
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ALMA D'ANIELLO

Su una classe di gruppi finiti supersolubili

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 77 (1984), n.6, p. 226–230.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1984_8_77_6_226_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Teoria dei gruppi. — *Su una classe di gruppi finiti supersolubili.*
Nota di ALMA D'ANIELLO, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this paper we study the class of finite groups G whose nilpotent residual is a Hall subgroup having all subgroups normal in G .

1. In questa Nota si prende in esame una classe di gruppi finiti definita da M. Emaldi in [1]. Detto *fattore subnormale* di un gruppo G ogni quoziente $F = H/K$ con H subnormale in G e K normale in H , Emaldi chiama g -gruppo un gruppo G in cui ogni fattore subnormale F verifica la condizione seguente
(*) *il residuale nilpotente L di F è un sottogruppo di Hall e tutti i sottogruppi di L sono normali in F .*

Si prova che è sufficiente richiedere la condizione (*) per il solo gruppo G , dato che la proprietà (*) è ereditata dai quozienti e dai sottogruppi.

Alcune proprietà dei g -gruppi evidenziano forti analogie con i t -gruppi, già completamente descritti da Gaschütz [2], e permettono una loro descrizione completa.

2. Dato un gruppo G , sia $L(G)$ il residuale nilpotente di G ovvero l'intersezione dei sottogruppi normali di G a fattoriali nilpotenti.

DEFINIZIONE 2.1. *Un gruppo G si dice un g' -gruppo se e solo se $L(G)$ è un sottogruppo di Hall di G e ogni sottogruppo di $L(G)$ è normale in G .*

PROPOSIZIONE 2.2. *Sia G un g' -gruppo e H un sottogruppo normale di G . Allora G/H è un g' -gruppo e $L(G/H) = L(G)H/H$.*

Dimostrazione. Sia $L/H = L(G/H)$. Poiché $G/L \simeq \frac{G/H}{L/H} = \frac{G/H}{L(G/H)}$ è nilpotente $L \geq L(G)$, quindi $L \geq L(G)H$. Inoltre $\frac{G/H}{L(G)H/H}$, essendo isomorfo a $G/L(G)H$, cioè ad un quoziente di $G/L(G)$, è nilpotente onde $L(G)H/H \geq L(G/H) = L/H$ e $L(G)H \geq L$. Segue $L = L(G)H$.

Poiché $(|L(G)|, |G/L(G)|) = 1$ è anche $(|L(G)/L(G) \cap H|,$

(*) Nella seduta del 15 dicembre 1984.

$$|G/L(G)H| = (|L(G)H/H|, |G/L(G)H|) = \left(|L(G/H)|, \left| \frac{G/H}{L(G/H)} \right| \right) = 1 \text{ e quindi } L(G/H) \text{ è di Hall per } G/H.$$

Sia $N/H \leq L(G/H)$. Per quanto osservato precedentemente risulta $N \leq L(G)H$ e quindi $N = L(G)H \cap N = H(L(G) \cap N)$. Essendo, per ipotesi, H ed $L(G) \cap N$ normali in G risulta N normale in G e quindi N/H normale in G/H .

Si osservi che se G è un g' -gruppo $L(G)$ è un sottogruppo di Hall normale e quindi, per il teorema di Schur-Zassenhaus, G si spezza su $L(G)$.

PROPOSIZIONE 2.3. *Sia $G = [L]K$ un g' -gruppo con $L = L(G)$ residuale nilpotente di G . Allora:*

(i) L è abeliano

(ii) $|L|$ è dispari

(iii) K induce su L automorfismi potenza cioè, per ogni $a \in K$, esiste n_a intero tale che, per ogni $x \in L$, si ha $a^{-1}xa = x^{n_a}$. Inoltre per ogni divisore primo p di $|L|$ esiste $a \in K$ con $n_a \not\equiv 1 \pmod{p}$.

Dimostrazione. (i) Per assurdo L non sia abeliano. Poiché L è dedekindiano si ha $L = Q_8 \times C$ con C abeliano. Poiché per ipotesi Q_8 è normale in G si ha che $K/C_K(Q_8) \lesssim \text{Aut } Q_8 \simeq S_4$. D'altro canto $|K|$ è dispari e quindi $|K/C_K(Q_8)| = 1$ oppure $|K/C_K(Q_8)| = 3$. Nel primo caso si ha $Q_8 K$ nilpotente, e poiché $G/C \simeq Q_8 K$, è G/C nilpotente, contro il fatto che $C < L(G)$. Nel secondo caso K induce su Q_8 un gruppo di automorfismi che non fissa i sottogruppi massimali di Q_8 , contro la normalità di questi ultimi in G .

(ii) Supponiamo per assurdo che ciò non accada. Procediamo per induzione su $|G|$. Sia $L = L_2 \times L_{2'}$. Se $\Phi(L_2) \neq 1$, essendo $G/\Phi(L_2)$ ancora un g' -gruppo per 2.2, ed essendo $L/\Phi(L_2)$ il residuale nilpotente di $G/\Phi(L_2)$, deve aversi per l'ipotesi di induzione $L_2/\Phi(L_2) = 1$ e quindi $L_2 = 1$. Pertanto si può supporre $\Phi(L_2) = 1$, ovvero L_2 abeliano elementare. Allora L_2 è centralizzato da K . Segue $G/L_{2'} \simeq L_2 \times K$ è nilpotente, assurdo.

