Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Dionigi Galletto, Bruno Barberis

Sulla legge di gravitazione universale. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **76** (1984), n.6, p. 359–366.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1984_8_76_6_359_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1984.

Meccanica. — *Sulla legge di gravitazione universale* (*). Nota I di DIONIGI GALLETTO (**) e BRUNO BARBERIS (**), presentata (***) dal Corrisp. D. GALLETTO.

SUMMARY. — Without making recourse to Newton's law of gravitation and starting from the concept of gravitational force, the concepts of active gravitational mass and of passive gravitational mass are introduced. Furthermore it is proved that they can be identified and that in Newton's law of gravitation the linear dependence on masses necessarily follows from the principle of superposition of simultaneous forces and from Newton's third law of dynamics.

1. Soprattutto in considerazione di quanto verrà esposto nelle Note successive nella presente Nota vengono riprese le considerazioni svolte in [3], approfondendone in particolare certi aspetti, specialmente per quanto concerne il principio di sovrapposizione delle forze simultanee.

Con specifico riferimento alle forze a distanza (forze gravitazionali) che si esercitano tra punti o elementi materiali, va osservato che si possono sempre immaginare esperienze e dispositivi, sia pure soltanto ideali, atti a fornire una valutazione autonoma, ossia indipendente da ogni considerazione dinamica, di dette forze. Tale osservazione e tale modo di procedere si inseriscono nell'indirizzo delineato da Newton nei suoi celebri *Principia*, indirizzo che ha avuto il suo grande interprete in Eulero [6], che è stato seguito da Reech [15], Andrade [1], ecc. e che, nonostante le analisi critiche svolte nei riguardi del concetto di forza da Barré de Saint-Venant [16], Mach [10], Kirchhoff [9], Hertz [7], è stato ripreso in questi ultimi decenni e sviluppato, in un rigoroso contesto fisico-matematico, da Noll [13] e da Truesdell e dalla sua scuola [18].

A fondamento di tutte le deduzioni che vengono qui svolte sta il cosiddetto *principio di sovrapposizione delle forze simultanee*, principio che sostanzialmente afferma che *a più forze che agiscono simultaneamente su un punto o un elemento materiale si può sostituire, a tutti gli effetti, il loro risultante.*

Detto principio, nella sua intima sostanza, esprime tra l'altro che la forza gravitazionale esercitata da un corpo su un punto o un elemento materiale eguaglia il risultante delle forze gravitazionali esercitate su detto punto o elemento

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R.
(**) Istituto di Fisica Matematica «J.-Louis Lagrange», Università di Torino, Via Carlo Alberto 10, 10123 Torino.
(***) Nella seduta del 15 giugno 1984.

dalle varie parti in cui si può immaginare diviso il corpo, purché naturalmente non si alteri la posizione originaria di dette parti. E addirittura, se un punto o elemento materiale risulta dalla « sovrapposizione » di più punti o elementi materiali, la forza gravitazionale esercitata da detto punto o elemento su un altro punto o elemento eguaglia il risultante delle forze gravitazionali esercitate dai singoli punti o elementi che con la loro « sovrapposizione » danno origine ad esso. In altri termini, con quest'ultima precisazione e specificazione, il principio di sovrapposizione delle forze simultanee viene sostanzialmente a includere ciò che si potrebbe denominare un *principio di sovrapposizione delle sorgenti.*

2. Trattando della forza gravitazionale si impone, almeno preliminarmente, come logicamente necessaria la distinzione tra « masse gravitazionali attive » e « masse gravitazionali passive », la cui definizione verrà precisata tramite le considerazioni che seguono (1).

Siano $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ due punti materiali e P_1 e P_2 le loro posizioni rispetto ad un assegnato riferimento, con $P_1 \neq P_2$.

