Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Armin Herzer, Guglielmo Lunardon

## Una caratterizzazione delle fibfrazioni di Galois

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **77** (1984), n.5, p. 151–154.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1984_8_77_5_151_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1984.

**Geometria.** — *Una caratterizzazione delle fibrazioni di Galois* (*). Nota (**) di ARMIN HERZER e GUGLIELMO LUNARDON, presentata dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this paper we give a characterisation of the Galois spreads, which are defined in [5] for the construction of the indicator set.

## INTRODUZIONE

In [5] si costruisce l'insieme indicatore associato ad una fibrazione planare dello spazio proiettivo $PG(2n-1, K)$ sul campo $K$. Condizione necessaria e sufficiente per poter costruire ogni fibrazione planare di $PG(2n-1, K)$ mediante un insieme indicatore è che esista una fibrazione di Galois di $PG(2n-1, K)$. In questa nota si ottiene una caratterizzazione sintetica delle fibrazioni di Galois di $PG(2n-1, K)$ utilizzando il gruppo degli automorfismi degli spazi di Möbius miqueliani (« Möbiusgeometrie einer Körpererweiterung »).

1. Nel presente lavoro con $K$ indicheremo sempre un corpo commutativo (campo) e con $L$ un'estensione algebrica di $K$ di grado $n$.

Si ponga

$$PG(1, L) = \{ L(a, b) : (0, 0) \neq (a, b) \in L^2\}$$

$$PG(1, K) = \{L(a, b) : (0, 0) \neq (a, b) \in K^2\} .$$

Definiamo ora una struttura d'incidenza **I** nel seguente modo. I punti di **I** sono gli elementi di $PG(1, L)$; i cerchi di **I** sono le sottorette di $PG(1, L)$ su $K$; la relazione d'incidenza è l'usuale relazione di appartenenza: si osservi che $PG(1, K)$ è un cerchio di **I**.

Per ogni automorfismo $g$ di $L$, che muta $K$ in sé, indicheremo con $\sigma$ l'applicazione semilineare di $V = L^2$ in sé, che ad $(a, b)$ associa $(a^g, b^g)$, e con $A(L, K)$ il gruppo formato da tutte le applicazioni $\sigma$ di questo tipo.

(*) Lavoro svolto nell'ambito delle attività del G.N.S.A.G.A. mentre il secondo autore usufruiva di un finanziamento del D.A.A.D.

(**) Pervenuta all'Accademia il 24 ottobre 1984.

PROPOSIZIONE 1 (Benz [1] IV.2 o anche [7]). *Se* $\mathrm{K} \neq \mathrm{GF}(2)$, *il gruppo degli automorfismi di* **I** *è il prodotto di* $\mathrm{PGL}_2(L)$ *e di* $\mathrm{A}(L, K)$.

Sia $F(L, K)$ il sottogruppo di $\mathrm{A}(L, K)$ formato dalle applicazioni $K$-lineari di $A(L, K)$.

PROPOSIZIONE 2. *Il gruppo degli automorfismi di* **I**, *che fissano* $\mathrm{PG}(1, K)$ *puntualmente, è* $\mathrm{F}(L, K)$.

Il campo $L$ è un'estensione di Galois di $K$ se e solo se il gruppo $F(L, K)$ ha ordine $n$. In questo caso $F(L, K)$ è isomorfo al gruppo di Galois di $L$ su $K$.

Si consideri $V = L^2$ come spazio vettoriale su $K$ e si ponga $\Sigma = PG(V, K) =: PG(2n - 1, K)$.

Per ogni punto $Lv$ di $PG(1, L)$ indicheremo con $A(v)$ il sottospazio proiettivo di $\Sigma$ determinato da $Lv$ come $K$-sottospazio vettoriale di $V$: quindi $A(v)$ ha rango $n$.

Se $\mathbf{F} = \{A(v) : Lv \in PG(1, L)\}$, è noto (cfr. Bruck-Bose [2] cap. X) che $\mathbf{F}$ è una fibrazione planare regolare di $\Sigma$: cioè comunque scelti tre elementi $S$, $T$ e $U$ di $\mathbf{F}$, il regolo (1) $\mathbf{R}(S, T, U)$ di $\Sigma$ determinato da $S$, $T$ e $U$ è contenuto in $\mathbf{F}$.

La fibrazione planare $\mathbf{F}$ si chiamerà la *rappresentazione* K–*lineare* di $\mathrm{PG}(1, L)$.

