Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Zampieri

Résolubilité Gevrey d'opérateurs différentiels à coefficients constants

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **76** (1984), n.4, p. 243–246.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1984_8_76_4_243_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1984.

Equazioni a derivate parziali. — *Résolubilité Gevrey d'opérateurs différentiels à coefficients constants.* Nota di GIUSEPPE ZAMPIERI, presentata (*) dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

RIASSUNTO. — Si discute l'esistenza di soluzioni $\Gamma^{(d)}$, su insiemi aperti $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, per equazioni differenziali iperbolico-ipoellittiche. Si dà una caratterizzazione geometrica quasi completa per aperti $\Omega \subset \mathbf{R}^2$.

On présente quelques résultats sur l'existence de solutions de classe $\Gamma^{(d)}$, sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, d'équations de type hyperbolique-hypoelliptique; le cas $n = 2$ jouera un rôle spéciale. Les démonstrations complètes seront données dans un travail prochain.

Avec $\Gamma^{(d)}(\Omega)$ (resp. $\gamma^{(d)}(\Omega)$), $1 \leq d \leq \infty$, on dénotera l'éspace de Gevrey des $u \in C^\infty(\Omega)$ telles que $\forall K \Subset \Omega$ il existe des constantes c_1, c_2 (resp. $\forall K$ et $\forall c_2$ il existe c_1) par lesquelles l'inégalité: $|D^\alpha u(x)| \leq c_1 c_2^{|\alpha|} |\alpha|!^d$, $x \in K$, est satisfaite pour tout multiindice α.

Un opérateur différentiel $P = P(D)$ sur $\mathbf{R}^n$ sera dit (ρ –) hyperbolique–(σ –) hypoelliptique, (–elliptique si $\sigma = 1$), $1 \leq \sigma < \rho$, pour le (co)vecteur $\vartheta \in S^{n-1}$ (= sphère réelle n–1–dimensionnelle), s'il a une solution fondamentale en $\gamma_0^{(\rho)\prime}$ dont le $\Gamma^{(\sigma)}$–support singulier est contenu, à l'exception de l'origine, $< x, \vartheta > \, > 0$ dans le demi–éspace $< x, \vartheta > \, > 0$.

Cette proprieté se caractérise par ce qui suit; pour un voisinage $\Delta \ni \vartheta$ en S^{n-1} et pour certaines c_1, c_2:

(1) $$\xi, t \text{ réels}, \eta \in \Delta, \; c_1 |\xi|^{1/\rho} < t < c_2 |\xi|^{1/\sigma} \Rightarrow P(\xi - it\eta) \neq 0 .$$

Quand $\sigma = 1$, la seule condition sur la forme caractéristique P_m :

(2) $$\xi, t \text{ réels}, \; 0 < t < c|\xi| \Rightarrow P_m(\xi - it\vartheta) \neq 0 ,$$

entraîne (1) pour quelque $\Delta \ni \vartheta$ et pour quelque $\rho \geq \dfrac{p}{p-1}$ où p est la plus grande multiplicité des caractéristiques de P_m (et bien plus $\rho = \infty$ si $P \prec P_m$). (Et d'autre côté on a, $\forall \rho$, l'implication opposée.)

(*) Nella seduta del 14 aprile 1984.

En tout cas on appellera cône de propagation $\Gamma^{(\sigma)}$–singulière le cone dual Γ^* du plus grand voisinage connexe $\Gamma \ni \vartheta$ tel que, $\forall \Delta \Subset \Gamma$, (1) soit satisfaite.

LEMME 1. *Soit* P $(\rho-)$*hyperbolique*–$(\sigma-)$*hypoelliptique pour* $\pm \vartheta = (0, \ldots, \pm 1)$ *et soit* $P_m(\vartheta) \neq 0$. *Alors pour tout* $\varphi \in \Gamma_0^{(d)}(\mathbf{R}^n)$, $(\sigma < d < \rho)$, *il existe* $w \in \Gamma_P^{(\sigma)}(\{x_n \neq 0\})$ (= *solutions* $\Gamma^{(\sigma)}$ *de l'équation homogène*), *unique modulo* $\Gamma_P^{(\sigma)}(\mathbf{R}^n)|_{x_n>0} \oplus \Gamma_P^{(\sigma)}(\mathbf{R}^n)|_{x_n<0}$, *tel que le problème de Cauchy*

$$(3)\quad P(D)\, u = 0\ ;\ D_n^j u|_{x_n=0} - [D_n^j w|_{x_n=0^+} + D_n^j w|_{x_n=0^-} + D_n^j \varphi|_{x_n=0}] = 0\ \forall\, 0 \leq j < m$$

a une solution $u \in \Gamma^{(d)}(\mathbf{R}^n)$.

