

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

# RENDICONTI

---

MARIO PASQUINO

**La trave in parete sottile a sezione aperta e variabile:  
formulazione teorica e risultati sperimentali**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,  
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 77 (1984), n.1-2, p. 35-47.*  
Accademia Nazionale dei Lincei

<[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1984\\_8\\_77\\_1-2\\_35\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1984_8_77_1-2_35_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



**Meccanica dei continui.** — *La trave in parete sottile a sezione aperta e variabile: formulazione teorica e risultati sperimentali.* Nota (\*) di MARIO PASQUINO, presentata dal Corresp. E. GIANGRECO.

SUMMARY. — Theoretical and experimental results concerning the shear-center of a bent beam with variable section are carried out.

The matrix methods of structural analysis for the static linear elastic problem is extended; the stiffness and load matrix are formulated starting from the sectorial areas theory in order to interpret the effect of non-uniform torsion.

The formulation may be used through the general matrix displacement method of structural analysis.

#### PREMESSA

Il problema delle sollecitazioni delle travi per la torsione connessa con l'eccentricità delle forze esterne applicate e reattive, rispetto al centro di taglio è risolto soltanto nel caso di sezione costante.

Nelle travi di sezione variabile tale calcolo si esegue di norma operando sul luogo dei centri di taglio ottenuti alla maniera classica: e cioè ubicando per ogni sezione il centro di taglio lì dove esso cadrebbe se la trave presentasse tale sezione costante lungo l'asse.

È facilmente intuibile invece come le tensioni secondarie da taglio dovute alla variabilità della sezione inducano spostamenti del centro di taglio dipendenti dal rapporto momento/taglio.

La conseguente variazione dei momenti torcenti comporta l'osservazione che non si può introdurre la prima correzione senza introdurre anche la seconda.

L'importanza di quanto sopra è evidente ove si pensi al caso delle sezioni aperte ai fini di un più giusto posizionamento di forze esterne e vincoli onde evitare disastrosi effetti di torsione.

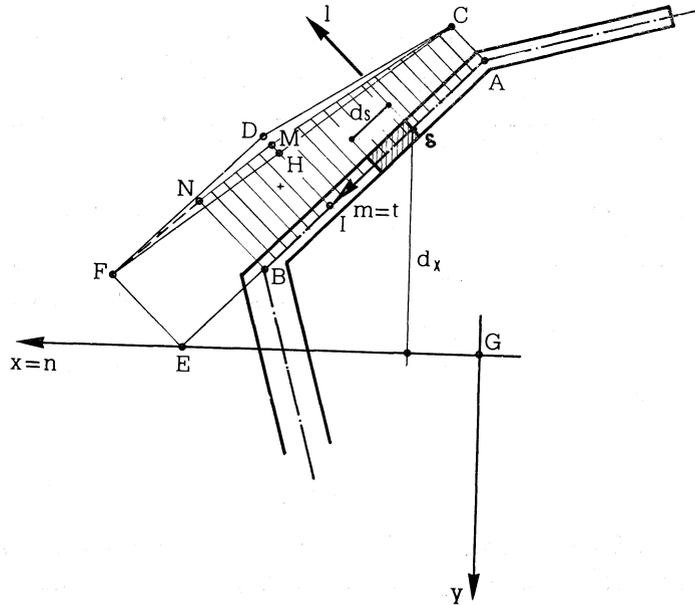
#### 1. RICHIAMI TEORICI

I contenuti teorici, qui di seguito richiamati, sono riportati più estesamente nella nota [1].

Si prende in esame il caso di una sezione retta di spessore sottile variabile lungo l'asse solo con l'altezza.

(\*) Pervenuta all'Accademia il 10 luglio 1984.

Il riferimento ha origine nel baricentro dell'anima, l'asse  $x$  ortogonale alla linea media dell'anima e l'asse  $y$  ortogonale a quest'ultimo. L'asse  $z$  è perciò ortogonale alla sezione retta.



Si prende in esame un generico spessore  $b$ . Poiché esso è trascurabile è lecito supporre che la  $\tau_z$  sia ovunque ortogonale allo spessore.