(iii) Fissiamo un elemento a in K . $L(G)$, essendo abeliano, ammette una base normale cioè una base $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ tale che il periodo di x_{i+1} divide quello di x_i ($i = 1, \dots, r-1$). Poiché ogni sottogruppo di L è normale in G , in particolare per ogni $x \in L$ esiste un n con $0 < n < |x|$ tale che $a^{-1}xa = x^n$. Sarà $a^{-1}x_1a = x_1^m$ ($0 < m < |x_1|$). Proviamo che per ogni $i \in \{1, \dots, r\}$ è $a^{-1}x_i a = x_i^n$. Sarà $a^{-1}x_i a = x_i^n$ ($0 < n < |x_i|$) e $a^{-1}(x_1 x_i)a = (x_1 x_i)^s$ ($0 < s < |x_1|$). D'altra parte $a^{-1}(x_1 x_i)a = (a^{-1}x_1a)(a^{-1}x_i a) = x_1^m x_i^n$. Pertanto $x_1^s x_i^s = x_1^m x_i^n$. Essendo x_1 ed x_i indipendenti, segue $x_i^s = x_1^m x_i^n$ e $x_i^s = x_i^n$, onde $s \equiv m \pmod{|x_1|}$ ed $s \equiv n \pmod{|x_i|}$. Ma $s \equiv m \pmod{|x_1|}$ implica $s = m$ poiché sono entrambi minori di $|x_1|$. Segue $a^{-1}x_i a = x_i^n = x_i^s = x_i^m$. Pertanto, posto $m = n_a$ risulta $a^{-1}ya = y^{n_a}$ per ogni $y \in L$.

Supponiamo che esista un divisore primo p di $|L|$ tale che $n_a \equiv 1 \pmod{p}$ per ogni $a \in K$. Sia L_p l'unico p -sottogruppo di Sylow di L . Allora ogni $a \in K$ induce l'automorfismo unità in ogni fattore di una serie principale di L_p , e pertanto, essendo $(|a|, p) = 1$, centralizza L_p . Segue che $L_p K = L_p \times K$ è nilpotente, onde detto $L_{p'}$ il p -complemento di L è $G/L_{p'} \simeq L_p \times K$ nilpotente, assurdo.

PROPOSIZIONE 2.4. *Ogni sottogruppo H di un g' -gruppo G è un g' -gruppo.*

Dimostrazione. Poiché $H/H \cap L(G) \simeq HL(G)/L(G)$ è nilpotente risulta $H \cap L(G) \geq L(H)$. Poiché ogni sottogruppo di $L(H)$ è normale in H (perché lo è in G) basta dimostrare che $L(H)$ è di Hall per H . Ciò è evidente se $H \cap L(G) = L(H)$. Supponiamo pertanto $L(G) \cap H > L(H)$. Sia S un sottogruppo di Sylow di $L(G) \cap H$ non contenuto in $L(H)$ e sia $T = S \cap L(H)$. Basterà dimostrare che $T = 1$.

Sia pertanto g un elemento di $S - T$ e sia q' il suo periodo. Posto $L(H) = L$ si ha che $\langle g \rangle$ è normale (in G e) in H , e $\langle Lg \rangle$ è normale nel gruppo nilpotente H/L , onde, per ogni $h \in H$ è $h^{-1}gh = g^t$ con $t \equiv 1 \pmod{q}$. Sia $h \in H$ di periodo primo con q . Allora h centralizza ogni fattore di una serie principale di $\langle g \rangle$, onde essendo h e g di periodi primi tra loro, h centralizza g . Pertanto h centralizza ogni elemento di $S - T$, e quindi ogni elemento di S poiché S è generato dagli elementi di $S - T$. Segue che ogni elemento di H di periodo primo con q centralizza S . Ma ogni elemento di H di periodo potenza di q , poiché S è l'unico q -sottogruppo di Sylow di H , è in S , e quindi, poiché S è abeliano, centralizza S . Segue che ogni elemento di H centralizza S . Sia $L(G) \cap H = SM$ con M q -complemento di Sylow. Poiché $L(G) \cap H$ è abeliano M è normale in $L(G) \cap H$ e quindi essendo $S \leq Z(H)$, è $L(G) \cap H/M = SM/M \leq Z(H/M)$. D'altra parte $\frac{H/M}{L(G) \cap H/M} \simeq H/L(G) \cap H$ è nilpotente, quindi H/M è nilpotente e $M \geq L(H)$ onde $T = S \cap L(H) \leq S \cap M = 1$, come si voleva.

COROLLARIO 2.5. *Per un gruppo finito G sono equivalenti:*

- (a) G è un g -gruppo
- (b) G è un g' -gruppo.

È quindi lecito eliminare l'apice e chiamare semplicemente g -gruppi i gruppi definiti all'inizio del paragrafo.