PROPOSIZIONE 3. *Se* **C** *è l'insieme dei regoli di* $\Sigma$ *contenuti in* **F**, *la struttura d'incidenza* $\mathbf{M} = (\mathbf{F}, \mathbf{C}, \in)$ *è isomorfa ad* **I** *mediante l'applicazione* $i$: $Lv \rightarrow \mathrm{A}(v)$.

*Dimostrazione*. Poiché $i$ è una biiezione di $PG(1, L)$ in $\mathbf{F}$, si deve dimostrare che se $C$ è un cerchio di **I** allora l'insieme $\mathbf{R} = \{A(v) : Lv \in C\}$ è un regolo di $\Sigma$ e viceversa.

Si può scegliere una base $\{v_1, v_2\}$ di $V$ su $L$ in modo tale che

$$C = \{L(v_1 + \alpha v_2) : \alpha \in K\} \cup \{Lv_2\}.$$

Posto $A = Lv_1$ e $B = Lv_2$, sia $'$ l'applicazione $K$-lineare regolare di $A$ in $B$, che al vettore $\alpha v_1$ associa $\alpha v_2$ $(\alpha \in L)$. Gli elementi di $\mathbf{R}$ sono tutti e soli i sottospazi $\bar{D}$ (2) di $\Sigma$ tali che $D = A$ oppure $D = \{\alpha x + x' : x \in A\}$ $(\alpha \in K)$. Pertanto si verifica con un calcolo diretto che $\mathbf{R}$ è il regolo di $\Sigma$, che contiene $A$, $B$ e $\{x + x' : x \in A\} = A(v_1 + v_2)$.

Viceversa supponiamo che $\mathbf{R}$ sia il regolo di $\Sigma$ determinato da $A(v_1)$, $A(v_2)$ e da $A(v_3)$. Poiché $V$ ha dimensione due su $L$, si può scegliere una base

(1) Per semplicità chiameremo *regolo* la fibrazione parziale che Dembowski in [3] chiama $(n - 1)$-*regolo*.

(2) Con $\bar{D}$ s'indica il sottospazio di $\Sigma$ determinato dal K-sottospazio vettoriale $D$ di $V$.

$\{w_1, w_2\}$ di $V$ cosicché $Lv_1 = Lw_1$, $Lv_2 = Lw_2$ ed $Lv_3 = L(w_1 + w_2)$. Pertanto

$$\mathbf{R} = \{A(\alpha w_1 + \beta w_2) : (0, 0) \neq (\alpha, \beta) \in K^2\}$$

è l'immagine mediante $i$ del cerchio $C = \{L(\alpha w_1 + \beta w_2) : (0, 0) \neq (\alpha, \beta) \in K^2\}$ di $\mathbf{I}$.

2. Sia $\Delta$ il gruppo formato dalle collineazioni di $\Sigma$, che trasformano $\mathbf{F}$ in sé. Si indichi con $\Delta_0$ il sottogruppo di $\Delta$ formato dalle collineazioni, che fissano tutti gli elementi di $\mathbf{F}$: il gruppo $\Delta_0$ opera in modo semiregolare su ogni elemento di $\mathbf{F}$ (cfr. Herzer [4] Hilfssatz 3).

PROPOSIZIONE 4. *Sia* $\mathrm{K} \neq \mathrm{GF}(2)$ *e si indichi con* $t$ *una retta trasversale di* $\mathbf{F}$. *Il gruppo* $\mathrm{X}_{(t)}$ *formato da tutte le collineazioni di* $\Delta$, *che fissano* $t$ *puntualmente, è isomorfo a* $\mathrm{F}(L, K)$.

*Dimostrazione.* Ogni elemento $\tau$ di $\Delta$ trasforma regoli contenuti in $\mathbf{F}$ in regoli contenuti in $\mathbf{F}$: quindi ponendo $f(\tau) = i\,\tau\,i^{-1}$ l'applicazione $f$ definisce un omomorfismo di $\Delta$ nel gruppo $\bar{\Delta}$ degli automorfismi di $\mathbf{I}$. Il nucleo dell'omomorfismo $f$ è il gruppo $\Delta_0$.