Sempre per le dimensioni di  $b$ , la  $\tau$  si suppone costante lungo lo spessore. Le componenti del rotore di  $\tau$  sono:

$$(\text{rot } \tau_z)_x = 0; \quad (\text{rot } \tau_z)_y = 0; \quad (\text{rot } \tau_z)_z = \frac{\partial \tau}{\partial n}.$$

Se  $\theta'$  è l'angolo specifico di torsione intorno a  $z$  pari a  $d\phi_z/dz$  il valore di  $\text{rot } \tau_z$  è uguale a  $2 G\theta'$ . (Cfr. V. FRANCIOSI: *Fondamenti di Scienza delle Costruzioni*. Vol. II, pag. 314, Liguori, Napoli 1978).

Sotto tale ipotesi dalla terza equazione indefinita dell'equilibrio scritta per  $z = 0$  si ottiene:

$$\text{div } \tau = - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$$

per cui il teorema del flusso relativo al dominio definito dalla parte di sezione retta  $A^-$ , limitata da  $b$  e che contiene le ascisse curvilinee decrescenti permette di scrivere:

$$(1) \quad \tau b = \int_{A^-} \text{div } \tau_z \, dA = - \int_{A^-} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \, dA.$$

Nel caso in esame

$$\sigma_z = \frac{M_f}{I_x} y$$

quindi dopo opportuni passaggi la (1) si scrive:

$$\tau = -\frac{T}{b} \frac{S_x}{I_x} - \frac{M_f}{b} \frac{d}{dz} \left( \frac{S_x}{I_x} \right).$$

Se varia solo H è:

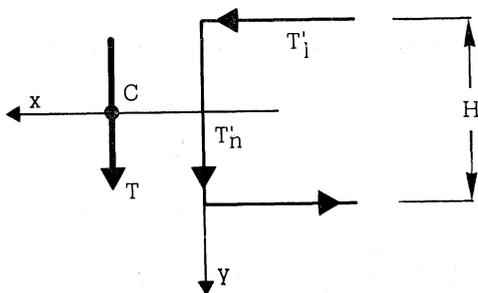
$$(2) \quad \tau = -\frac{T}{b} \frac{S_x}{I_x} - \frac{M_f}{b} \frac{dH}{dz} \frac{d}{dH} \left( \frac{S_x}{I_x} \right).$$

### 1.1. Centro di taglio.

La (2) è stata utilizzata per valutare (cfr. [1], [2]) la posizione del centro di taglio per travi in parete sottile con sezione variabile a [ e a ] .

Effettuate le opportune sostituzioni e sviluppando l'espressione che fornisce il centro di taglio, se non si tiene in conto la variazione di H con  $z$  è:

