Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Aldo Ghizzetti

Costruzione di un sistema di polinomi ortonormali a partire da due suoi polinomi consecutivi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **76** (1984), n.6, p. 346–352.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1984_8_76_6_346_0>

Analisi matematica. — *Costruzione di un sistema di polinomi ortonormali a partire da due suoi polinomi consecutivi.* Nota (*) del Corrisp. ALDO GHIZZETTI.

SUMMARY. — The following result is proved: to give two consecutive polynomials $P_n(x)$, $P_{n+1}(x)$ of an orthonormal system is equivalent to assign the first $2n+3$ moments of the Lebesgue-Stieltjes measure associated with the system.

1. INTRODUZIONE

In $(-\infty, +\infty)$ sia definita una funzione $\varphi(x)$ *non decrescente* (e non costante) che abbia finiti tutti i *momenti*

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \, d\varphi(x), \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.1}$$

Allora, nello spazio $L^2_{d\varphi}(-\infty, +\infty)$ si può costruire un sistema $\{P_n(x)\}_{n=0,1,2,\ldots}$ di *polinomi ortonormali*; essi sono dati da (vedi per esempio A. Ghizzetti-A. Ossicini [1]):

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a_{nn}}} \sum_{k=0}^{n} a_{nk} x^k, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.2}$$

ove i coefficienti a_{nk} vanno ricavati dai seguenti sistemi di equazioni lineari

$$\sum_{k=0}^{n} \mu_{h+k} a_{nk} = \delta_{nh}, \qquad (h = 0, 1, \ldots, n). \tag{1.3}$$

Posto

$$\Delta_n = \det(\mu_{h+k})_{h,k=0,1,\ldots,n}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1.4}$$

(*) Presentata nella seduta del 15 giugno 1984.

è ben noto che risulta

$$(1.5)\quad \begin{cases} \Delta_n > 0\,,\ (n = 0\,,1\,,2\,,\ldots)\ \text{se}\ \varphi(x)\ \text{ha infiniti punti di crescenza,} \\ \Delta_n > 0\,,\ (n = 0\,,1\,,\ldots\,,\nu - 1)\,;\ \Delta_n = 0\,,(\mathrm{n} = \nu\,,\nu + 1\,,\ldots)\ \text{se}\ \varphi(x) \\ \text{ha}\ \nu \geq 1\ \text{punti di crescenza.} \end{cases}$$

Perciò, se $\varphi(x)$ ha infiniti punti di crescenza, il sistema (1.3) è risolubile qualunque sia n e la successione di polinomi ortonormali esiste; se invece $\varphi(x)$ ha $\nu \geq 1$ punti di crescenza, il sistema (1.3) è risolubile solo per $n = 0\,,1\,,\ldots\,,\nu - 1$ e la successione consta soltanto di ν polinomi $P_0(x)\,,P_1(x)\,,\ldots\,,P_{\nu-1}(x)$.

Ricordiamo poi che ogni polinomio del sistema ortonormale, di grado ≥ 1, ha tutti gli zeri reali e distinti e che, considerati due polinomi consecutivi $P_n(x)$, $P_{n+1}(x)$, gli zeri del primo separano quelli del secondo.

Ciò premesso, supponiamo dati due polinomi $P_n(x)\,,P_{n+1}(x)$ (con $n \geq 0$), il primo con n zeri reali e distinti, il secondo con $n + 1$ zeri reali e distinti, fra loro separati, onde possiamo scrivere

$$(1.6)\qquad P_n(x) = c_n \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i) \quad , \quad P_{n+1}(x) = c_{n+1} \prod_{i=1}^{n+1} (x - \beta_i) \quad ,$$
$$(c_n > 0\,,\, c_{n+1} > 0)$$

$$(1.7)\qquad \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \beta_3 < \ldots < \beta_n < \alpha_n < \beta_{n+1}\,.$$