3. Nella Prop. 2.3 del paragrafo precedente sono elencate alcune proprietà dei g -gruppi che evidenziano forti analogie con i t -gruppi (cfr. [2] Teorema 1), di più ogni t -gruppo è un g -gruppo. La classe dei g -gruppi è tuttavia più ampia della classe dei t -gruppi, basti pensare che ogni gruppo nilpotente e non t -gruppo è banalmente un g -gruppo. Come per i t -gruppi (cfr. [2] Teorema 2 e 3) anche per i g -gruppi la prop. 2.3 si inverte.

PROPOSIZIONE 3.1. *Sia G un gruppo possedente un sottogruppo L tale che :*

- (a) G/L è nilpotente
- (b) $(|G/L|, |L|) = 1$
- (c) *ogni elemento $a \in G$ induce in L un automorfismo potenza $x \rightarrow x^{n_a}$ e per ogni divisore primo p di $|L|$ esiste un $a \in G$ tale che $n_a \not\equiv 1 \pmod{p}$, allora G un g -gruppo e G/L è il massimo quoziente nilpotente di G .*

Dimostrazione. Per (c) ogni sottogruppo di L è normale in G .

Sia G/L' il massimo quoziente nilpotente di G . Risulta evidentemente $L' \leq L$. Sia, per assurdo, $L' < L$. Esiste allora un sottogruppo massimale N di L contenente L' e normale in G . L/N è un sottogruppo normale minimale di G/N e $|L/N| = p$, p primo. Per (c) c'è un automorfismo interno di G che induce su L e quindi su L/N un automorfismo potenza $x \rightarrow x^n$, con $n \not\equiv 1 \pmod{p}$. Questo automorfismo non fissa nessun elemento di L/N . D'altra parte, essendo G/N nilpotente, è $L/N \leq Z(G/N)$, una contraddizione.

PROPOSIZIONE 3.2. *Sia L un gruppo abeliano, K un gruppo nilpotente $(|L|, |K|) = 1$, $\pi(L)$ il gruppo degli automorfismi potenza di L . Sia $\vartheta : K \rightarrow \pi(L)$ un omomorfismo tale che per ogni divisore primo p di $|L|$ esista $a \in K$ tale che, se $xa^\vartheta = x^n$ ($x \in L$), è $n \not\equiv 1 \pmod{p}$. Sia $G(K, L, \vartheta)$ il prodotto semidiretto di L e K mediante ϑ . Allora:*

- (a) G è un g -gruppo il cui massimo quoziente nilpotente è isomorfo a K e $L(G) \simeq L$.
- (b) *Se $G(K, L, \vartheta)$ e $G(K', L', \vartheta')$ sono isomorfi allora $K \simeq K'$ e $L \simeq L'$. $G(K, L, \vartheta)$ e $G(K, L, \vartheta')$ sono isomorfi se e solo se nel gruppo degli automorfismi di K esiste un elemento β tale che $\vartheta' = \vartheta \beta$.*

Dimostrazione. (a) Segue dalla Proposizione 3.1.

(b) La prima parte segue dal fatto che L è un sottogruppo caratteristico di G e $K \simeq G/L$. La seconda parte è una immediata conseguenza del Teorema 3.3 di [3].

PROPOSIZIONE 3.3. *Sia G un g -gruppo con $G = [L]K$ e G/L massimo quoziente nilpotente di G . Posto $C = C_K(L)$ si ha che G/C è un t -gruppo con complemento abeliano.*

Dimostrazione. Si osservi che K/C essendo isomorfo ad un sottogruppo del gruppo $\pi(L)$ degli automorfismi potenza di L è abeliano. Da $L(G/C) = LC/C$ e $G/C = [LC/C]K/C$ segue l'asserto.

PROPOSIZIONE 3.4. *Sia $G = [L]K$ e G/L massimo quoziente nilpotente di G . Posto $C = C_K(L)$, sia $(|L|, |C|) = 1$ e G/C un t -gruppo (con complemento abeliano). Allora G è un g -gruppo.*

Dimostrazione. Si prova, analogamente a quanto si è fatto nella Proposizione 2.2 che risulta $L(G/C) = LC/C$. Poiché ogni sottogruppo di LC/C è normale in G/C si ha, in particolare, che ogni sottogruppo di L è normale in G . Da $(|LC/C|, |K/C|) = 1$, essendo $LC/C \simeq L$, segue $(|L|, |K/C|) = 1$, d'altra parte è, per ipotesi, $(|L|, |C|) = 1$ onde $(|L|, |K|) = 1$ e L è di Hall per G .

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. EMALDI (1979) - *Caratterizzazione di gruppi mediante proiezioni sui loro sottogruppi*, « Le Matematiche », 34, 188-193.
- [2] W. GASCHÜTZ (1957) - *Gruppen in denen das Normalteilersein transitiv ist*, « J. Reine Angew. Math », 198, 87-92.
- [3] D.R. TAUNT (1955) - *Remarks on the isomorphism problem in theories of construction of finite groups*, « Proc. Cambridge Phil. », 51, 16-24.