$$x'_c = \frac{T'_l H'}{T}$$

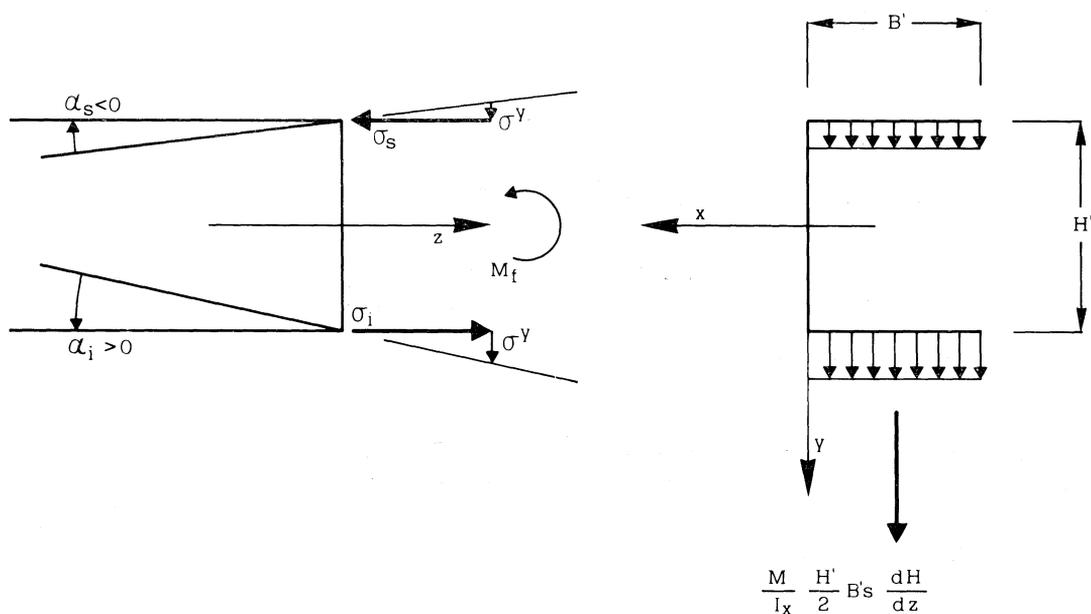


Se invece si tiene conto della variazione di H con  $z$ , occorre chiamare in causa le  $\tau''$  dipendenti da  $M_f$  e le stesse  $\sigma$  attraverso le componenti secondo  $y$ . Ed infatti è (fig. 2)

$$\sigma_i = \frac{M_f}{I_n} d'_n \quad \sigma_s = \frac{M_f}{I_n} d''_n \quad \sigma'_i = \sigma_i \operatorname{tg} \alpha_i \quad \sigma''_s = \sigma_s \operatorname{tg} \alpha_s.$$

La (2) in tal caso fornisce la seguente espressione corretta di  $x_c$

$$(4) \quad x_c = \frac{(T'_l + T'_n) \cdot H' - \frac{M_f H' B'^2 s}{4 I_n} \frac{dH'}{dz}}{T}.$$



## 2. RISULTATI

I risultati teorici e sperimentali sono riportati nella seguente Tabella

TABELLA I

$F = 5.000 \text{ Kg}$   $e = 10.8 \text{ cm}$

Sezione	Caratteristiche	Valore alla D. S. Venant	Valore in seconda correzione	Valore sperimentale
$Z = 80 \text{ cm}$	$\theta$ (rad)	-0.001395	+ 0.0314	+ 0.02006
	$\sigma_2$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	198.08	198.08	185.15
	$\tau_z$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	41.54	454.53	375.18
	$\sigma_{eq}$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	210.74	811.80	675.69

I risultati teorici sono stati ottenuti mediante un programma di calcolo automatico riportato in [3].

## 3. TORSIONE NON UNIFORME

In un altro lavoro [2] dopo aver introdotto la variazione dei momenti torcenti conseguenti al termine correttivo della (2) sono stati esaminati, sullo stesso schema della nota [1], gli effetti della torsione non uniforme nei riguardi della deformazione.

Si è fatta l'ipotesi semplificativa che gli assi principali d'inerzia non variano lungo l'asse e che i centri di taglio siano allineati su un asse parallelo all'asse  $z$  (asse di taglio).

Quest'ultima condizione ha permesso, trasportando le forze applicate nel piano della generica sezione retta sul centro di taglio di scomporre l'insieme delle forze in un altro insieme che genera solo flessione ( $\Theta = 0$ ) ed un insieme di coppie torcenti che generano solo torsione ( $\phi_x = \phi_y = 0$ ) e cioè rotazioni delle sezioni rette intorno all'asse di taglio.

In tal caso l'espressione degli spostamenti  $w$  da torsione calcolati in funzione di  $\Theta'$  sono:

$$w = -2 \Theta' A_s$$

dove  $A_s$  = area settoriale determinato da un punto 0 coincidente con il centro di taglio C e da un punto R scelto in modo che in corrispondenza di esso si abbia  $w_R = 0$  e tale cioè che sia verificata la condizione

$$\int w_R \delta ds = 0 \rightarrow \int \sigma dA = N = 0.$$

Si ha pertanto:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -2 (\Theta' A_s)' \\ \sigma &= -2 E (\Theta' A_s)'. \end{aligned}$$