Vogliamo esaminare se essi possano essere inseriti in un sistema di polinomi ortonormali relativi ad uno spazio $L^2_{d\varphi}\ (-\infty\,,+\infty)$, con una opportuna scelta della funzione $\varphi(x)$. Vari Autori (vedi per esempio B.F. Logan [2]) hanno dato interessanti esempi di costruzioni di sistemi ortonormali che contengono P_n e P_{n+1}; qui invece vogliamo precisare il grado di inderminazione del problema, dimostrando che *i dati* (1.6), (1.7) *individuano soltanto i primi* $2\,n + 3$ *momenti* $\mu_0\,,\mu_1\,,\ldots\,,\mu_{2n+2}$ *della* $\varphi(x)$, *i quali verificano le*

$$(1.8)\qquad \Delta_0 > 0\,,\ \Delta_1 > 0\,,\ldots\,,\ \Delta_{n+1} > 0\,.$$

2. SISTEMA DI $2\,n + 3$ EQUAZIONI LINEARI NELLE INCOGNITE $\mu_0\,,\mu_1\,,\ldots\,,\mu_{2n+2}$.

Le (1.6) possono anche scriversi

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} P_n(x) &= c_n \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} A_{n-k}\, x^k + x^n\right]\,,\ P_{n+1}(x) = \\ &= c_{n+1} \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1-k} B_{n+1-k}\, x^k + x^{n+1}\right] \end{aligned}$$

ove A_{n-k} designa la somma degli $\binom{n}{k}$ prodotti di $n-k$ numeri scelti fra le radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ di $P_n(x)$ e, analogamente, B_{n+1-k} è la somma di tutti gli $\binom{n+1}{k}$ prodotti di $n+1-k$ numeri scelti fra le radici $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}$ di $P_{n+1}(x)$.

La prima delle (2.1) si identifica con la (1.2) assumendo

$$\frac{a_{nk}}{\sqrt{a_{nn}}} = (-1)^{n-k} c_n A_{n-k}, \ (k=0,1,\ldots,n-1) \quad ; \quad \sqrt{a_{nn}} = c_n$$

ossia

$$a_{nk} = (-1)^{n-k} c_n^2 A_{n-k} \ (k=0,1,\ldots,n-1) \quad ; \quad a_{nn} = c_n^2 ,$$

cosicchè, per la (1.3), la $\varphi(x)$ cercata deve avere dei momenti μ_k tali da verificare il sistema

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} A_{n-k} \mu_{h+k} + \mu_{h+n} = \frac{\delta_{nh}}{c_n^2} , \quad (h=0,1,\ldots,n). \tag{2.2}$$

Analogamente, la seconda delle (2.1) conduce a quest'altro sistema

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1-k} B_{n+1-k} \mu_{h+k} + \mu_{h+n+1} = \frac{\delta_{n+1,h}}{c_{n+1}^2} , \ (h=0,1,\ldots,n+1). \tag{2.3}$$

Le (2.2), (2.3) *forniscono il cercato sistema di* $2n+3$ *equazioni lineari nelle incognite* $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{2n+1}, \mu_{2n+2}$, per il quale vogliamo dimostrare che *ammette una e una sola soluzione.*

Per evitare la scrittura di formule molto ingombranti, esporremo la dimostrazione supponendo $n=3$; riuscirà però evidente che il ragionamento è valido qualunque sia n.

Per $n=3$ il sistema (2.2), (2.3) si scrive

$$\begin{aligned}
-A_3\mu_0 + A_2\mu_1 - A_1\mu_2 + \mu_3 &= 0 ,\\
-A_3\mu_1 + A_2\mu_2 - A_1\mu_3 + \mu_4 &= 0 ,\\
-A_3\mu_2 + A_2\mu_3 - A_1\mu_4 + \mu_5 &= 0 ,\\
-A_3\mu_3 + A_2\mu_4 - A_1\mu_5 + \mu_6 &= 1/c_3^2 ,\\
B_4\mu_0 - B_3\mu_1 + B_2\mu_2 - B_1\mu_3 + \mu_4 &= 0 ,\\
B_4\mu_1 - B_3\mu_2 + B_2\mu_3 - B_1\mu_4 + \mu_5 &= 0 ,\\
B_4\mu_2 - B_3\mu_3 + B_2\mu_4 - B_1\mu_5 + \mu_6 &= 0 ,\\
B_4\mu_3 - B_3\mu_4 + B_2\mu_5 - B_1\mu_6 + \mu_7 &= 0 ,\\
B_4\mu_4 - B_3\mu_5 + B_2\mu_6 - B_1\mu_7 + \mu_8 &= 1/c_4^2 ,
\end{aligned}$$

