 & i\gamma_0 k & 0 & 0 \\ (V_L^2 - V_T^2)\, k k_3 & (V_T^2 k^2 + V_L^2 k_3^2 - \omega^2) & i\gamma_0 k_3 & 0 & 0 \\ \omega\beta_0 T_0 k & \omega\beta_0 T_0 k_3 & -i\omega c_0 & ik & ik_3 \\ 0 & 0 & iL_0 k & (1 - i\omega z) & 0 \\ 0 & 0 & iL_0 k_3 & 0 & (1 - i\omega z) \end{vmatrix} . \tag{11}$$

Affinché si abbiano soluzioni non tutte nulle, avendo supposto ω reale, deve aversi

$$V_T^2 (k^2 + k_3^2) - \omega^2 = 0 \tag{12}$$

oppure

$$\begin{aligned} &\frac{i\omega\beta_0 T_0 \gamma_0}{L_0} (1 - i\omega z)(k^2 + k_3^2) + \\ &+ \left[i\omega \frac{c_0}{L_0} (1 - i\omega z) - (k^2 + k_3^2) \right] [V_L^2 (k^2 + k_3^2) - \omega^2] = 0 . \end{aligned} \tag{13}$$

La (12) e la (13) si possono riguardare rispettivamente come un'equazione di secondo grado ed una biquadratica nell'incognita k_3. Dalla (12) è possibile ottenere due soluzioni in k_3 delle quali la soluzione a parte immaginaria positiva sarà indicata con $k_3^{(1)} \equiv k_3^{(1)}(k\,,\,\omega)$.

In corrispondenza si hanno le seguenti soluzioni:

$$
\begin{aligned}
&A_1^{(1)} = \alpha^{(1)} \quad , \quad A_3^{(1)} = -\,\alpha^{(1)}\, k/k_3^{(1)} \qquad (\alpha^{(1)} \in \mathbf{C})\,^{(1)} \\
&B^{(1)} = D_1^{(1)} = D_3^{(1)} = 0\,.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Dalla (13) invece si ottengono quattro soluzioni in k_3 delle quali certamente soltanto due hanno parte immaginaria positiva e si indicheranno con $k_3^{(N)} \equiv k_3^{(N)}(k\,,\,\omega)$ $(N = 2\,,\,3)$. In corrispondenza a tali valori di k_3 si hanno le seguenti soluzioni:

$$
\begin{aligned}
&A_1^{(N)} = \alpha^{(N)} \quad , \quad A_3^{(N)} = \alpha^{(N)}\, k_3^{(N)}/k \qquad (\alpha^{(N)} \in \mathbf{C}) \\
&B^{(N)} = \alpha^{(N)}\; i\xi^{(N)}/\gamma_0\, k \\
&D_1^{(N)} = \alpha^{(N)}\, i L_0\, \xi^{(N)}/\gamma_0\, (1 - i\,\omega z) \quad , \quad D_3^{(N)} = \alpha^{(N)}\, i L_0\, k_3^{(N)}\, \xi^{(N)}/\gamma_0\, (1 - i\omega z)\, k
\end{aligned} \tag{15}
$$

dove si è posto

$$
\xi^{(N)} = V_L^2\,(k^2 + k_3^{(N)2}) - \omega^2 \qquad (N = 2\,,\,3)\,. \tag{16}
$$

La soluzione generale per $\boldsymbol{u}\,,\,\vartheta$ e $\boldsymbol{q}$, in accordo alla (8.I), è pertanto

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{u} = \sum_{N=1}^{3} \lambda^{(N)}\, \boldsymbol{u}^{(N)}\,, \quad \vartheta = \sum_{N=1}^{3} \lambda^{(N)}\, \vartheta^{(N)} \quad , \\
&\boldsymbol{q} = \sum_{N=1}^{3} \lambda^{(N)}\, \boldsymbol{q}^{(N)}\,, \qquad (\lambda^{(N)} \in \mathbf{C})
\end{aligned} \tag{17}
$$

ove $\boldsymbol{u}^{(N)}$, $\vartheta^{(N)}$ e $\boldsymbol{q}^{(N)}$ sono le soluzioni base relativamente ai valori di $k_3^{(N)}$ che danno luogo alle (14) e (15).