Démonstration. Pour chaque $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$, $|\xi'| > M$ grand, considérons trois courbes Γ_h, $h = 0, 1, 2$, du plane complexe ζ_n, situées resp. dans les bandes $|\operatorname{Im} \zeta_n| < c_1 |\xi'|^{1/\rho}$, $\operatorname{Im} \zeta_n > c_2 |\xi'|^{1/\sigma}$, $\operatorname{Im} \zeta_n < -c_2 |\xi'|^{1/\sigma}$, et entourant toute racine de $P(\xi', \zeta_n) \left(= \sum_{j=0}^{m} a_j(\xi')\, \zeta_n^{m-j}\right) = 0$. Si l'on pose $C_h = \{\zeta = (\xi', \zeta_n) : \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}, |\xi'| > M, \zeta_n \in \Gamma_h\}$ il en suit que les intégrales

$$u_h(x) = (2\pi i)^{-n} \sum_{0 \leq j \leq k \leq m-1} \int_{C_h} e^{ix\zeta}\, D_n^{m-1-k} \hat{\varphi}'(\xi', x_n)|_{x_n=0}\, a_j(\zeta')\, \zeta_n^{k-j}/P(\zeta)\, d\zeta\,,$$

convergent absolument dans les régions $h(-1)^h x_n \leq 0$, en définissant ainsi des sections de $\Gamma_P^{(d)}$, (de $\Gamma_P^{(\sigma)}$ pour $h = 1, 2$), sur l'intérieur de telles régions. En posant: $u = u_0$; $w = -u_1$ pour $x_n > 0$, $w = -u_2$ pour $x_n < 0$, on reconnaît que les secondes équations de (3) sont satisfaites, modulo des fonctions entières définies par les intègrales de $e^{ix'\xi'} D_n^j \hat{\varphi}'(\xi', x_n)|_{x_n=0}$ sur le compact $|\xi'| \leq M$. Pour effacer ces dernières fonctions il suffit de résoudre le problème de Cauchy non-caractéristique à données analytiques.

On note enfin que l'unicité de w n'est autre chose que la propagation de la régularité $\Gamma^{(\sigma)}$ liée à l'existence présupposée de « bonnes » solutions fondamentales.

Gardons les hypothèses du lemme et considérons les cônes de propagation $\Gamma_\pm^* \subset \{\pm x_n > 0\} \cup \{0\}$. Soit $f \in \Gamma^{(d)}(\Omega)$, avec $\sigma < d < \rho$, et

$$\Omega_\nu = \{x \in \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{\nu}\,,\ |x'| < c\, 2\nu,\ |x_n| < 2\nu \text{ avec } \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \min_{x \in \Gamma_+^* \setminus \{0\}} \frac{|x_n|}{|x'|}\Big\}, \nu = 1, 2, \ldots\ ;$$

il est évidemment possible de trouver des solutions $v_\nu \in \Gamma_0^{(d)}(\mathbf{R}^n)$ de l'équation

$P(D)\,u = f$ sur Ω_ν. En posant $u_{\nu+1} = v_{\nu+1} - u'_{\nu+1}$ où $u'_1 = 0$et $u'_{\nu+1}$, $\nu \geq 1$, sont des solutions récourrentes du problème (3) par données de Cauchy sur l'hyperplan $x_n = -\nu$ et par $\varphi = -u_\nu \chi_\nu + v_{\nu+1}$, ($\chi_\nu \in \Gamma_P^{(\sigma)}(\mathbf{R}^n)$, $\chi_\nu = 1$ sur Ω_ν), on reconnaît que $u_{\nu+1} - u_\nu \in \Gamma_P^{(\sigma)}(\Omega'_\nu)$ où Ω'_ν est l'ouvert des $x \in \Omega_\nu$ qui appartiennent à une composante rélativement compacte de $x - \Gamma_+^* \cap (\Omega_\nu \setminus \{x_n = -\nu\})$. Si l'on suppose d'ailleurs que Ω ne coupe pas les cônes $x + \Gamma_+^*$, $x \in \partial\Omega$, il s'en suit que $\Omega'_\nu \uparrow \Omega$ pour $\nu \uparrow \infty$, et donc qu'il existe $\lim\limits_{\nu} [u_\nu] = [u]$ in $\Gamma^{(d)} / \gamma^{(d')}(\Omega)$, $\sigma < d' < d$. Dans ce cas là, et pour $\sigma = 1$, Ω est P–convexe (et bien plus il en résulte $P(D)\,\Gamma^{(1)}(\Omega) = \Gamma^{(1)}(\Omega)$ [4]) et par conséquent on peut choisir un représentant $u \in \Gamma^{(d)}(\Omega)$ qui est une « vraie » solution de l'équation $P(D)\,u = f$. (Quand $\sigma \neq 1$, la P–convexité, qui est bien sûr toujours nécessaire, doit être supposée en plus). On gagne en généralité si l'on suppose l'existence de plusieurs cônes de propagation Γ_j^*, au lieu de deux $\Gamma_\pm^*$, tels que $\forall \Gamma_j^* \, \exists \Gamma_{j'}^* : \Gamma_j^* \cap \Gamma_{j'}^* = \{0\}$. En utilisant ensuite les proprietés de décomposition des fonctions de classe $\Gamma^{(d)}$, on conclut