Escludendo la possibilità che la forza gravitazionale che si esercita tra i suddetti due punti possa dipendere esplicitamente dal tempo (ossia che possa variare anche nel caso in cui i due punti materiali si conservino immutati e mantengano immutata la loro distanza) e dal loro eventuale stato di moto (2), la forza $\mathbf{F}_{12}$ esercitata da $\mathscr{P}_1$ su $\mathscr{P}_2$ dipende unicamente da $\mathscr{P}_1$, da $\mathscr{P}_2$ e dalla distanza $|P_1 P_2|$ dei due punti, è diretta, per motivi di simmetria, secondo il vettore $P_1 P_2$ e, secondo quanto indica l'esperienza, ha carattere attrattivo, ossia ha il verso opposto a $\boldsymbol{u}_{12} = P_1 P_2 / |P_1 P_2|$. Si può quindi scrivere, indicando con $f_{\mathscr{P}_1 \mathscr{P}_2}$ il modulo di $\mathbf{F}_{12}$:

$$\mathbf{F}_{12} = -f_{\mathscr{P}_1 \mathscr{P}_2}(|P_1 P_2|)\, \boldsymbol{u}_{12} \,. \tag{1}$$

Supposto che il punto materiale $\mathscr{P}_1$ risulti dalla « sovrapposizione » di n punti materiali $\mathscr{P}_1^l$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ (3), il principio di sovrapposizione delle forze

(1) Tale distinzione compare in [5], § 1 ed è ampiamente richiamata in [8], pp. 128-129. Si veda anche [17], § 1.2; [12], § 8.2; [11], Cap. III, § 3; [4], § 3.2, ecc. Questa distinzione viene però fatta da questi Autori assumendo che la dipendenza delle forze gravitazionali dalle masse sia lineare. Invece nella presente Nota la suddetta dipendenza viene dedotta.

(2) L'ipotesi che la forza gravitazionale possa dipendere oltre che dai punti stessi e dalla loro distanza anche dal loro stato di moto è stata più volte avanzata in passato, in particolare nel secolo scorso, ma senza successo, da parte di autori anche di primo piano come F. Tisserand, J. Bertrand, M. Lévy, ecc., in particolare in connessione con lo studio del comportamento anomalo del perielio di Mercurio nel suo moto attorno al Sole. Per una bibliografia al riguardo si veda [14], Cap. 3, § 5. Un'analoga ipotesi è stata avanzata da Armellini nei suoi studi [2] sul sistema planetario.

(3) Ovviamente, come appunto implica il termine « sovrapposizione » e come già è stato implicitamente ammesso al n. 1, gli n punti materiali $\mathscr{P}_1^l$ vanno intesi occupanti tutti la stessa posizione P_1 di $\mathscr{P}_1$.

simultanee, come già è stato sottolineato al n. 1, comporta, con evidente significato dei simboli:

$$f_{\mathscr{P}_1\mathscr{P}_2}(|P_1P_2|)=\sum_{1}^{n}{}_l\; f^l_{\mathscr{P}_1\mathscr{P}_2}(|P_1P_2|)\,. \tag{2}$$

Ciò premesso, si dirà che due punti materiali $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_1'$ possiedono la stessa « massa gravitazionale attiva » (massa g.a.) se risulta

$$f_{\mathscr{P}_1\mathscr{P}_2}(|P_1P_2|)=f_{\mathscr{P}_1'\mathscr{P}_2}(|P_1P_2|) \tag{3}$$

e si riterrà che la massa g.a. sia un « attributo intrinseco », il che equivale a dire che se l'eguaglianza (3) risulta verificata in corrispondenza alla distanza $|P_1P_2|$ e al punto materiale $\mathscr{P}_2$ assegnati, risulta verificata in corrispondenza ad ogni $|P_1P_2|$ e ad ogni $\mathscr{P}_2$, conformemente a quanto può indicare l'esperienza, almeno a livello locale (4).