Analoghi sviluppi valgono per C' $(x_3 \leq 0)$ e, pertanto, si ha

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}' = \sum_{N=1}^{3} \lambda'^{(N)}\, \boldsymbol{u}'^{(N)}\,, \quad \vartheta' = \sum_{N=1}^{3} \lambda'^{(N)}\, \vartheta'^{(N)}\,, \\
&\boldsymbol{q}' = \sum_{N=1}^{3} \lambda'^{(N)}\, \boldsymbol{q}'^{(N)} \qquad (\lambda'^{(N)} \in \mathbf{C})\,.
\end{aligned} \tag{17'}
$$

Si tenga presente però che per quanto riguarda le $k_3'^{(N)}$ bisogna scegliere, come richiesto dalla (8.II), le radici a parte immaginaria negativa.

(1) **C** denota l'insieme dei numeri complessi.

Tenendo presente le (10), in base alle (2), (14), (15), (17) e (17′), si riconosce che le (9) si traducono nelle seguenti relazioni:

$$
(18) \quad
\begin{aligned}
&\sum_{N=1}^{3} (\lambda^{(N)} \alpha^{(N)} - \lambda'^{(N)} \alpha'^{(N)}) = 0 \\
&- \lambda^{(1)} \alpha^{(1)} (k^2/k_3^{(1)}) + \sum_{N=2}^{3} \lambda^{(N)} \alpha^{(N)} k_3^{(N)} + \\
&+ \lambda'^{(1)} \alpha'^{(1)} (k^2/k_3'^{(1)}) - \sum_{N=2}^{3} \lambda'^{(N)} \alpha'^{(N)} k_3'^{(N)} = 0 \\
&\lambda^{(1)} \alpha^{(1)} [(2\mu k^2 - \rho_0 \omega^2)/k_3^{(1)}] - \sum_{N=2}^{3} \lambda^{(N)} \alpha^{(N)} 2\mu k_3^{(N)} + \\
&- \lambda'^{(1)} \alpha'^{(1)} [(2\mu' k^2 - \rho_0' \omega^2)/k_3'^{(1)}] + \sum_{N=2}^{3} \lambda'^{(N)} \alpha'^{(N)} 2\mu' k_3'^{(N)} = 0 \\
&\lambda^{(1)} \alpha^{(1)} 2\mu k^2 + \sum_{N=2}^{3} \lambda^{(N)} \alpha^{(N)} (2\mu k^2 - \rho_0 \omega^2) + \\
&- \lambda'^{(1)} \alpha'^{(1)} 2\mu' k^2 - \sum_{N=2}^{3} \lambda'^{(N)} \alpha'^{(N)} (2\mu' k^2 - \rho_0' \omega^2) = 0 \\
&\sum_{N=2}^{3} \lambda^{(N)} a^{(N)} (\xi^{(N)}/\gamma_0) - \sum_{N=2}^{3} \lambda'^{(N)} \alpha'^{(N)} (\xi'^{(N)}/\gamma_0') = 0 \\
&\sum_{N=2}^{3} \lambda^{(N)} \alpha^{(N)} [L_0 k_3^{(N)} \xi^{(N)}/\gamma_0 (1 - i\omega z)] + \\
&+ \sum_{N=2}^{3} \lambda'^{(N)} \alpha'^{(N)} [(L_0' k_3'^{(N)} \xi'^{(N)}/\gamma_0' (1 - i\omega z')] = 0 .
\end{aligned}
$$

Le (18) possono essere considerate come un sistema lineare omogeneo nelle incognite $\lambda^{(N)}$, $\lambda'^{(N)}$ $(N = 1, 2, 3)$ la cui compatibilità per soluzioni diverse da quella nulla ci assicura la possibilità di propagazione delle onde cercate.

