Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Placido Longo

Caratterizzazione dei Γ-limiti d'ostacoli unilaterali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **77** (1984), n.3-4, p. 76–80.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1984_8_77_3-4_76_0>

Calcolo delle variazioni. — *Caratterizzazione dei* Γ*–limiti d'ostacoli unilaterali.* Nota (*) di PLACIDO LONGO (**), presentata dal Corrisp. E. DE GIORGI.

SUMMARY. — In this paper we complete the characterization of those f, μ and ν such that

$$\| w \|^2_{H^1(\Omega)} + \int_B f(x, w(x))\, d\mu + \nu(B)$$

is $\Gamma(L^2(\Omega)^-)$ limit of a sequence of obstacles $\| w \|^2_{H^1(\Omega)} + \Phi_h(w, B)$ where

$$\Phi_h(w, B) = \begin{cases} 0 & \text{if } w \geq \varphi_h \text{ a. e. on B} \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

1. Qualche anno fa, esaminando una congettura di E. De Giorgi ([3]) fu dimostrato che, analogamente a quanto accade per il problema dell'omogeneizzazione di funzionali quadratici, e in modo ancora più patologico, il Γ–limite di una successione di funzionali variazionali contenenti vincoli di tipo ostacolo può avere una struttura diversa da quella dei funzionali della successione (cfr. [1]).

Successivamente venne dimostrato ([2]) che questo è un fenomeno del tutto generale, nel senso che ogni limite Γ–limite di una successione di ostacoli $\| w \|^2_{H^1(\Omega)} + \hat{\Phi}_h(w, B)$, ove

$$\hat{\Phi}_h(w, B) = \begin{cases} 0 & \text{se } w(x) \geq \phi_h(x) \quad \text{q.o. in B} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1}$$

è rappresentabile nella forma

(*) Pervenuta all'Accademia il 24 ottobre 1984.

(**) Scuola Normale Superiore, Piazza dei Cavalieri, 7, 56100 Pisa.

$$\| w \|^2_{H^1(\Omega)} + \int_B f(x, \tilde{w}(x))\, d\mu + \nu(B) \tag{2}$$

ove

$$\tilde{w}(x) = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\operatorname{mis}(B_\rho(x))} \int_{B_\rho(x)} w(y)\, dy ,$$

μ e ν sono misure di Radon positive, μ è di energia finita, ed $f : \Omega \times \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ soddisfa alle seguenti condizioni:

(a) $x \to f(x, t)$ è di Borel per ogni t.

(b) $t \to f(x, t)$ è s.c.i., convessa e non crescente per μ — q.o. x.

Fu infine dimostrato ([5]) che se oltre alle ipotesi precedenti (a) e (b) si richiede ad f di verificare la condizione seguente

(c) $t \to f(x, t)$ è derivabile sull'intervallo su cui è finita, e la derivata è concava, per μ — q.o. x

allora esiste una successione di ostacoli $(\hat{\Phi}_h)$ tale che

$$\| u \|^2_{H^1(\Omega)} + \int_B f(x, \tilde{u}(x))\, d\mu + \nu(B) = \Gamma \lim_{\substack{h \to \infty \\ w \to u}} [\, \| w \|^2_{H^1(\Omega)} + \hat{\Phi}_h(w, B)] . \tag{3}$$

Riguardo alla caratterizzazione della classe dei Γ–limiti di ostacoli in termini di proprietà di f era dunque già noto che le condizioni (a) e (b) sono necessarie per l'appartenenza del funzionale (2) alla classe e che (a) (b) e (c) sono sufficienti.

Scopo di questa Nota è di completare la caratterizzazione, dimostrando la necessità di (c).

Per esporre i risultati occorreranno alcune notazioni. Con Ω sarà denotato un aperto regolare e con $\mathcal{B}(\Omega)$ la classe dei boreliani relativamente compatti in Ω.

Per ogni boreliano B si porrà

$$\operatorname{cap} B = \inf \{ \| w \|^2_{H^1(\Omega)} ,\ w \in H^1(\Omega) ,\ w \text{ semicontinua},\ w \geq 1 \text{ su } B \} .$$

Una proprietà sarà detta soddisfatta cap. quasi ovunque (cap. q.o.) se è nulla la capacità dell'insieme dei punti per cui essa non vale.

Per ogni funzione $w \in H^1(\Omega)$ si porrà

$$\tilde{w}(x) = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\operatorname{mis}(B_\rho(x))} \int_{B_\rho(x)} w(y)\, dy$$

ove con B (x) si è indicata la sfera di centro x e raggio ρ.

