Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Juan Morales Rodriguez

## Sopra alcune classi di gruppi minimali non-P

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **76** (1984), n.6, p. 334–338.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1984_8_76_6_334_0>

**Teoria dei gruppi.** — *Sopra alcune classi di gruppi minimali non–*P.(*)
Nota di JUAN MORALES RODRIGUEZ (**), presentata (***) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this paper we study finite non abelian groups in which every proper normal subgroup and every proper epimorphic image is abelian. Also we study finite non nilpotent groups in which every normal subgroup and every proper epimorphic image is nilpotent and those finite soluble non nilpotent groups in which every proper normal subgroup is nilpotent.

In [1] si sono ottenuti i seguenti risultati:

TEOREMA 1. *Sia* G *un gruppo finito risolubile. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

*a*) *a*.1 G *non è abeliano,*
*a*.2 *Ogni sottogruppo normale proprio di* G *è abeliano,*
*a*.3 G *ha almeno due sottogruppi normali massimali;*

*b*) *b*.1 G *è un p–gruppo,*
*b*.2 $G/Z(G)$ *è abeliano elementare d'ordine* $p^2$,
*b*.3 $\phi(G) = Z(G)$.

TEOREMA 2. *Sia* G *un gruppo finito risolubile. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

*a*) *a*.1 G *non è abeliano,*
*a*.2 *Ogni sottogruppo normale proprio di* G *è abeliano,*
*a*.3 G *ha un solo sottogruppo normale massimale;*

*b*) *b*.1 G *è prodotto semidiretto di un p'–gruppo abeliano* M *con un p–gruppo ciclico* H (*p–primo*), $M = G'$,
*b*.2 *Se h è un generatore di* H, *h induce in* M *un automorfismo d'ordine p che non lascia fermo nessun elemento* $\neq 1$ *di* $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ *ove* $|M| = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \ldots p_s^{t_s}$ *e* $M_{p_i}$ *é la* $p_i$*–componente primaria di* M.

(*) Ricerca eseguita con aiuto economico parziale del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnologia de Mexico.

(**) Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autonoma de Mexico, Mexico.

(***) Nella seduta del 15 giugno 1984.

Una conseguenza immediata della dimostrazione di questo teorema è il seguente risultato:

LEMMA A. *Se* G *è un gruppo finito risolubile non abeliano a sottogruppi normali propri tutti abeliani e se* G *ha un solo sottogruppo normale massimale* N, *allora* G *è prodotto semidiretto di un* $p'$*–gruppo abeliano* M *che coincide con* $G'$ *per un* $p$*–gruppo ciclico* H ($p$*–primo*), *e* $N = G' \times H^p$; *inoltre* $H^p \subset Z(G)$ *e* $[G : N] = p$.

Come conseguenza immediata del Teorema 2 di [1] e del lemma precedente si ha il seguente risultato:

TEOREMA I. *Se* G *è un gruppo finito risolubile, allora le condizioni* a) *e* b) *del Teorema* 2 *di* [1] *e la seguente condizione* c) *sono equivalenti:*

*c*) G *ha due sottogruppi* N *e* H *tale che:*
- *c*.1 $N = G' \times H^p$ *è l'unico sottogruppo normale massimale di* G *con* $H^p \subset Z(G)$,
- *c*.2 $G'$ *è un* $p'$*–gruppo abeliano non banale,*
- *c*.3 $[G : N] = p$.

Per il Teorema 2 di [1] e per il Lemma A, basta provare che *c*) implica *a*). Da *c*.2 segue che G non è abeliano. Sia R normale in G; è $R < N$ perchè N è l'unico sottogruppo normale massimale di G; essendo $N = G' \times H^p$ abeliano, R è abeliano.

TEOREMA II. *Sia* G *un gruppo finito. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

*a*)
- *a*.1 G *non è abeliano,*
- *a*.2 *Ogni sottogruppo normale proprio di* G *è abeliano,*
- *a*.3 *Ogni quoziente proprio di* G *è abeliano,*
- *a*.4 G *ha almeno due sottogruppi normali massimali;*

*b*)
- *b*.1 G *è un* $p$*–gruppo,*
- *b*.2 $G/Z(G)$ *è abeliano elementare d'ordine* $p^2$,
- *b*.3 $Z(G) = \phi(G)$,
- *b*.4 $G'$ *è l'unico sottogruppo normale minimale di* G.

*Dimostrazione. a*) implica *b*). Per il Teorema 1 di [1], basta provare b.4. Sia $\{1\} \neq N \underset{\neq}{\lhd} G$; allora $G/N$ è abeliano e $G' < N$. $G' \neq 1$ perchè G non è abeliano, quindi $G'$ è l'unico sottogruppo normale minimale di G.