THÉORÈME 2. *Soit* P *(ρ–)hyperbolique–elliptique avec une famille* $\{\Gamma_j^*\}$ *de cônes de propagation du type décrit. Si* Ω *est un ouvert qui satisfait la condition*:

$$\forall x \in \partial\Omega,\ \exists \Gamma_j^* \ \textit{tel que}\ x + \Gamma_j^* \cap \Omega = \varnothing,$$

il en suit $P(D)\,\Gamma^{(d)}(\Omega) = \Gamma^{(d)}(\Omega)$ *si* $1 \leq d < \rho$.

On en conclut de même, sous l'hypothèse additionnelle que Ω *soit* P*–convexe, lorsque* P *est (ρ–)hyperbolique–(σ–)hypoelliptique et* d *est dans l'intervalle* $\sigma < d < \rho$.

Remarques. Dans le cas $n = 2$ faisons varier η dans une composante connexe Γ de $S^1 \setminus \{P_m(\eta) = 0\}$, prenons $w \perp \eta$ et considérons les développements des zéros $t(s)$ de $P(sw + t\eta) = 0$, au voisinage de $s = \infty$, en séries irréductibles de Puiseux:

$$t(s) = \sum_{k=-\infty}^{q} a_k(\eta)\,(s^{1/q})^k = a_q(\eta)\, s\,(1 + o(1)),\ s \to \infty,$$

(dans lesquelles les coefficients dépendent analytiquement de η). Premièrement $\operatorname{Im} a_q(\eta)$ ne s'annulle jamais s'il n'est pas identiquement nul et donc $|\operatorname{Im} t(s)| > c_2 |s|\ \forall \eta \in \Gamma' \Subset \Gamma$ s'il n'est pas $< c_1 |s^{(q-1)/q}$ (en fait $< c_1$ quand $P \prec P_m$). Au cas où $\operatorname{Im} a_q(\eta) = 0$, si l'on garde η loin de l'ensemble (discret) des zéros des fonctions $\operatorname{Im} a_k(\eta)\,(\pm 1^{1/q})^k$, $0 < k < q$, qui ne sont pas identiquement nulles, l'ordre d'infini de tout $\operatorname{Im} t(s)$, par $s \to +\infty$ et $s \to -\infty$, resulte constant $\left(= \dfrac{k}{q} \text{ pour quelque } 0 \leq k < q \right)$. Compte tenu de [2] quand d est un tel ordre d'infini, on conclut enfin

COROLLAIRE 3. *Pour tout opérateur* $P(D)$ *sur* $\mathbf{R}^2$ *et pour tout* $d \geq 1$ *on a* $P(D)\,\Gamma^{(d)}(\mathbf{R}^2) = \Gamma^{(d)}(\mathbf{R}^2)$.

En outre lorsque d appartient à l'intervalle $1 \leq d < \dfrac{p}{p-1}$ (*à la demi droite* $d \geq 1$ *si* $P \prec P_m$) *on a* $P(D)\,\Gamma^{(d)}(\Omega) = \Gamma^{(d)}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, *si et seulement si toute droite caractéristique de* $P(D)$ *coupe* Ω *en un segment* (*connexe*).

Cette note répond à des questions posées par le Professeur Cattabriga qui les avait déjà résolues dans le cas où $d \in Q$ et $\Omega = \mathbf{R}^n$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. CATTABRIGA (1981) – « Astérisque », *89-90*, 129-151.

[2] L. CATTABRIGA (1982) – Atti del Convegno: « Linear partial and pseudo-differential operators », Torino 30 Sett.–2 Ott. 1982.

[3] T. SHIROTA (1982) – « Proc. Japan Acad. », *38*, 587-590.

[4] G. ZAMPIERI (1982) – Atti del Convegno: « Linear partial and pseudo-differential operators », Torino 30 Sett.-2 Ott. 1982.