Ciò posto, tenuto conto della dipendenza di k_3 da k ed ω, si perviene alla seguente equazione secolare in k ed ω:

$$
(19) \quad
\begin{aligned}
&ra^2 k^2 [sb (k_3'^{(2)} + k_3'^{(3)}) + b' (k_3^{(2)} + k_3^{(3)})] + \\
&- r [2(\mu - \mu')]^2 k^2 k_3^{(1)} k_3'^{(1)} \{k_3'^{(2)} k_3'^{(3)} (k_3'^{(2)} + k_3'^{(3)}) [b - (k_3^{(2)} + k_3^{(3)})^2] + \\
&+ k_3^{(2)} k_3^{(3)} (k_3^{(2)} + k_3^{(3)}) [b' - (k_3'^{(2)} + k_3'^{(3)})^2 s]\} + \\
&+ r (d^2 k_3^{(1)} - \rho_0 \rho_0' \omega^4 k_3'^{(1)}) \{k_3^{(2)} k_3^{(3)} (k_3^{(2)} + k_3^{(3)}) (k_3'^{(2)} + k_3'^{(3)}) s + \\
&- b [b' - (k_3'^{(2)} + k_3'^{(3)})^2]\} + \\
&+ r (e^2 k_3'^{(1)} - \rho_0 \rho_0' \omega^4 k_3^{(1)}) \{k_3'^{(2)} k_3'^{(3)} (k_3'^{(2)} + k_3'^{(3)}) (k_3^{(2)} + k_3^{(3)}) +
\end{aligned}
$$

$$- b\,[b' - (k_3^{\prime(2)} + k_3^{\prime(3)})^2]\, s\} +$$
$$+ (ek_3^{\prime(1)} + dk_3^{(1)})\,\{\rho_0\,\omega^2\,\{b'\,[b' - (k_3^{\prime(2)} + k_3^{\prime(3)})^2] +$$
$$+ k_3^{\prime(2)}\,k_3^{\prime(3)}\,(k_3^{\prime(2)} + k_3^{\prime(3)})^2\} +$$
$$- r^2\, s\rho_0'\omega^2\,\{b\,[b - (k_3^{(2)} + k_3^{(3)})^2] + k_3^{(2)}\,k_3^{(3)}\,(k_3^{(2)} + k_3^{(3)})^2\}\} = 0$$

dove si è posto

$$a = 2\,(\mu - \mu')\,k^2 - (\rho_0 - \rho_0')\,\omega^2 \quad , \quad b = k^2 - (\omega/V_L)^2 + (k_3^{(2)} + k_3^{(3)})^2 - k_3^{(2)}\,k_3^{(3)},$$

$$b' = k^2 - (\omega/V_L')^2 + (k_3^{\prime(2)} + k_3^{\prime(3)})^2 - k_3^{\prime(2)}\,k_3^{\prime(3)},$$

(20)

$$d = 2\,(\mu - \mu')\,k^2 + \rho_0'\,\omega^2 \quad , \quad e = 2\,(\mu - \mu')\,k^2 - \rho_0\omega^2\,,$$

$$r = V_L^2\,\gamma_0'/V_L'^2\,\gamma_0 \quad , \quad s = L_0\,(1 - i\omega z')/L_0'\,(1 - i\omega z)\,.$$

4. Alcuni casi particolari

L'equazione (19) è piuttosto complicata, ma si può affermare che essa ammette certamente soluzioni complesse in k.