ma è chiaro che basta considerare le prime sette equazioni e provare che esse ammettono una e una sola soluzione $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_6)$, perchè poi si ricaverà univocamente μ_7 dalla penultima equazione e μ_8 dall'ultima. Si deve perciò provare che risulta

$$(2.4)\quad D_3 = \begin{vmatrix} -A_3 & A_2 & -A_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_3 & A_2 & -A_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_3 & A_2 & -A_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_3 & A_2 & -A_1 & 1 \\ B_4 & -B_3 & B_2 & -B_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & -B_3 & B_2 & -B_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & B_4 & -B_3 & B_2 & -B_1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Ricordando il significato di A_1, A_2, A_3 ; B_1, B_2, B_3, B_4, si vede che D_3 è un polinomio in $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, simmetrico rispetto alle α_i e rispetto alle β_j, di grado 12 rispetto alle tre α_i e rispetto alle quattro β_j, di grado 4 rispetto a ciascuna α_i e 3 rispetto a ciascuna β_j (1) .

Osserviamo ora che se alla prima colonna di D_3 si sommano la seconda, terza, ..., settima colonna rispettivamente moltiplicate per $\alpha_1, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_1^6$ e si tien conto che

$$-A_3 + \alpha_1 A_2 - \alpha_1^2 A_1 + \alpha_1^3 = 0 ,$$

$$B_4 - \alpha_1 B_3 + \alpha_1^2 B_2 - \alpha_1^3 B_1 + \alpha_1^4 = (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \beta_3)(\alpha_1 - \beta_4)$$

si ottiene

$$(2.5)\quad \frac{D_3}{(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)(\alpha_1-\beta_3)(\alpha_1-\beta_4)} = \begin{vmatrix} 0 & A_2 & -A_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_3 & A_2 & -A_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_3 & A_2 & -A_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_3 & A_2 & -A_1 & 1 \\ 1 & -B_3 & B_2 & -B_1 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & B_4 & -B_3 & B_2 & -B_1 & 1 & 0 \\ \alpha_1^2 & 0 & B_4 & -B_3 & B_2 & -B_1 & 1 \end{vmatrix} .$$

Ricordando che in D_3 la α_1 figura al massimo al 4^0 grado, si deduce che il determinante scritto a secondo membro di (2.5) è indipendente da α_1. D'altra parte D_3 è un polinomio simmetrico in $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e quindi, oltre al fattore $\prod_{j=1}^{4} (\alpha_1 - \beta_j)$ indicato in (2.5), deve pure contenere i due fattori $\prod_{j=i}^{4} (\alpha_2 - \beta_j)$, $\prod_{j=1}^{4} (\alpha_3 - \beta_j)$. Si può pertanto scrivere

$$D_3 = c \prod_{i=1}^{3} \prod_{j=1}^{4} (\alpha_i - \beta_j) , \qquad \text{(con } c \text{ costante)}$$

(1) Basta osservare che i termini di grado più alto provengono dal prodotto degli elementi delle due diagonali di (2,4) che contengono gli A_3 ed i B_4 .

ed infine, poichè $\alpha_1^4\ \alpha_2^4\ \alpha_3^4$ proviene soltanto dal prodotto degli elementi della diagonale principale di D_3, dedurre che $c = 1$.

Si conclude pertanto con la formula

$$D_3 = \prod_{i=1}^{3} \prod_{j=1}^{4} (\alpha_i - \beta_j) . \tag{2.6}$$

In generale, per n qualsiasi, si ha

$$D_n = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n+1} (\alpha_i - \beta_j) , \qquad (n = 0 , 1 , 2 , \ldots)^{(2)} \tag{2.7}$$

e perciò, ricordando la (1.7) si vede che $D_n \neq 0$; anzi è facile vedere che risulta $\operatorname{sgn} D_n = (-1)^{\binom{n+1}{2}}$.