È noto (cfr. per esempio [2]) che $\tilde{w}(x)$ è definita cap. q.o. e coincide quasi ovunque, nel senso ordinario, con w.

Data una funzione arbitraria $\phi : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ si definirà un funzionale su $\mathrm{H}^1(\Omega) \times \mathscr{B}(\Omega)$ ponendo

$$\Phi(w, \mathrm{B}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \operatorname{cap}\{x \in \mathrm{B} : \tilde{w}(x) < \phi(x)\} = 0 \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il funzionale così definito è detto ostacolo corrispondente a ϕ e denotato con la stessa lettera in maiuscolo, ed è convesso e s.c.i. rispetto alla topologia forte di $\mathrm{H}^1(\Omega)$ (cfr. [2]). Inoltre, per ogni ϕ esiste ψ tale che $\hat{\Phi} = \Psi$.

Una misura di Radon positiva μ sarà detta di energia finita se il funzionale $\varphi \to \int \varphi \, d\mu$ è continuo su $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto alla topologia di $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$.

Infine una famiglia di boreliani $\mathscr{B}$ sarà detta ricca se ogni famiglia $(\mathrm{B}_t)_{t \in [0,1]}$, tale che $\overline{\mathrm{B}}_t$ sia compatto in $\mathring{\mathrm{B}}_s$ se $t < s$, contiene al più un'infinità numerabile di insiemi che non appartengono a $\mathscr{B}$.

Il Teorema fondamentale sarà espresso usando i Γ—limiti, introdotti da E. De Giorgi.

Definizione 1.1. *Data una successione* (f_h) *di funzionali, a valori reali estesi, definita su uno spazio metrico* X *si porrà*

$$f(u) = \Gamma(\mathrm{X}^-) \lim_{\substack{h \to \infty \\ w \to u}} f_h(w)$$

se e solo se valgono le proprietà seguenti:

1) *Per ogni successione* $w_h \to u$ *in* X *si ha*

$$f(u) \leq \liminf_{h \to \infty} f_h(w_h) .$$

2) *Esiste una successione* $v_h \to u$ *in* X *tale che*

$$f(u) = \lim_{h \to \infty} f_h(v_h) .$$

In questa Nota verrà adoperato soltanto il $\Gamma(\mathrm{L}^2(\Omega)^-)$ limite e verrà abbreviato il Γ lim. Il fatto che la famiglia dei funzionali d'ostacolo di tipo (1) sia equicoerciva, almeno per ogni Ω limitato, rende particolarmente vantaggioso l'uso della Γ–convergenza, che gode allora di due importanti proprietà. La prima, essenziale nella dimostrazione, è che essa è indotta da una metrica, e ciò consente l'uso della diagonalizzazione. La seconda, necessaria alle applicazioni, è che essa è equivalente alla convergenza in $L^2(\Omega)$ dei punti di minimo dei funzionali $f_h + g$ a quelli di $f + g$, per ogni g continua in $L^2(\Omega)$.

2. Il risultato principale, oggetto di questa Nota, è il seguente teorema.

TEOREMA 2.1. *Dato un funzionale* $J : H^1(\Omega) \times \mathcal{B}(\Omega) \to \mathbf{R}^+$, *condizione necessaria e sufficiente perché esistano una successione* (ϕ_h), $\phi_h : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$, *e una famiglia ricca di boreliani* $\mathcal{B}$ *tali che*

$$J(u, B) = \Gamma \lim_{\substack{h\to\infty \\ w\to u}} [\| w \|^2_{H^1(\Omega)} + \Phi_h(w, B)] \quad \forall u \in H^1(\Omega), \forall B \in \mathcal{B}$$

è che

$$J(u, B) = \| u \|^2_{H^1(\Omega)} + \int_B f(x, \tilde{u}(x))\, d\mu + \nu(B) \quad \forall u \in H^1(\Omega), \forall B \in \mathcal{B}. \tag{3}$$

ove μ *e* ν *sono misure di Radon positive,* μ *è di energia finita, ed* $f : \Omega \times \mathbf{R} \to \bar{\mathbf{R}}^+$ *soddisfa alle seguenti condizioni.*

1) $x \to f(x, t)$ *è boreliana per ogni* t.

2) $t \to f(x, t)$ *è convessa, semicontinua inferiormente, e decrescente per* μ*-quasi ogni* x.

3) $t \to f(x, f)$ *è derivabile all'interno dell'intervallo su cui è finita e la sua derivata è concava, per* μ*-quasi ogni* x.