Fissato una volta per tutte un punto materiale $\mathscr{P}$ e fatta la posizione

$$f_{\mathscr{P}\mathscr{P}_2}(|P_1P_2|)=f_{\mathscr{P}_2}(|P_1P_2|)\,,$$

non appena si supponga che il punto materiale $\mathscr{P}_1$ risulti dalla sovrapposizione di n punti materiali aventi tutti la massa g.a. uguale a quella di $\mathscr{P}$, da (2) segue

$$f_{\mathscr{P}_1\mathscr{P}_2}(|P_1P_2|)=n\,f_{\mathscr{P}_2}(|P_1P_2|)$$

e l'intero n esprime in tal caso la massa g.a. di $\mathscr{P}_1$, definizione che, per quanto ritenuto sopra, risulta indipendente dal punto $\mathscr{P}_2$ e dalla distanza $|P_1P_2|$ e che ovviamente comporta che sia assunta come unitaria la massa g.a. di $\mathscr{P}$.

Supposto invece che la sovrapposizione di m punti materiali aventi tutti la massa g.a. uguale a quella di $\mathscr{P}_1$ dia luogo a un punto materiale avente la massa g.a. uguale a quella di $\mathscr{P}$, da (2) segue

$$f_{\mathscr{P}_1\mathscr{P}_2}(|P_1P_2|)=\frac{1}{m}\,f_{\mathscr{P}_2}(|P_1P_2|)$$

e la massa g.a. di $\mathscr{P}_1$ è nel presente caso espressa da $1/m$.

Supposto poi che il punto $\mathscr{P}_1$ risulti dalla sovrapposizione di n punti materiali aventi tutti la medesima massa g.a. uguale a $1/m$, dalle considerazioni ora svolte segue subito

$$f_{\mathscr{P}_1\mathscr{P}_2}(|P_1P_2|)=\frac{n}{m}\,f_{\mathscr{P}_2}(|P_1P_2|) \tag{4}$$

e la massa g.a. di $\mathscr{P}_1$ è ora espressa dal numero razionale positivo n/m.

(4) Nel senso che si possono ideare dispositivi atti a verificare il suddetto attributo.

3. Si supponga infine che il punto $\mathscr{P}_1$ non rientri nei casi ora esaminati. In tal caso il rapporto

$$\alpha = \frac{f_{\mathscr{P}_1\mathscr{P}_2}(|P_1 P_2|)}{f_{\mathscr{P}_2}(|P_1 P_2|)}$$

non può essere un numero razionale in quanto, se così fosse, sussisterebbe l'eguaglianza (4) e la massa g.a. di $\mathscr{P}_1$ risulterebbe espressa, contro l'ipotesi, da n/m. Inoltre, a differenza di quanto accade nei casi sino ad ora esaminati, in cui l'indipendenza da $\mathscr{P}_2$ e da $|P_1 P_2|$ segue da quanto è stato ritenuto per la eguaglianza (3), non si può escludere, almeno *a priori*, che detto rapporto possa dipendere da $\mathscr{P}_2$ e da $|P_1 P_2|$: la dimostrazione dell'indipendenza di detto rapporto da $\mathscr{P}_2$ e $|P_1 P_2|$ è stata effettuata in [2], 2 e non viene pertanto qui riportata. Nel presente caso la massa g.a. di $\mathscr{P}_1$ è espressa dal numero irrazionale α.

In conclusione, come conseguenza di quanto è stato ritenuto nei riguardi dell'eguaglianza (3), il rapporto

$$\frac{f_{\mathscr{P}_1\mathscr{P}_2}(|P_1 P_2|)}{f_{\mathscr{P}_2}(|P_1 P_2|)}$$

risulta in ogni caso indipendente da $\mathscr{P}_2$ e da $|P_1 P_2|$ ed esprime la *massa gravitazionale attiva* del punto materiale $\mathscr{P}_1$, non appena si assuma come unitaria la massa g.a. del punto materiale $\mathscr{P}$, fissato una volta per tutte. Essa verrà indicata con $m_1^{(a)}$.