Il gruppo $\Delta$ è transitivo sull'insieme delle rette trasversali di $\mathbf{F}$ (cfr. Herzer [4] Hilfssatz 3). Si può pertanto supporre $t = \{K(\alpha, \beta) : (0, 0) \neq (\alpha, \beta) \in K^2\}$. Si ponga $\mathrm{X} = \mathrm{X}_{(t)}$.

Ogni elemento di $\mathrm{X}$ fissa tutti i sottospazi del regolo $\mathbf{R}_0 = \{A((\alpha, \beta)) : (0, 0) \neq (\alpha, \beta) \in K^2\}$. Ogni elemento del gruppo $\bar{\mathrm{X}} = f(\mathrm{X})$ fissa puntualmente il cerchio $\mathrm{PG}(1, K) = i^{-1}(\mathbf{R}_0)$ di $\mathbf{I}$: quindi $\bar{\mathrm{X}}$ è un sottogruppo di $F(L, K)$.

Poiché ogni collineazione di $F(L, K)$ induce una collineazione di $\Sigma$, che muta $\mathbf{F}$ in sé e fissa $t$ puntualmente, il gruppo $\mathrm{F}(L, K)$ è un sottogruppo di $\bar{\mathrm{X}}$: cioè $F(L, K) = \bar{\mathrm{X}}$.

Poiché il gruppo $\Delta_0$ opera in modo semiregolare su ogni elemento di $\mathbf{F}$, segue che $\Delta_0 \cap \mathrm{X}$ è il sottogruppo identico. Pertanto $f$ è un monomorfismo di $\mathrm{X}$ su $\bar{\mathrm{X}} = f(\mathrm{X})$: quindi $\mathrm{X}$ è isomorfo a $F(L, K)$.

3. Sia $\mathbf{S}$ una fibrazione planare dello spazio proiettivo $\Sigma = PG(2n - 1, K)$; indicheremo con $T(\mathbf{S})$ il piano di traslazione associato a $\mathbf{S}$. Diremo che $\mathbf{S}$ è *pappiana* se il piano $T(\mathbf{S})$ è di Pappo. In questo caso $\mathbf{S}$ è regolare e il piano $T(\mathbf{S})$ è coordinatizzato da un corpo commutativo $L$ con $[L : K] = n$ (cfr. Bruck-Bose [2] theorem 12.1). Se $L$ è un'estensione di Galois di $K$, diremo che $\mathbf{S}$ è una *fibrazione di Galois.*

Le fibrazioni pappiane si caratterizzano mediante una proposizione configurazionale ([4]).

TEOREMA. *Sia* $\mathbf{S}$ *una fibrazione planare pappiana di* $\Sigma = \mathrm{PG}(2n - 1, K)$. *Se* $t$ *è una retta trasversale di* $\mathbf{S}$ *si indichi con* $\mathrm{X}_{(t)}$ *il gruppo formato dalle collinea-*

*zioni di* $\Sigma$, *che mutano* **S** *in se e fissano la retta t puntualmente.* **S** *è di Galois se e solo se* $X_{(t)}$ *ha ordine n.*

*Dimostrazione.* Se $L$ è il campo, che coordinatizza il piano $T(\mathbf{S})$, ed **F** è la rappresentazione $K$-lineare di $PG(1, L)$ in $\Sigma$, le fibrazioni **S** ed **F** sono collineari mediante una collineazione di $\Sigma$ (cfr. Lüneburg [6] cap. I). Quindi per la proposizione 4 il gruppo $X_{(t)}$ è isomorfo a $F(L, K)$.

Da qui segue l'enunciato.

## Bibliografia


[1] Benz W. (1973) – *Vorlesungen über Geometrie der Algebren.* Springer-Verlag.

[2] Bruck R.H. e Bose R.C. (1966) – *Linear representation of projective planes in projective space.* « J. Algebra », *4*, 117-172.

[3] Dembowski P. (1968) – *Finite geometries*, Springer-Verlag.

[4] Herzer A. (1974) – *Charakterisierung regulärer Faserungen durch Schliessungssätze.* « Arch. Math. », *25*, 662-672.

[5] Lunardon G. – *Fibrazioni planari e sottovarietà algebriche della varietà di Grassmann.* In corso di stampa su « Geom. Dedicata ».

[6] Lüneburg H. (1980) – *Translation planes.* Springer-Verlag.

[7] Mäurer H., Metz R. e Nolte W. (1980) – *Die Automorphismengruppe der Möbiusgeometrie einer Körpererweiterung.* « Aeq. Math. », *21*, 110-112.