Dalla condizione di equilibrio dell'elemento  $ds dz$  si scrive:

$$\frac{\partial}{\partial s} (\tau_z \delta) = -(\sigma \delta)'$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial s} (\tau_z \delta) = 2 E \left[ (\Theta' A_s)' \delta \right]' ds.$$

In tal caso si ha:

$$(\tau_z \delta)_p = (\tau_z \delta)_A + 2 E \int_A^P \left[ (\Theta' A_s)' \delta \right]' ds$$

e sviluppando, con le posizioni,

$$\begin{aligned} B_1 &= 4 E \int_m A'_s \delta \, ds & B_2 &= 4 E \int_m A_s'^2 \delta \, ds \\ B_3 &= 4 E \int_m f f' \delta \, ds & C_1 &= \text{rigidità torsionale} \end{aligned}$$

si ottiene l'equazione differenziale del tipo autoaggiunto che regge il problema

$$(5) \quad (C_2 \Theta'')' - (C_1^* \Theta')' = m_t$$

dove

$$C_2 = 4 E \int_m f^2 \cdot \delta \cdot ds \quad C_1^* = C_1 + B_2 - B_3.$$

L'espressione di  $m_t$  è la seguente

$$m_t = -dM_e/dz$$

dove

$$dM_e = T \cdot dh$$

con  $h$  che rappresenta la distanza dei successivi centri di taglio modificati, dall'asse di sollecitazione.

L'integrazione della (5) è stata ottenuta assumendo come soluzione del problema lo sviluppo in serie di Fourier secondo l'espressione.

$$\Theta = \Theta_i \operatorname{sen} \frac{i \pi z}{l}$$

con le condizioni ai limiti

$$\Theta = \Theta'' = 0 \quad \text{per } z = 0 \quad \text{e per } z = l.$$

Il metodo risolutivo è stato quello energetico

$$L = \frac{1}{2} \Theta^T A \Theta \quad P = B \Theta$$

per cui:

$$\frac{\partial E_t}{\partial \Theta_i} = A \Theta_i + B = 0$$

con

$$A = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \int_0^l C_1^* \frac{\cos^2 i \pi z}{l} dz + \frac{i^4 \pi^4}{l^4} \int_0^l C_2 \operatorname{sen}^2 \frac{i \pi z}{l} dz$$

$$B = \int_0^l m_i \operatorname{sen} \frac{i \pi z}{l} dz.$$

Il programma di calcolo è riportato nella nota [3].

I risultati ottenuti denunciano rotazioni torsionali pressocchè uguali a quelli ottenuti in seconda correzione nella nota [1] e senza tenere conto della torsione non uniforme.

#### 4. ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI

##### 4.1. *Calcolo della matrice di rigidezza.*

Si riporta di seguito la matrice di rigidezza di una trave in parete sottile a sezione aperta e variabile che tenga conto dell'effetto « warping ».

Indichiamo con  $\{\bar{\mathbf{v}}\}$  il vettore che comprende le funzioni degli spostamenti che stiamo considerando e cioè:

$$\{\bar{\mathbf{v}}\} = [u(z); v(z); w(z); \phi(z)]^T.$$

Le funzioni  $\theta(z)$ ,  $\psi(z)$  e  $\phi'(z)$  non sono state introdotte perché esse sono note una volta note rispettivamente le funzioni  $v(z)$ ,  $u(z)$  e  $\phi(z)$ .

Il significato delle funzioni spostamento si evince dalla figura

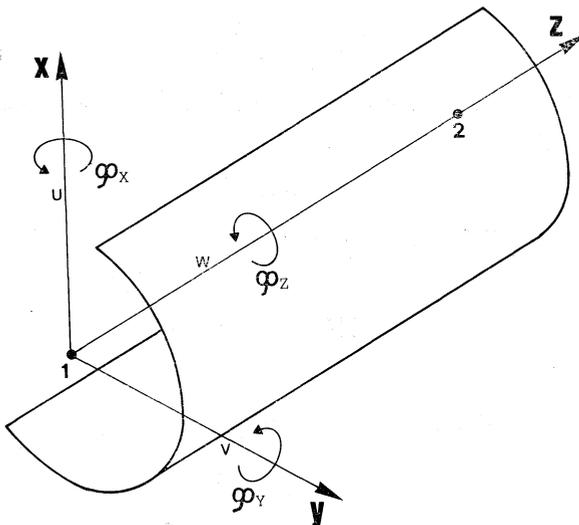


Fig. 3.