*b*) implica *a*). Per il Teorema 1 di [1], basta provare *a*.3. Sia $\{1\} \neq \neq N \underset{\neq}{\lhd} G$, allora $G' < N$ e $G/N$ è abeliano.

*Osservazione.* Con le ipotesi del Teorema precedente $Z(G)$ risulta ciclico. Infatti ogni sottogruppo minimale di $Z(G)$ è normale minimale in G; e $Z(G)$ essendo un gruppo abeliano con solo un sottogruppo minimale, è ciclico.

LEMMA B. *Sia* G *un gruppo finito non nilpotente tale che per ogni* $\langle 1 \rangle \neq \neq H \underset{\neq}{\triangleleft} G$, *si ha che* H *e* G/H *sono nilpotenti. Allora:*

(i) *Ogni sottogruppo normale proprio di* G *è abeliano,*

(ii) *Ogni quoziente proprio di* G *è abeliano.*

*Dimostrazione di (i).* Sia F (G) il sottogruppo di Fitting di G, se $(F(G))' \neq \neq \langle 1 \rangle$ si ha che F (G) e $G/(F(G))'$ sono nilpotenti e per il criterio di P. Hall (cfr. [2], pag. 129), G è nilpotente contro l'ipotesi, quindi $(F(G))' = \langle 1 \rangle$ e F (G) è abeliano. Di conseguenza ogni sottogruppo normale proprio di G, essendo nilpotente, è incluso in F (G) e quindi è abeliano.

*Dimostrazione di (ii).* Sia G/H un quoziente proprio di G, distinguiamo due casi:

*a)* G/H non sia un $p$-gruppo. Allora sia S/H un $p$-sottogruppo di Sylow di G/H. Essendo G/H nilpotente, S/H è normale in G/H e S è normale in G, ed essendo $S/H \neq G/H$, quindi $S \neq G$, per (i) S è abeliano, e S/H è abeliano, pertanto G/H è abeliano.

*b)* G/H sia un $p$-gruppo. Allora G/H ha un solo sottogruppo massimale perchè al rimenti G avrebbe due sottogruppi normali massimali nilpotenti e sarebbe nilpotente contro l'ipotesi. Pertanto G/H, avendo un solo sottogruppo massimale, è ciclico, quindi abeliano.

TEOREMA III. *Sia* G *un gruppo finito non semplice. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

*a)* *a*.1 G *non è abeliano,*
*a*.2 *Ogni sottogruppo normale proprio di* G *è abeliano,*
*a*.3 *Ogni quoziente proprio di* G *è abeliano,*
*a*.4 G *ha un solo sottogruppo normale massimale;*

*b)* *b*.1 G' *è l'unico sottogruppo normale proprio di* G,
*b*.2 G' *è un q-gruppo abeliano elementare (q-primo),*
*b*.3 $[G : G'] = p$ *($p$-primo* $p \neq q$*);*

*c)* *c*.1 G *è prodotto semidiretto di un q-gruppo abeliano elementare* $M = G'$ *non banale con un p-gruppo ciclico* H *d'ordine* $p$, $p$, $q$ *primi,* $p \neq q$,
*c*.2 *Se h è un generatore di* H, *h induce in* M *un automorfismo d'ordine p che non lascia fermo nessun elemento* $\neq 1$ *di* M,
*c*.3 G' *è l'unico sottogruppo normale minimale di* G;

*d)* *d*.1 G *è risolubile non abeliano,*
*d*.2 G *ha un solo sottogruppo normale proprio;*

*e)* *e*.1 G *non è abeliano,*
*e*.2 *Ogni sottogruppo proprio di* G *è abeliano,*

*e*.3 *Ogni quoziente proprio di* G *è abeliano,*
*e*.4 G *ha un solo sottogruppo normale massimale;*

*f*) *f*.1 G *non è nilpotente,*
*f*.2 *Ogni sottogruppo normale proprio di* G *è nilpotente,*
*f*.3 *Ogni quoziente proprio di* G *è nilpotente;*

*g*) *g*.1 G *non è nilpotente.*
*g*.2 *Ogni sottogruppo proprio di* G *è nilpotente,*
*g*.3 *Ogni quoziente proprio di* G *è nilpotente.*

Per la dimostrazione seguiremo il seguente diagramma:

$$g \overset{7\ 8}{\Leftrightarrow} f \overset{5\ 6}{\Leftrightarrow} a \overset{1}{\Rightarrow} b \overset{2}{\Rightarrow} d \overset{3}{\Rightarrow} e \overset{4}{\Rightarrow} a \overset{10\ 9}{\Leftrightarrow} c$$

1. *a*) implica *b*). Per il Teorema I, basta provare che $H^p = \langle 1 \rangle$, che $G'$ è un $q$–gruppo abeliano elementare e che $G'$ è l'unico sottogruppo normale minimale di G.