3. Espressione della soluzione unica del sistema (2.2), (2.3)

Vogliamo ora verificare che, introdotti i numeri *positivi*(3)

$$\gamma_r = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_r) \prod_{j=1}^{n+1}{}^{(r)} (\beta_j - \beta_r) , \qquad (r = 1 , 2 , \ldots , n + 1) , \tag{3.1}$$

la soluzione unica del sistema (2.2), (2.3) è data da

$$\mu_k = \frac{1}{c_n^2} \sum_{r=1}^{n+1} \frac{\beta_r^k}{\gamma_r} + \frac{\delta_{k,2n+2}}{c_{n+1}^2} , \qquad (k = 0 , 1 , \ldots , 2n + 2) . \tag{3.2}$$

Infatti, sostituendo (3.2) in (2.2) (ove figurano soltanto $\mu_0 , \mu_1 , \ldots , \mu_{2n}$) si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} A_{n-k}\, \mu_{h+k} + \mu_{h+n} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} A_{n-k} \frac{1}{c_n^2} \sum_{r=1}^{u+1} \frac{\beta_r^{h+k}}{\gamma_r} + \frac{1}{c_n^2} \sum_{r=1}^{n+1} \frac{\beta_r^{h+n}}{\gamma_r} =$$

$$= \frac{1}{c_n^2} \sum_{r=1}^{n+1} \frac{\beta_r^h}{\gamma_r} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} A_{n-k}\, \beta_r^k + \beta_r^n \right\} , \qquad (h = 0 , 1 , \ldots , n);$$

(2) Nel caso $n = 0$ (in cui non ci sono punti α_i) si vede subito che $D_0 = 1$ e che la soluzione del sistema (2.2), (2.3) è $\mu_0 = 1/c_0^2$, $\mu_1 = \beta_1/c_0^2$, $\mu_2 = \beta_1^2/c_0^2 + 1/c_1^2$ con $\Delta_0 = 1/c_0^2$, $\Delta_1 = 1/c_0^2\, c_1^2 > 0$.

(3) Per la (1.7) i due prodotti a secondo membro di (3.1) hanno entrambi $r - 1$ fattori negativi. Il simbolo $\prod_{j=1}^{n+1}{}^{(r)}$ significa che nel prodotto occorre escludere il fattore con $j = r$.

ma il polinomio, di grado n, in β_r che figura fra $\{\ \}$ ha le radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ e quindi, esprimendo anche γ_r con la (3.1), il calcolo precedente può essere proseguito come segue:

$$= \frac{1}{c_n^2} \sum_{r=1}^{n+1} \frac{\beta_r^h \prod_{i=1}^{n} (\beta_r - \alpha_i)}{\prod_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_r) \prod_{j=1}^{n+1}{}^{(r)} (\beta_j - \beta_r)} = \frac{1}{c_n^2} \sum_{r=1}^{n+1} \frac{(-1)^n \beta_r^h}{\prod_{j=1}^{n+1}{}^{(r)} (\beta_j - \beta_r)} = \frac{1}{c_n^2} \sum_{r=1}^{n+1} \frac{\beta_r^h}{\prod_{j=1}^{n+1}{}^{(r)} (\beta_r - \beta_j)} .$$

I termini di questa ultima somma non sono altro che i residui relativi ai poli $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}$ della funzione razionale $f(z) = z^h / \prod_{j=1}^{n+1} (z - \beta_j)$; questa ha poi il residuo relativo a $z = \infty$ uguale a 0 se $h = 0, 1, \ldots, n-1$, uguale a -1 se $h = n$. Siccome la somma di tutti questi residui vale 0, possiamo concludere che si ha

$$\sum_{h=0}^{n-1} (-1)^{n-k} A_{n-k} \mu_{h+k} + \mu_{h+n} = \frac{\delta_{nh}}{c_n^2} , \qquad (h = 0, 1, \ldots, n)$$

ossia che sussiste la (2.2).