Per tenere conto dell'effetto «warping» si è introdotta anche la funzione  $\phi' = d\phi/dz$ .

Per esprimere la matrice di rigidità dell'elemento in considerazione si esprime, per ciascuno degli elementi componenti il vettore  $\{\bar{\mathbf{V}}\}$  in funzione degli spostamenti dei punti estremi [1] e [2] della trave in considerazione; cioè indichiamo con  $\{\mathbf{U}\}$  il vettore contenente gli spostamenti dei punti estremi

$$\{\mathbf{U}\} = [u_1; v_1; w_1; \phi_1; \psi_1; \theta_1; u_2; v_2; w_2; \phi_2; \psi_2; \theta_2]$$

ed in forma matriciale

$$\{\bar{\mathbf{V}}\} = [\mathbf{b}] \{\mathbf{U}\}.$$

Indichiamo con  $[\mathbf{L}]$  il seguente operatore differenziale:

$$[\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d^2/dz^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d^2/dz^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d/dz \\ 0 & 0 & 0 & d^2/dz^2 \end{bmatrix}.$$

Il vettore delle curvature

$$\{\chi\} = \left[ \frac{du}{dz}; \frac{d^2v}{dz^2}; \frac{d^2w}{dz^2}; \frac{d\phi}{dz}; \frac{d^2\phi}{dz^2} \right]^T$$

si può esprimere nel modo seguente

$$\{\chi\} = [\mathbf{L}] \{\bar{\mathbf{V}}\}.$$

Quindi il vettore delle caratteristiche delle sollecitazioni  $\{\mathbf{S}\}$  si può esprimere nel seguente modo

$$\{\mathbf{S}\} = [\mathbf{C}] \{\chi\}$$

avendo indicato con  $[\mathbf{C}]$  la seguente matrice

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} EA & & & & & \\ & EI_x & & & & \\ & & EI_y & & & \\ & & & GJ & & \\ & & & & EI & \\ & & & & & \end{bmatrix}.$$

Quindi la variazione di energia di deformazione  $\delta w$  per effetto degli spostamenti virtuali  $\delta v$  è:

$$\delta W = \int_0^l \{\mathbf{S}\}^T \delta \{\chi\} dz$$

che tenendo presenti le relazioni precedenti si può scrivere:

$$\delta W = \int_0^l \{\mathbf{U}\}^T [\mathbf{b}]^T [\mathbf{L}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{L}] [\mathbf{b}] \{\delta \mathbf{u}\} dz.$$

Se indichiamo con

$$\delta U = \{\mathbf{P}\}^T \{\delta \mathbf{u}\}$$

il corrispondente lavoro delle forze esterne applicando il principio dei lavori virtuali si ottiene:

$$\delta W = \delta U$$

cioè:

$$\int_0^l \{\mathbf{U}\}^T [\mathbf{b}]^T [\mathbf{L}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{L}] [\mathbf{b}] \{\delta \mathbf{U}\} dz = \{\mathbf{P}\}^T \{\delta \mathbf{U}\}.$$

Da questa relazione si ricava

$$\{\mathbf{P}\} = [\mathbf{K}] \{\mathbf{U}\}$$

in cui

$$\mathbf{K} = \int_0^l [\mathbf{b}]^T [\mathbf{L}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{L}] [\mathbf{b}] dz$$

è la matrice di rigidità.