Si ha pertanto

$$f_{\mathscr{P}_1\mathscr{P}_2}(|P_1 P_2|) = m_1^{(a)} f_{\mathscr{P}_2}(|P_1 P_2|)\,, \tag{5}$$

eguaglianza che, sostituita in (1), dà luogo a

$$\mathbf{F}_{12} = - m_1^{(a)} f_{\mathscr{P}_2}(|P_1 P_2|)\, \boldsymbol{u}_{12}\,. \tag{6}$$

È poi ovvio, ed è anzi implicito nelle considerazioni che hanno condotto alla sua definizione, che la massa g.a. gode della proprietà additiva: tenendo conto di (6), l'eguaglianza (2) implica infatti

$$m_1^{(a)} = \sum_{1}^{n}{}_l\, m_1^{l(a)}\,.$$

Le considerazioni ora svolte per $\mathscr{P}_1$, potendosi ripetere immutate per $\mathscr{P}_2$, implicano, analogamente a (6), che per la forza $\mathbf{F}_{21}$ esercitata da $\mathscr{P}_2$ su $\mathscr{P}_1$ risulti

$$\mathbf{F}_{21} = m_2^{(a)} f_{\mathscr{P}_1}(|P_1 P_2|)\, \boldsymbol{u}_{12}\,, \tag{7}$$

con il significato dei simboli evidente.

4. Ricorrendo al terzo principio della dinamica, da (6) e (7) segue

$$m_1^{(a)} f_{\mathscr{P}_2}(|P_1P_2|) = m_2^{(a)} f_{\mathscr{P}_1}(|P_1P_2|),$$

eguaglianza che sussiste in corrispondenza ad ogni $|P_1P_2|$ e da cui, supponendo che il punto $\mathscr{P}_2$ risulti dalla sovrapposizione di n punti materiali $\mathscr{P}_2^l$, si ottiene (si veda [3], 3):

$$f_{\mathscr{P}_2}(|P_1P_2|) = \sum_1^n{}_l \; f_{\mathscr{P}_2^l}(|P_1P_2|), \tag{8}$$

eguaglianza analoga alla (2) ma che, a differenza di quest'ultima che è conseguenza del principio di sovrapposizione delle forze simultanee, è conseguenza del terzo principio della dinamica.

Ciò premesso, si dirà che due punti $\mathscr{P}_2$ e $\mathscr{P}_2'$ possiedono la stessa « massa gravitazionale passiva » (massa g.p.) se risulta

$$f_{\mathscr{P}_2}(|P_1P_2|) = f_{\mathscr{P}_2'}(|P_1P_2|), \tag{9}$$

e anche ora si riterrà che la massa g.p. sia un « attributo intrinseco », il che equivale a dire che se l'eguaglianza (9) risulta verificata in corrispondenza alla distanza $|P_1P_2|$ assegnata, risulta verificata in corrispondenza ad ogni $|P_1P_2|$, conformemente a quanto può indicare l'esperienza, almeno a livello locale(5).

Fissato a questo punto una volta per tutte un punto materiale $\mathscr{P}'$ e fatta la posizione

$$f_{\mathscr{P}'}(|P_1P_2|) = f(|P_1P_2|),$$

ricorrendo a (8) e procedendo in modo ormai ovvio, si perviene alla conclusione che il rapporto

$$\frac{f_{\mathscr{P}_2}(|P_1P_2|)}{f(|P_1P_2|)}$$

è indipendente da $|P_1P_2|$: esso esprime la *massa gravitazionale passiva* del punto materiale $\mathscr{P}_2$, valutata assumendo come unitaria la massa g.p. del fissato punto materiale $\mathscr{P}'$. Essa verrà indicata con $m_2^{(p)}$.

Si ha pertanto

$$f_{\mathscr{P}_2}(|P_1P_2|) = m_2^{(p)} f(|P_1P_2|),$$

eguaglianza che, sostituita in (6) e (7), dà luogo a

$$\mathbf{F}_{12} = -m_1^{(a)} m_2^{(p)} f(|P_1P_2|)\, \boldsymbol{u}_{12} \quad , \quad \mathbf{F}_{21} = m_2^{(a)} m_1^{(p)} f(|P_1P_2|)\, \boldsymbol{u}_{12}. \tag{10}$$

(5) Si veda quanto detto nella nota 4.