Se si suppone $\beta_0 = \beta_0' = 0$ (cioè $\alpha_t = \alpha_t' = 0$) non vi è accoppiamento termomeccanico né in C né in C' e la (19) è soddisfatta se

(21)
$$a^2\,k^2 + (d^2\,k_3^{(1)} - \rho\,\rho_0'\omega^4\,k_3^{\prime(1)})\,k_3^{(2)} +$$
$$+ (e^2\,k_3^{\prime(1)} - \rho_0\,\rho_0'\,\omega^4\,k_3^{(1)})\,k_3^{\prime(2)} + [2\,(\mu - \mu')]^2\,k^2\,k_3^{(1)}\,k_3^{\prime(1)}\,k_3^{(2)}\,k_3^{\prime(2)} = 0$$

oppure

(22)
$$sk_3^{(3)} + k_3^{\prime(3)} = 0$$

dove le espressioni di $k_3^{(2)}$, $k_3^{\prime(2)}$ e $k_3^{(3)}$, $k_3^{\prime(3)}$, in base alla forma che, nel caso in esame, assumono la (15) e la duale in C', sono date rispettivamente da

(23)
$$k_3^{(2)^2} = (\omega/V_L)^2 - k^2 \quad , \quad k_3^{\prime(2)^2} = (\omega/V_L')^2 - k^2$$

(24)
$$k_3^{(3)^2} = i\omega\,(1 - i\omega z)\,(c_0/L_0) - k^2\,,$$
$$k_3^{\prime(3)^2} = i\omega\,(1 - i\omega z')\,(c_0'/L_0') - k^2\,.$$

La (21), tenuto conto della (23), è la ben nota equazione secolare delle onde di Stoneley che dà luogo alle onde elastiche di interfaccia che si propagano senza attenuazione. Ad essa, inoltre, bisogna associare la seguente relazione

$$k^2 > \max\{(\omega/V_L)^2, (\omega/V_L')^2\}$$

che esclude la possibilità che $k_3^{(2)}$ e $k_3'^{(2)}$ siano reali.

La (22) dà luogo alle onde termiche di interfaccia, che si propagano con attenuazione, il cui valore di k, che indicheremo con k_ϑ, in base alle (22) e (24) è dato da

$$k_\vartheta^2 = \frac{1}{1-s^2}\left[\left(\frac{c_0'}{L_0'}z' - s^2\frac{c_0}{L_0}z\right)\omega^2 + i\left(\frac{c_0'}{L_0'} - s^2\frac{c_0}{L_0}\right)\omega\right]. \tag{25}$$

* * *

Ci sembra non privo di interesse notare che l'equazione secolare cui dà luogo in [4] la ricerca di onde termoelastiche di interfaccia nei continui incomprimibili, imponendo gli abituali raccordi meccanici, considerando solamente le soluzioni base termoelastiche ed usando per la propagazione del calore la legge di Fourier, è soddisfatta se

$$k^2 = (\rho_0 - \rho_0')\,\omega^2/2\,(\mu - \mu') \tag{26}$$

con frequenza ω (reale) arbitraria.

Allo stesso risultato si può pervenire anche quando si rimuove l'ipotesi di incomprimibilità.

È possibile inoltre verificare che, anche per il modello termoelastico descritto dalle (3), la (26) soddisfa l'equazione secolare che si ottiene, ricercando lo stesso tipo di onde studiate in [4].

La (26) però non è sempre compatibile con la (19) nell'ipotesi di ω reale. Ad es., se si suppone che i parametri costitutivi relativi a C e C′ siano legati dalle seguenti relazioni:

$$z = z' \quad , \quad V_L = V_L' \quad , \frac{\beta_0}{\beta_0'} = \frac{c_0}{c_0'} = \frac{L_0}{L_0'} = \frac{\rho_0}{\rho_0'} = \delta\,(>0) \quad , \quad \mu \neq \mu' , \tag{27}$$