I termini della matrice di rigidità corrispondenti alle forze  $P_x, P_y, P_z, M_x, M_y$ , sono già noti dalla trattazione della trave a sezione compatta, mentre i termini corrispondenti a  $M_{z1}, B_1, M_{z2}, B_2$  si ricavano dalla relazione:

$$E\Gamma \frac{d^4 \phi}{dz^4} - GJ \frac{d^2 \phi}{dz^2} = m(z)$$

che ammette come soluzione

$$\phi(z) = A \operatorname{sen} h kz + B \cos h Kz + Cz + D$$

in cui

$$K = \sqrt{\frac{GJ}{EI}}$$

da cui imponendo le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \phi_1 & \phi'(0) &= \phi'_1 \\ \phi(l) &= \phi_2 & \phi'(l) &= \phi'_2. \end{aligned}$$

Da questa relazione si ottiene ponendo  $\chi = Kl$

$$\left[ \begin{array}{c} \phi \\ \phi' \end{array} \right]_{\phi z} = \frac{1}{2(1 - \operatorname{ch} \chi) + \operatorname{sh} \chi} \cdot \left[ \begin{array}{cccc|c} \operatorname{sh} \chi & 1 - \operatorname{ch} \chi & -\operatorname{sh} \chi & 1 - \operatorname{ch} \chi + \chi \operatorname{sh} \chi & \operatorname{senh} kz \\ \frac{\operatorname{ch} \chi - 1 - \chi \operatorname{sh} \chi}{K} & \frac{\chi \operatorname{ch} \chi - \operatorname{sh} \chi}{K} & \frac{\operatorname{ch} \chi - 1}{K} & \frac{\operatorname{sh} \chi - \chi \operatorname{ch} \chi}{K} & \operatorname{cosh} kz \\ -\operatorname{sh} \chi & \operatorname{ch} \chi - 1 & \operatorname{sh} \chi & 1 - \operatorname{ch} \chi & kz \\ \frac{1 - \operatorname{ch} \chi}{K} & \frac{\operatorname{sh} \chi - \chi}{K} & \frac{\operatorname{ch} \chi}{K} & \frac{\chi - \operatorname{sh} \chi}{K} & 1 \end{array} \right]$$

Si riporta qui di seguito la matrice di rigidezza completa dell'elemento in considerazione.

#### 4.2. Diagramma di flusso per il calcolo agli elementi finiti.

Il diagramma di flusso dell'analisi strutturale statica eseguita mediante il metodo degli elementi finiti contiene i seguenti passi fondamentali:

- 1) Compilazione dei dati fondamentali della struttura schematizzata: posizione dei punti nodali, definizione degli elementi strutturali (nodi di connessione, caratteristiche geometriche ed inerziali) e del materiale utilizzato.
- 2) Determinazione delle coordinate dei nodi nei sistemi locali degli elementi  $(x, y, z)$ .
- 3) Calcolo delle matrici di rigidezza degli elementi nelle coordinate locali  $\mathbf{K}^{(i)}$ .
- 4) Determinazione dei coseni direttori per ciascun elemento  $\lambda^{(i)}$ .

5) Trasformazione delle matrici di rigidezza del sistema di coordinate locali in quello globale