5. Dal terzo principio della dinamica e da (10) segue (6)

$$\frac{m_1^{(a)}}{m_1^{(p)}} = \frac{m_2^{(a)}}{m_2^{(p)}} , \tag{11}$$

eguaglianza esprimente che *il rapporto tra la massa gravitazionale attiva e la massa gravitazionale passiva è indipendente dalla scelta dei punti materiali* $\mathscr{P}_1$ *e* $\mathscr{P}_2$.

Tale rapporto si può assumere uguale all'unità – il che equivale ad identificare il punto materiale $\mathscr{P}'$ con il punto materiale $\mathscr{P}$ - con la conseguenza che la massa g.a. e la massa g.p. si vengono così ad identificare per ciascun punto materiale in un'unica massa, la sua *massa gravitazionale*, che verrà indicata con $m^{(g)}$.

Risulta pertanto

$$\mathbf{F}_{12} = - m_1^{(g)} m_2^{(g)} f(|\mathrm{P}_1 \mathrm{P}_2|) \boldsymbol{u}_{12} . \tag{12}$$

Detta eguaglianza esprime che *la forza gravitazionale che si esercita tra due punti materiali dipende linearmente dalle loro masse gravitazionali.* Il modo con cui si è ad essa pervenuti permette di concludere che *tale dipendenza lineare – una volta assunto che la definizione di eguaglianza tra masse g.a. e la definizione di eguaglianza tra masse g.p. hanno carattere intrinseco – risulta essere una conseguenza del principio di sovrapposizione delle forze simultanee e del terzo principio della dinamica.*

6. Supposti per il momento i due punti $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ isolati e indicata con $\boldsymbol{a}_2$ l'accelerazione di $\mathscr{P}_2$ rispetto a un qualsiasi riferimento inerziale, il secondo principio della dinamica esprime che

$$\mathbf{F}_{12} = m_2^{(i)} \boldsymbol{a}_2 ,$$

dove con $m_2^{(i)}$ si è indicata la *massa inerziale* di $\mathscr{P}_2$, la quale, scegliendo come punto materiale «campione» per le masse inerziali lo stesso scelto per le masse gravitazionali e conglobando un eventuale fattore costante nella funzione $f(|\mathrm{P}_1 \mathrm{P}_2|)$ (il che equivale a scegliere in modo opportuno l'unità di misura delle forze gravitazionali, naturalmente nella loro valutazione fatta indipendentemente da considerazioni dinamiche), si può sempre rendere uguale a $m_2^{(g)}$. L'identificazione di $m_2^{(i)}$ con $m_2^{(g)}$ non comporta però affatto l'identificazione di $m_1^{(i)}$ con $m_1^{(g)}$, identificazione che, come è ben noto, può essere legittimata soltanto dall'esperienza.

Assumendo pertanto, come appunto indica l'esperienza, che il rapporto tra massa gravitazionale e massa inerziale sia indipendente dalla scelta dei punti

(6) L'eguaglianza (11) è dedotta anche in [8], pp. 129-130 e in [11], Cap. III, § 3. Da entrambi questi autori essa viene ottenuta però come immediata conseguenza del terzo principio della dinamica e della legge di gravitazione universale. Allo stesso modo in [17], § 1.2 è dedotta un'eguaglianza analoga.

materiali $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ e ponendolo, conformemente al modo di procedere ora indicato, uguale all'unità – identificando così la massa gravitazionale con la massa inerziale –, si deduce, ricordando (12), che la forza gravitazionale esercitata da $\mathscr{P}_1$ su $\mathscr{P}_2$ non può che essere del seguente tipo

$$\mathbf{F}_{12} = - m_1 m_2 f(|P_1 P_2|)\, \boldsymbol{u}_{12}, \tag{13}$$

dove con m_1 e m_2 si sono indicate quelle che ora si possono semplicemente chiamare le *masse* di $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$.

7. Quanto sino ad ora stabilito permette di introdurre il concetto di massa per un corpo qualsiasi (discreto o continuo), intendendo per *massa* di un sistema costituito da un numero finito di punti materiali la somma delle masse dei singoli punti materiali che lo compongono. Nel caso di un mezzo continuo si introduce il concetto di *densità* e si procede poi in modo ovvio.