le equazioni di dispersione dei due solidi coincidono e la (19) assume la forma

$$\begin{aligned} &a^2 k^2 b\,(k_3^{(2)} + k_3^{(3)})\,(1-\delta) + \\ &+ [2\,(\mu - \mu')]^2 k^2 k_3^{(1)} k_3^{(2)} k_3^{(3)} (k_3^{(2)} + k_3^{(3)})\,[b - (k_3^{(2)} + k_3^{(3)})^2]\,(1-\delta) + \\ &- (d^2 k_3^{(1)} - \delta\rho_0'^2\,\omega^4 k_3'^{(1)})\,\delta k_3^{(2)} k_3^{(3)} (k_3^{(2)} + k_3^{(3)})^2 + b\,[b - (k_3^{(2)} + k_3^{(3)})^2] + \\ &- (e^2 k_3'^{(1)} - \delta\rho_0'^2\,\omega^4 k_3'^{(1)})\,k_3^{(2)} k_3^{(3)} (k_3^{(2)} + k_3^{(3)})^2 + \delta b\,[b - (k_3^{(2)} + k_3^{(3)})^2] = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

che risulta soddisfatta dalla (26) solamente se è soddisfatta la seguente relazione:

$$k^2 (1+\delta)(\delta k_3^{(1)} - k_3'^{(1)})(k_3^{(2)} + k_3^{(3)}) = = (\delta - 1)^2 k_3^{(1)} k_3'^{(1)} [k_3^{(2)} k_3^{(3)} - k^2 + (\omega/V_L)^2] . \tag{29}$$

Tenendo conto delle (12), (13), (26) e (27) si verifica facilmente che la (29) non può essere soddisfatta per alcun valore reale di ω, quando i parametri costitutivi sono legati dalle sole relazioni (27).

Da quanto esposto segue ovviamente che per ω reale neanche la (19) risulta, in generale, soddisfatta dall'espressione di k data dalla (26) come già annunciato nell'introduzione.

Gli Autori ringraziano il Prof. G. Grioli per i preziosi consigli avuti durante l'elaborazione della presente Nota.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. STONELEY (1924) – *Elastic waves at surface of separation of two solids*, « Proc. Roy. Soc. », Ser. A, 106.

[2] P. CHADWICK and P.J. CURRIE (1974) – *Stoneley waves at an interface between elastic crystals*, « Quart. J. Mech. appl. Math. », (4), *27*, 497-503.

[3] P. CHADWICK (1976) – *Surface and interfacial waves of arbitrary form in isotropic elastic media*, « J. of Elasticity », (1) *6*, 73-80.

[4] G. AMENDOLA (1976) – *Surface and interfacial waves in incompressible materials*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (5) *13*-B, 395-417.

[5] A.I. MURDOCH (1977) – *The effect of interfacial stress on the propagation of Stoneley waves*, « J. of Sound and Vibrat. », (1), *50*, 1-11.

[6] P. CHADWICK and D.A. JARVIS (1979) – *Interfacial waves in a prestrained neo-Hookian body*. I. *Biaxial state of strain*. II. *Triaxial state of strain*, « Quart. J. Mech. appl. Math. », (4) *27*, 387-418.

[7] A. VALENTI (1982) – *Onde sferiche in termoelasticità lineare*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei », (8) *72*, 235-241.

[8] G. GRIOLI (1979) – *Sulla propagazione di onde termomeccaniche nei continui*, Nota I, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei », (8) *67*, 332-339.

[9] G. GRIOLI (1979) – *Sulla propagazione di onde termomeccaniche nei continui*, Nota II. « Rend. Accad. Naz. Lincei », (8) *67*, 426–432.

[10] R. BURRIDGE (1970) – *The directions in which Rayleigh waves may be propagated on crystals*, « Quart. J. Mech. and appl. Math. », (2) *23*, 217-224.

[11] J.D. ACHENBACH (1980) – *Wave propagation in elastic solids*, « Applied Mathematics and Mechanics, North-Holland », 187-195.

[12] J. NOWINSKI (1978) – *Theory of Thermoelasticity with Applications*, « Noordhoff Int. Pubbl. », 614-618.