Era già noto (cfr. [2]) che ogni Γ-limite d'ostacoli è del tipo (3), con f verificante 1) e 2) e, riguardo al viceversa (cfr. [5]) che, se f, μ, ν soddisfano tutte le condizioni precedenti allora $\| w \|^2_{H^1(\Omega)} + \int_B f(x, \tilde{w}(x))\, d\mu + \nu(B)$ coincide con il Γ-limite di un'opportuna successione d'ostacoli per tutti i boreliani di una classe ricca.

Il fatto che per ogni Γ-limite d'ostacoli valgano le proprietà di derivabilità e di concavità della derivata di $t \to f(x, t)$, che ancora mancavano per completare la caratterizzazione della chiusura dei funzionali d'ostacolo rispetto alla Γ-convergenza, è conseguenza di alcuni risultati intermedi.

Il primo di essi è un teorema di approssimazione, per enunciare il quale premettiamo una definizione.

DEFINIZIONE 2.2. *Un ostacolo* $\Phi(w, B)$ *sarà detto semplice se la funzione corrispondente* $\phi : \Omega \to \mathbf{R}$ *soddisfa le seguenti condizioni*

1) ϕ *assume un numero finito di valori* $a_1 \ldots a_n$.

2) $\phi^{-1}(a_i)$ *è un plurirettangolo per ogni* $i = 1 \ldots n$.

TEOREMA 2.3. *Se vale*

$$J(u, B) = \Gamma \lim_{\substack{h \to \infty \\ w \to u}} [\| w \|^2_{H^1(\Omega)} + \Phi_h(w, B)] \quad \forall u \in H^1(\Omega), \forall B \in \mathscr{B}$$

allora esiste una successione (Ψ_h) *di ostacoli semplici tale che*

$$J(u, B) = \Gamma \lim_{\substack{h \to \infty \\ w \to u}} [\| w \|^2_{H^1(\Omega)} + \Psi_h(w, B)] \quad \forall u \in H^1(\Omega), \forall B \in \mathscr{B}.$$

OSSERVAZIONE 2.4. È immediato provare che gli ostacoli semplici possono essere approssimati, nel senso della Γ–convergenza, con ostacoli regolari, generati cioè da funzioni continue. Usando il Teorema 2.3 ed il procedimento diagonale ne segue subito che anche la classe degli ostacoli regolari è densa in quella dei Γ–limiti di ostacoli.

Il Teorema 2.3 consente di restringere l'indagine alle sole successioni d'ostacoli semplici. Per esse il problema è riconducibile, tramite alcuni risultati noti tra cui una formula ([4]) che correla il valore del Γ–limite a quello dei minimi di una successione doppia di problemi variazionali, al seguente risultato, che costituisce il passo cruciale della dimostrazione.

TEOREMA 2.5. *Sia* Φ *un ostacolo semplice. Allora*

$$t \to \min_{w \in H^1(\Omega)} [\| w \|^2_{H^1(\Omega)} + \lambda \| w \|^2_{L^2(\Omega)} + \Phi(t + w, Q)]$$

è derivabile, con derivata concava per ogni $\lambda \in R^+$ *e ogni plurirettangolo* Q.

L'estensione di questi risultati all'analogo problema per gli ostacoli Φ bilaterali, ossia tali che $\Phi(w, B) = 0$ se cap $\{x \in B : \phi'(x) \leq \tilde{w}(x) \leq \phi''(x)\} = 0$, non sembra ottenibile con gli stessi procedimenti con cui si dimostra il teorema 2.1.

Resta dunque aperto il problema della caratterizzazione completa della chiusura dei funzionali d'ostacolo bilaterale rispetto alla Γ–convergenza.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. CARBONE e F. COLOMBINI (1980) – *On convergence of functionals with unilateral constraints*, « J. Math. Pure Appl. », (9) *59*, 465-500.

[2] G. DAL MASO e P. LONGO – *Γ-limits of obstacles*, « Ann. Mat. Pura Appl. » (IV), *128*, 1-50.

[3] E. DE GIORGI (1978) – *Convergence problems for functionals and operators, Proceedings of the international Meeting on « Recent Methods in nonlinear Analysis »*, Rome. May 8-12, 1978, edited by E. De Giorgi E. Magenes, U. Mosco, pp. 131-188, Pitagora Editrice, Bologna, 1979.

[4] E. DE GIORGI e T. FRANZONI (1979) – *Su un tipo di convergenza variazionale*, « Rend. Sem. Mat., Brescia », *3*, 63-101.

[5] P. LONGO (1982-83) – *Approximation of convex functionals by obstacle functionals*, « Jour. Anal. Math. », *42*, 229-275.