Facendo ricorso a (13) e ancora al principio di sovrapposizione delle forze simultanee, nel caso di un mezzo continuo e limitato $\mathscr{U}$ si ottiene che il risultante $\boldsymbol{g}(P, t)$, riferito all'unità di massa, delle forze gravitazionali esercitate all'istante t su un qualunque elemento $\mathscr{P}$ di $\mathscr{U}$ dagli altri suoi elementi $\mathscr{Q}$ risulta espresso da

$$\boldsymbol{g}(P, t) = \int_{\mathscr{C}} \mu(Q, t)\, f(|PQ|)\, \frac{PQ}{|PQ|}\, dc, \tag{14}$$

dove con P, Q e $\mathscr{C}$ si sono indicate le posizioni degli elementi $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ e la configurazione assunta da $\mathscr{U}$ nell'istante t e con $\mu(Q, t)$ la sua densità.

Stante il suo significato fisico, la funzione $f(|PQ|)$ risulta ovviamente definita per ogni $P \neq Q$. Inoltre, stante il suo significato fisico, è evidente che l'integrale (14), almeno nell'ipotesi che il mezzo sia tridimensionale – e, più precisamente, che $\mathscr{C}$ sia un dominio –, va ritenuto convergente nel senso usuale del termine.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDRADE J.F.C. (1897) – *Leçons de mécanique physique*, Paris.

[2] ARMELLINI G. (1937–1942) – *I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton. I–IX*, « Atti Accad. Naz. Lincei Rend. », (6), XXVI, pp. 209–215; ecc.

[3] BARBERIS B. e GALLETTO D. (1981) – *Osservazioni sulla legge di gravitazione universale*, Appendice I a: D. Galletto, « Sui fondamenti della meccanica classica, della teoria newtoniana della gravitazione e della cosmologia newtoniana », in: « Atti del 3° Convegno Nazionale di Relatività Generale e Fisica della Gravitazione, Torino, 18-21 settembre 1978 », Accademia delle Scienze, Torino; pp. 143-148.

[4] BERRY M. (1976) – *Principles of cosmology and gravitation*, Cambridge Univ. Press.

[5] BONDI H. (1957) – *Negative Mass in General Relativity*, « Rev. Modern Phys. », *29*, pp. 423-428.

[6] Euler L. (1736) – *Mechanica, sive motus scientia analytice exposita*, Pietroburgo.

[7] Hertz H. (1894) – *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt*, Leipzig.

[8] Jammer M. (1974) – *Storia del concetto di massa nella fisica classica e moderna*, Feltrinelli, Milano.

[9] Kirchhoff G. (1876) – *Vorlesungen über Mathematische Physik. Mechanik*, Leipzig.

[10] Mach E. (1883) – *Die Mechanik in ihrer Entwickelung, historisch-kritisch dargestellt*, Leipzig.

[11] Mavridès S. (1973) – *L'Univers relativiste*, Masson, Paris.

[12] Moller C. (1972) – *The Theory of Relativity*, 2ª ed., Oxford Univ. Press, Delhi.

[13] Noll W. (1959) – *The Foundations of Classical Mechanics in the Light of Recent Advances in Continuum Mechanics*, in: AA.VV., « The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics », North–Holland, Amsterdam; pp. 266–281.

[14] North J.D. (1965) – *The Measure of the Universe : A History of Modern Cosmology*, Clarendon Press, Oxford.

[15] Reech F. (1852) – *Cours de mécanique : d'après la nature généralement fléxible et élastique des corps*, Paris.

[16] Saint–Venant A.–J.–C. B. de (1851) – *Principes de mécanique fondés sur la cinématique*, Paris.

[17] Trautman A. (1965) – *Foundations and Current Problems of General Relativity*, in: « Lectures on General Relativity », Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics, Prentice Hall.

[18] Truesdell C. (1977) – *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, Vol. I, Academic Press, New York.