Analogamente, sostituendo (3.2) in (2.3), si ottiene (tenendo conto che per $k \leq n$ si ha $h + k \leq 2n + 1$):

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1-k} B_{n+1-k} \mu_{h+k} + \mu_{h+n+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1-k} B_{n+1-k} \frac{1}{c_n^2} \sum_{r=1}^{n+1} \frac{\beta_r^{h+k}}{\gamma_r} +$$

$$+ \frac{1}{c_n^2} \sum_{r=1}^{n+1} \frac{\beta_r^{h+n+1}}{\gamma_r} + \frac{\delta_{h+n+1,2n+2}}{c_{n+1}^2} = \frac{1}{c_n^2} \sum_{r=1}^{n+1} \frac{\beta_r^h}{\gamma_r} \left\{ \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1-k} B_{n+1-k} \beta_r^k + \beta_r^{n+1} \right\} +$$

$$+ \frac{\delta_{h,n+1}}{c_{n+1}^2} , \qquad (h = 0, 1, \ldots, n+1);$$

ma è evidente che, qualunque sia r, l'espressione fra $\{\ \}$ vale zero e quindi rimane

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1-k} B_{n+1-k} \mu_{h+k} + \mu_{h+n+1} = \frac{\delta_{h,n+1}}{c_{n+1}^2} , \qquad (h = 0, 1, \ldots, n+1)$$

cioè la (2.3).

4. POSITIVITÀ DEI DETERMINANTI Δ_k $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$ RELATIVI AI MOMENTI $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{2n+2}$ DIANZI DETERMINATI

Per provare la $\Delta_k > 0$, basta far vedere che la forma quadratica

$$(4.1) \qquad Q(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{h=0}^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} \mu_{h+k} x_h x_k$$

è definita positiva. Infatti, tenendo conto della (3.2), si ha

$$Q(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{h=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}\left(\frac{1}{c_n^2}\sum_{r=1}^{n+1}\frac{\beta_r^{h+k}}{\gamma_r} + \frac{\delta_{h+k,2n+2}}{c_{n+1}^2}\right) x_h x_k =$$

$$= \frac{1}{c_n^2}\sum_{=1}^{n+1}\frac{1}{\gamma_r}\sum_{h=0}^{n+1}\beta_r^h x_h \sum_{k=0}^{n+1}\beta_r^k x_k + \frac{1}{c_{n+1}^2} x_{n+1}^2 =$$

$$= \frac{1}{c_n^2}\sum_{r=1}^{n+1}\frac{1}{\gamma_r}\left(\sum_{h=0}^{n+1}\beta_r^h x_h\right)^2 + \frac{1}{c_{n+1}^2} x_{n+1}^2 .$$

Poichè i γ_r sono numeri positivi, si ha $Q(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) \geq 0$, il segno $=$ potendo valere solo se $\sum_{h=0}^{n+1} \beta_r^h x_h = 0$, $(r = 1, 2, \ldots, n+1)$; $x_{n+1} = 0$ ossia

$$\sum_{h=0}^{n} \beta_r^h x_h = 0, \ (r = 1, 2, \ldots, n+1), \ x_{n+1} = 0; \tag{4.2}$$

ma il determinante dei coefficienti del sistema in $x_0, x_1, \ldots, x_n$ che qui figura è quello di Vandermonde dei numeri distinti $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}$ e perciò da (4,2) segue $x_0 = x_1 = — = x_n = x_{n+1} = 0$; ciò prova che Q è effettivamente definita positiva.

Bibliografia

[1] A. Ghizzetti e A. Ossicini – *Polinomi ortogonali e problema dei momenti*. Pubblicazione serie III, n. 202 dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo « Mauro Picone » del Consiglio Nazionale delle Ricerche, p. 43.

[2] B.F. Logan – *Note on construction of weight functions*, « Siam J. Math. Anal. », *10* (4), July 1979, 752-756.