$$\bar{\mathbf{K}}^{(i)} = (\lambda^{(i)})^T \mathbf{K}^{(i)} \eta^{(i)}$$

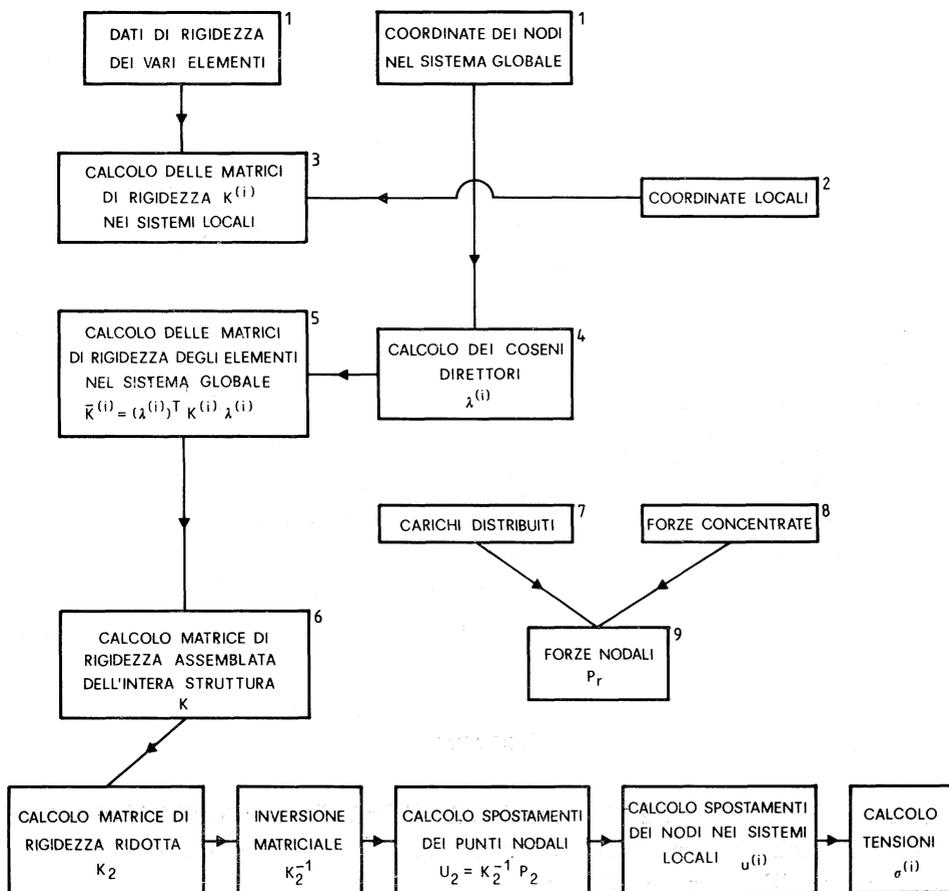
6) Somma delle matrici di rigidezza dei vari elementi per formare la matrice di rigidezza  $\mathbf{K}$  della struttura completa.

7) Eliminazione dei gradi di libertà del corpo rigido per ottenere la matrice di rigidezza ridotta  $\mathbf{K}_r$ .

8) Inversione della matrice di rigidezza  $\mathbf{K}_r$ .

9) Trasformazione dei carichi distribuiti in forze concentrate nodali equivalenti per ottenere il vettore delle forze nodali  $\mathbf{P}_r$ .

### DIAGRAMMA DI FLUSSO

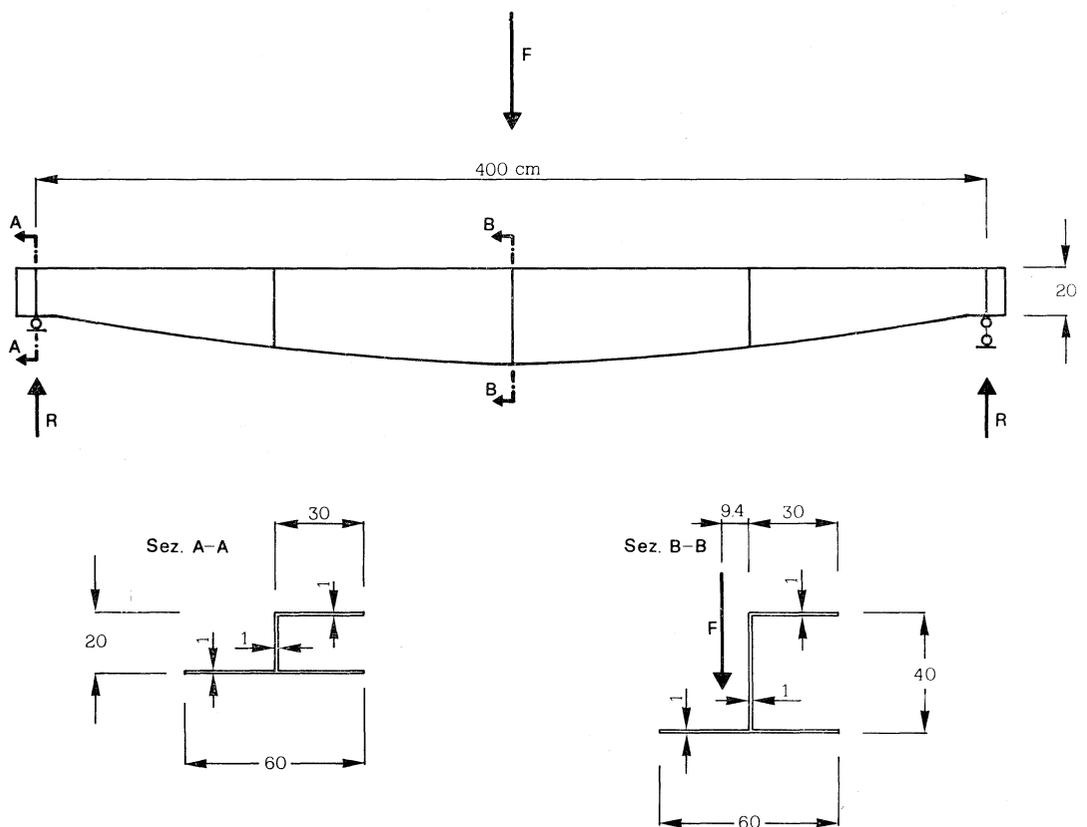


10) Calcolo degli spostamenti dei punti nodali nel sistema di riferimento globale  $U_r = K_r^{-1} P_r$  e quindi degli spostamenti  $u^{(i)}$  nel sistema locale per ottenere le forze e le tensioni  $\sigma^{(i)}$  nei vari elementi strutturali.

#### 4.3. Esempio di applicazione.

La struttura considerata è quella già precedentemente studiata [3].

Essa è una trave di mt 4 di luce caricata con una forza di 5.000 Kg agente ad una distanza dall'anima pari a cm 10,8 corrispondente alla posizione del centro di taglio della sezione di estremità.



#### RISULTATI

Per confronto con i valori riportati nella Tabella I e per brevità si riportano i valori delle sollecitazioni e delle rotazioni torsionali che si ottengono nella sola sezione posta all'ascissa  $z = 80$  cm.





TABELLA II

Ascissa della sezione	Caratteristiche	Valori agli elementi finiti
$z = 80 \text{ cm}$	$\theta$ (rad)	0.0235
	$\sigma_z$ (Kg/cmq)	208
	$\tau_z$ (Kg/cmq)	387
	$\sigma_{eq}$ (Kg/cmq)	701

## CONSIDERAZIONI

I risultati ottenuti con il procedimento agli elementi finiti sembrano confermare quanto proposto nella nota (1).

Le differenze, peraltro minime, confortano anche la validità dell'esperienza eseguita. Emerge, peraltro una lieve incidenza della torsione non uniforme sui valori sia delle caratteristiche della sollecitazione che dell'angolo di rotazione torsionale.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] V. FRANCIOSI, G. FRUNZIO e M. PASQUINO (1981) - *Il centro di taglio nelle travi a sezione variabile*, « Giornale del Genio Civile », 10-11-12.
- [2] M. PASQUINO (1983) - *Ancora sul centro di taglio nelle travi a sezione variabile*, « Accademia Pontaniana », Napoli.
- [3] G. FRUNZIO e M. PASQUINO - *Il centro di taglio nelle travi a sezione variabile: verifiche sperimentali a conforto di una già formulata proposta teorica*. In corso di pubblicazione su « Costruzioni Metalliche ».
- [4] V. FRANCIOSI (1960) - *Le travi a sezione sottile*. Corso di perfezionamento per le costruzioni in cemento armato, Milano.
- [5] PRZEMIENIECKI J.S. (1968) - *Theory of matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill.
- [6] E. GIANGRECO, M. CAPURSO e M. COMO - *Static and Stability of thin walled elastic beam*, « Scientific Report », A.F. 61 (052)-813.
- [7] A. SOLLAZZO (1964) - *Sulla torsione non uniforme di travi a sezione aperta torsionalmente iperstatiche*, « Giornale del Genio Civile », 4.
- [8] A. RAITHEL (1963) - *La sollecitazione di torsione semplice delle travi a parete sottile*, « Giornale del Genio Civile », 10, ottobre.
- [9] B.Z. VLASSOV (1962) - *Pieces longues en voiles minces*, Eyrolles Paris.