Se $H^p \neq \langle 1 \rangle$, essendo $H^p < Z(G)$, allora $H^p \lhd G$ e $G/H^p$ è abeliano, segue che $G' < H^p$, il che è assurdo perchè $G'$ è un $p'$–gruppo e $H^p$ un $p$–gruppo.

Sia $N \lhd \min G$; allora $G/N$ è abeliano, $G' < N$ e pertanto $G' = N$ è l'unico sottogruppo normale minimale di G. Poichè G è risolubile e $G' \lhd \min G$, segue che $G'$ è abeliano elementare d'ordine $q^s$, ($q$ primo, $q \neq p$).

2. *b*) implica *d*) è immediato.

3. *d*) implica *e*). Poichè G è risolubile non abeliano con un solo sottogruppo normale proprio, questo sottogruppo è precisamente $G'$ e necessariamente $G'$ è abeliano e $[G : G'] = p$, $p$–primo. Basta provare che ogni sottogruppo massimale è abeliano.

Sia $S < \max G$; se $S = G'$, S è abeliano. Supponiamo che $S \neq G'$; allora $G = G'S$ e poichè $G' \cap S \lhd G'$, $G' \cap S \lhd S$, allora $G' \cap S \lhd G'S = G$; pertanto $G' \cap S = \langle 1 \rangle$ perchè $G'$ è l'unico sottogruppo normale proprio di G, quindi $G/G' = SG'/G' \cong S$ è ciclico.

4. *e*) implica *a*) è immediato.

5. *a*) implica *f*). Per ipotesi G ha un solo sottogruppo normale massimale, onde, se fosse nilpotente, avrebbe un solo sottogruppo massimale, e quindi sarebbe ciclico, cioè abeliano contro l'ipotesi.

6. *f*) implica *a*) per il Lemma B.

7. *f*) implica *g*) è immediato visto che *f*) implica *e*) e che *f*) ed *e*) insieme implicano *g*).

8. *g*) implica *f*) è immediato.

9. *a*) implica *c*). Visto che *a*) implica *b*), pel Teorema 2 di [1] è immediato che *a*) implica *c*).

10. $c$) implica $a$) è immediato pel Teorema 2 di [1].

TEOREMA IV. *Sia* G *un gruppo risolubile. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

$a$) $a.1$ G *non è nilpotente.*
$a.2$ *Ogni sottogruppo normale proprio di* G *è nilpotente;*

$b$) $b.1$ G *è prodotto semidiretto di un* $p'$*-gruppo nilpotente* M *coincidente con* $G'$ *per un* $p$*-gruppo ciclico* H ($p$*-primo*),
$b.2$ $F(G) = G' \times H^p$ *è l'unico sottogruppo normale massimale di* G, *ove* F (G) *è il sottogruppo di Fitting di* G.

*Dimostrazione.* $a$) implica $b$). Sia F (G) il sottogruppo di Fitting di G; poichè G, essendo risolubile, ha un sottogruppo normale di indice primo $p$, necessariamente nilpotente per ipotesi, e quindi incluso in F (G), è $[G : F(G)] = p$. Essendo nilpotente, F (G) contiene un $p'$-sottogruppo di Hall M il quale è caratteristico in F (G) e quindi normale in G. G/M ha un solo sottogruppo normale massimale perchè altrimenti G sarebbe nilpotente. Essendo G/M un $p$-gruppo, G/M è ciclico e quindi $G' < M$. $G/G'$ è abeliano con un solo sottogruppo massimale, quindi $G/G'$ è un $p$-gruppo ciclico, pertanto $M < G'$ e $M = G'$, cioè G è prodotto semidiretto di $G'$, $p'$-gruppo, per un $p$-gruppo ciclico H. Essendo $[G : F(G)] = p$ si ha $H^p < F(G)$ e $F(G) = G' \times H^p$.

$b$) implica $a$) è immediato.

## BIBLIOGRAFIA


[1] MORALES JUAN (1983) – *Sui gruppi finiti non abeliani a sottogruppi normali propri abeliani*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *74*, 216–222.

[2] ROBINSON D. (1980) – *A course in the theory of Groups*, Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin.