Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Enzo Martinelli

Qualche riflessione sulla rappresentazione integrale di massima dimensione per le funzioni di più variabili complesse.

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **76** (1984), n.4, p. 235–242.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1984_8_76_4_235_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1984.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 aprile 1984

Presiede il Presidente della Classe GIUSEPPE MONTALENTI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Funzioni di variabile complessa. — *Qualche riflessione sulla rappresentazione integrale di massima dimensione per le funzioni di più variabili complesse.* Nota (*) del Socio ENZO MARTINELLI.

SUMMARY. — Another aspect of the representation formula is given.

1. Recentemente mi è occorso di tornare a riflettere sulla formula di rappresentazione integrale $(2m-1)$ dimensionale per le funzioni olomorfe in domini di $\mathbf{C}^m \equiv \mathbf{R}^{2m}$ euclideo (1). Benché tale formula sia stata molto usata e anche scritta in forme diverse (2), non mi sembra che ne sia stata considerata la particolare espressione che qui presento (cfr. (2.5) al n. 2), e che, come accennerò al n. 3, può talora riuscire di qualche utilità.

Scriverò $z=(z_1,\ldots,z_m)$, $z_\alpha=x_\alpha+iy_\alpha=x_\alpha+ix_{\alpha+m}$, $\alpha=1,\ldots,m$, e considererò in $\mathbf{R}^{2m}(x_1,\ldots,x_{2m})$ l'orientazione definita dalle coordinate. Per gli scopi in vista, mi occorre assumere come $(2m-1)$–ciclo d'integrazione una ipersuperficie connessa $\Phi\subset\mathbf{R}^{2m}$, di classe $\mathbf{C}^1$, compatta, orientata come contorno del dominio limitato D da essa racchiuso: $\Phi=\partial \mathrm{D}$. Supposta $f(z)$ olomorfa in $\overline{\mathrm{D}}=\mathrm{D}\cup\Phi$, la formula di rappresentazione si scrive:

$$(1.1)\qquad f(z^0)=\int_\Phi f(z)\,\omega(z,z^0),$$

(*) Presentata nella seduta del 14 aprile 1984.

(1) Formula da me stabilita ben 46 anni fa in [4].

(2) Cfr. [5], p. 166, Osservazione, e, per altra notevole espressione, GRIFFITHS-HARRIS [14], p. 372.

ove $z^0 \in D$, $z \in \Phi$, e $\omega(z, z^0)$ è una forma esterna nei differenziali dz_α , $d\bar{z}_\alpha$ di tipo $(m, m-1)$.

L'espressione ordinaria del nucleo è

$$(1.2) \qquad \omega(z, z^0) = \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m} r^{-2m} \sum_{1}^{m}{}_\alpha (-1)^{(\alpha-1)} (\bar{z}_\alpha - \bar{z}_\alpha^0) \, d(z_1, \ldots, z_m) \wedge$$

$$\wedge \, d(\bar{z}_1, \ldots \hat{\alpha} \ldots, \bar{z}_m),$$

dove $r = |z - z^0| = \text{dist}(z, z^0)$ e i prodotti esterni sono denotati in forma parzialmente abbreviata.

Mi occorre anche ricordare l'altra espressione del nucleo stabilita in [5]:

$$(1.3) \qquad \omega(z, z^0) = \frac{(m-2)!}{4\pi^m} \left(\frac{d}{dn} + i\frac{d}{ds}\right) r^{2-2m} \, d\Phi ,$$

dove $d\Phi$ denota l'elemento del $(2m-1)$–volume di Φ , e $\frac{d}{ds}$, $\frac{d}{dn}$ denotano derivate direzionali secondo la coppia di direzioni ortogonali (s, n) (dette « coniugate » nel lavoro citato), definite da vettori unitari $\vec{s}$, $\vec{n}$ individuati in ogni punto $z \in \Phi$ come subito preciserò.

Una coppia « coniugata » di vettori unitari $(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$ uscenti da un punto $z \in \mathbf{R}^{2m}$ può, con linguaggio moderno, definirsi semplicemente con la condizione: $\vec{\mu} = i\vec{\lambda}$, ovvero in termini di componenti:

$$(1.4) \qquad \lambda^\alpha = \mu^{\alpha+m} \quad , \quad \lambda^{\alpha+m} = -\mu^\alpha ,$$

intendendo le relazioni scritte rispettivamente negli spazi vettoriali $\mathbf{C}^m$, $\mathbf{R}^{2m}$, centrati in z (3)

La coppia $(\vec{s}, \vec{n})$ è allora individuata assumendo $\vec{n}$ normale interno a Φ in z (cioè $\vec{n}$ diretto verso D).

Per $m = 1$ nella (1.3) r^{2-2m} va sostituito con $\log r$ e $(m-2)!$ con -2. Ciò conduce ad una forma conosciuta della formula di Cauchy (4).

(3) Geometricamente $(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$ si caratterizza per l'appartenenza ad uno stesso piano π immagine di una retta di $\mathbf{C}^m$, l'ortogonalità, e la individuazione della orientazione canonica di π. Se $f = u + iv$ le condizioni di Cauchy-Riemann in un punto $z \in \mathbf{R}^{2m}$ possono esprimersi con la $\frac{du}{d\lambda} = \frac{dv}{d\mu}$ per ogni coppia « coniugata » in z.

(4) Cfr. Picard [1], p. 115.

L'idea direttrice di quanto qui svilupperò è la seguente. Per $m=1$, posto $z - z^0 = re^{i\theta}$, il nucleo di Cauchy assume il ben noto aspetto, spesso comodo,

$$\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\mathrm{d}r}{r}\,. \tag{1.5}$$

È possibile ottenere un'espressione analoga per m qualunque?

2. Poiché in [5] la (1.3), benché scritta in generale, è esplicitamente dimostrata soltanto per $m=2$ (caso interessante le funzioni biarmoniche ivi considerate), alla fine della presente Nota (n. 4), darò succintamente la dimostrazione della (1.3), e mi richiamerò fin d'ora a talune relazioni del successivo n. 4.

Sia $S_{2m-1}(z^0, 1)$ la sfera unitaria di centro z^0 e $\mathrm{d}\Theta$ il suo elemento di volume. Denotato con $\vec{r}$ il versore di $\overrightarrow{z^0 z}$, tra gli elementi di volume $\mathrm{d}\Theta$, $\mathrm{d}\Phi$ che si corrispondono per proiezione da z^0 si ha:

$$r^{2m-1}\,\mathrm{d}\Theta = -\cos\widehat{\vec{r}\,\vec{n}}\,\mathrm{d}\Phi \tag{2.1}$$

dove il segno meno dipende dalla scelta fatta dei versi di $\vec{n}$ e $\vec{r}$.

Se $z \in \Phi$ si proietta da z^0 in $z' \in S(z^0, 1)$, Φ può pensarsi rappresentata (localmente) in coordinate polari (z', r). Si ha allora su Φ, come è ben noto,

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}n} = \frac{1}{2r}\sum_1^{2m}{}_k \frac{\partial r^2}{\partial x_k}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}n} = \sum_1^{2m}{}_k \frac{x_k - x_k^0}{r}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}n} = \cos\widehat{\vec{r}\,\vec{n}}\,. \tag{2.2}$$

Tenuto conto di (2.1), (2.2) risulta intanto, per la componente reale di (1.3):

$$\mathrm{Re}\,(\omega) = \frac{(m-1)!}{2\,\pi^m}\,\mathrm{d}\Theta \;{}^{(5)}\,. \tag{2.3}$$

Passiamo a considerare la componente immaginaria $\mathrm{Im}\,(\omega)$. Analogamente alla (2.2) si ha

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = \sum_1^{2m}{}_k \frac{\partial r}{\partial x_k}\cos\widehat{x_k s} \quad {}^{(6)}$$

e, tenuto conto delle (4.3) (del n. 4),

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}\Phi = (-1)^{m-1}\sum_1^{m}{}_\alpha\left(\frac{\partial r}{\partial x_\alpha}\,\mathrm{d}x_\alpha + \frac{\partial r}{\partial y_\alpha}\,\mathrm{d}y_\alpha\right)\wedge\,\mathrm{d}(x_1,\ldots\hat{\alpha},\ldots x_m)\wedge$$
$$\wedge\,\mathrm{d}(y_1,\ldots\hat{\alpha}\ldots,y_m)\,.$$

(5) Se $p: z \to z'$ è la proiezione indicata, $\mathrm{d}\Theta$ dovrebbe propriamente denotarsi $p^*\mathrm{d}\Theta$.

(6) Per semplicità sopprimiamo qui ed oltre la freccia sui vettori $\vec{s}$, $\vec{n}$.

Dalla (1.3) abbiamo dunque:

$$(2.4)\qquad \operatorname{Im}(\omega) = \frac{(m-1)!}{2\,\pi^m}(-1)^m r^{1-2m}\, dr \wedge \sum_1^m{}_\alpha\, d(x_1, \ldots \hat{\alpha} \ldots, x_m) \wedge$$

$$\wedge\, d(y_1, \ldots \hat{\alpha} \ldots, y_m)\,.$$

Se si introduce la forma di Kähler di $\mathbf{C}^m : \mathscr{H} = \frac{i}{2}\sum_1^m{}_\alpha\, d(z_\alpha, \bar{z}_\alpha)$ e la sua potenza esterna $(m-1)$-ma:

$$\mathscr{H}^{m-1} = \left(\frac{i}{2}\right)^{m-1}(m-1)!\sum_1^m{}_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_{m-1}} d(z_{\alpha_1}, \bar{z}_{\alpha_1}) \wedge \ldots \wedge d(z_{\alpha_{m-1}}, \bar{z}_{\alpha_{m-1}}) =$$

$$= (m-1)!\,(-1)^{1/2(m-1)(m-2)}\sum_1^m{}_\alpha\, d(x_1, \ldots \hat{\alpha} \ldots, x_m) \wedge d(y_1, \ldots \hat{\alpha} \ldots, y_m)\,,$$

la (1.3) si può scrivere in conclusione:

$$(2.5)\qquad \boxed{\omega(z, z^0) = \frac{(m-1)!}{2\,\pi^m}\, d\Theta + \frac{(-1)^{1/2\,m(m-1)}}{2\,\pi^m\, i}\,\frac{dr}{r^{2m-1}} \wedge \mathscr{H}^{m-1}.}$$

La (2.5) chiaramente generalizza la (1.5).

3. Consideriamo in particolare *l'integrale del solo nucleo* (2.5) *su* Φ. Si tenga conto che – come è ben noto e come si verifica subito sulla (1.2) – $\omega(z, z^0)$ è una forma chiusa in $\mathbf{R}^{2m}\setminus\{z^0\}$, e quindi lo stesso è per $\operatorname{Re}(\omega)$, $\operatorname{Im}(\omega)$.

1) *Sia* $z^0 \in D$ (come finora si è supposto). Si ha allora:

$$(3.1)\qquad \int_\Phi \operatorname{Re}(\omega) = 1 \quad , \quad \int_\Phi \operatorname{Im}(\omega) = 0\,.$$

La prima delle (3.1) è immediata, perché Φ è omologa in $\bar{D}\setminus\{z^0\}$ ad una sfera $S_{2m-1}(z^0, \varepsilon)$ di raggio ε abbastanza piccolo, e l'integrale su questa di $d\Theta$ uguaglia il volume della sfera unitaria: $2\,\pi^m/(m-1)!$. La seconda delle (3.1) è anche immediata, in quanto $\operatorname{Im}(\omega)$ è un differenziale esatto su Φ, come appare, per $m > 1$, scrivendo $r^{1-2m}\, dr = dr^{2-2m}/_{2-2m}$ (tenuto conto che ovviamente $d\mathscr{H} = 0$). Per $m = 1$ è lo stesso con l'intervento di $\log r$.

2) *Sia* $z^0 \in \mathbf{R}^{2m} \setminus \overline{D}$. Risulta:

$$\int_\Phi \mathrm{Re}\,(\omega) = 0 \quad , \quad \int_\Phi \mathrm{Im}\,(\omega) = 0 . \tag{3.2}$$

La prima perché Φ è ora omologa a zero in $\mathbf{R}^{2m} \setminus \{z^0\}$; la seconda per la stessa ragione già addotta.

Le osservazioni 1), 2) non fanno che illustrare ciò che è ben noto applicando la formula integrale (1.1) alla funzione $f(z) \equiv 1$, e tenendo conto del coefficiente di allacciamento: $\mathrm{All}\,(z^0, \Phi)$ (7).

3) *Sia* $z^0 \in \Phi$. Si ha in questo caso:

$$\int_\Phi \mathrm{Re}\,(\omega) = \frac{1}{2} \quad , \quad \mathrm{V.P.} \int_\Phi \mathrm{Im}\,(\omega) = 0 . \tag{3.3}$$

La prima (che è geometricamente immediata) si prova subito così. Siano $B(z^0, \varepsilon)$ e $S(z^0, \varepsilon)$ la boccia e la sfera di centro z^0 e raggio ε abbastanza piccolo. Si considerino le ipersuperficie: $\Phi'_\varepsilon = \Phi \setminus B(z^0, \varepsilon)$, $S'_\varepsilon = S(z^0, \varepsilon) \cap \overline{D}$. $\Phi'_\varepsilon - S'_\varepsilon$ è allora un $(2m-1)$–ciclo orientato omologo a zero in $\mathbf{R}^{2m} \setminus \{z^0\}$ in quanto contorna $D \setminus \overline{B}(z^0, \varepsilon)$. Quindi l'integrale di $\mathrm{Re}\,(\omega)$ su Φ'_ε uguaglia l'integrale su S'_ε. Siccome, per $\varepsilon \to 0$, la rappresentazione di S'_ε su $S(z^0, 1)$ invade una semi–sfera, l'integrale su Φ converge a $1/2$.

L'integrale su Φ di $\mathrm{Im}\,(\omega)$ non è invece, ovviamente, convergente. Tuttavia se per esso si considera il valore principale (V.P., del tipo Cauchy) si ottiene zero. Infatti si ha, per $m > 1$, c denotando una costante,

$$\int_{\Phi'_\varepsilon} \mathrm{Im}\,(\omega) = c \int_{\partial\Phi'_\varepsilon = \partial S'_\varepsilon} \frac{\varepsilon^{2-2m}}{2-2m} \mathscr{H}^{m-1} = \int_{S'_\varepsilon} \mathrm{Im}\,(\omega) = 0 ,$$

dove l'ultimo integrale è nullo perché $dr = 0$ su S'_ε. Per $m = 1$ $\partial\Phi'_\varepsilon = \partial S'_\varepsilon$ è una coppia di punti $z^2 - z^1$ e risulta:

$$\int_{\Phi'_\varepsilon} \frac{dr}{r} = \log r(z^2) - \log r(z^1) = \log \varepsilon - \log \varepsilon = 0 .$$

Ne segue che anche $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\Phi'_\varepsilon} \mathrm{Im}\,(\omega)$ è zero: cioè la seconda delle (3.3).

(7) Cfr. [6], [8].

(8) Cfr. F. HARVEY-H. LAWSON, Jr. [13], Appendix B.

Le considerazioni di cui in 3) non sono che una illustrazione di un lemma di Harvey–Lawson (8) il quale afferma che il valore principale dell'integrale dell'intero nucleo $\omega(z, z^0)$ su Φ vale $1/2$. Il lemma è posto a base della generalizzazione per $m > 1$, data dagli stessi Autori, delle classiche formule di Plemelj per le funzioni di una variabile complessa (9).

Le formule di Plemelj–Harvey–Lawson esprimono il salto del valore del secondo membro di (1.1), anche nell'ipotesi che f sia definita soltanto su Φ e ivi di classe C^1 (inoltre Φ può anche essere dotata di bordo). Tali formule risultano anche legate al teorema della traccia di Severi–Fichera che assicura l'esistenza di una funzione olomorfa in D e continua su $\bar{D} = D \cup \Phi$ nella sola ipotesi che f appartenga a $C^1(\Phi)$ e soddisfi su Φ la condizione di Severi: $df \wedge d(z_1, \ldots, z_m) = 0$. Nel lavoro citato Harvey–Lawson danno, fra l'altro, unaim portante e profonda generalizzazione del teorema anche al caso che l'ambiente $\mathbf{C}^m$ sia sostituito da una varietà complessa (10).

4. *Dimostrazione della* (1.3). Si osservi preliminarmente che, avendo supposto $\vec{n}$ normale interno a Φ in z, l'orientazione positiva di $\Phi = \partial D$ può assegnarsi con una $(2m-1)$–pla di vettori ortogonali $(\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{2m})$ tangenti a Φ in z, tale che $(-\vec{n}, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m)$ sia congruente direttamente alla $2m$–pla di versori delle cooidinate di $\mathbf{R}^{2m}(x_1, \ldots, x_{2m})$. Si ha allora su Φ: $d(x_2, \ldots, x_{2m}) = -\cos \widehat{x_1 n}\, d\Phi$, e quindi (permutando gli assi così: $x_k, x_1, \ldots \hat{k} \ldots, x_{2m}$), più in generale:

$$d(x_1, \ldots \hat{k} \ldots, x_{2m}) = (-1)^k \cos \widehat{x_k n}\, d\Phi . \tag{4.1}$$

Ciò posto, la (1.2) può scriversi (assumendo per semplicità $z^0 = 0$):

$$\omega = \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m} r^{-2m} (-2i)^{m-1} \sum_{1}^{m}{}_{\alpha} [(x_\alpha\, dx_\alpha + y_\alpha\, dy_\alpha) - i(y_\alpha\, dx_\alpha - x_\alpha\, dy_\alpha)] \wedge$$
$$\wedge\, d(x_1, \ldots \hat{\alpha} \ldots, x_m) \wedge d(y_1, \ldots \hat{\alpha} \ldots, y_m) .$$

(9) Cfr. J. Plemelj [2]. Tali formule, poco note per lungo tempo, sono state poste a fondamento (con perfezionamenti, sempre per $m = 1$) del trattato di N.I. Muskehlishvili [9], cap. 2.

(10) Cfr. F. Harvey-H. Lawson, Jr. [13], § 5. Mi si permetta di osservare che il teorema originario della traccia non è attribuibile a Bochner [7], perché in tale lavoro si assume f definita in un intorno di Φ, e non soltanto su Φ. La prima dimostrazione (nell'ipotesi di analiticità reale di Φ e di f su Φ) è in Severi [3] e, nell'ipotesi $f \in C^1(\Phi)$ (o più generale), in G. Fichera [10]. Nell'ipotesi Φ di classe C^1 e $f \in C^1(\Phi)$, la prima dimostrazione diretta (indipendente da altri teoremi esistenziali) sembra essere in [11]. Per altre notizie storiche cfr. anche [12].

Le (1.4), in termini di coseni direttori, equivalgono alle:

$$\cos \widehat{x_\alpha s} = \cos \widehat{y_\alpha n} \quad , \quad \cos \widehat{y_\alpha s} = - \cos \widehat{x_\alpha n} \, , \tag{4.2}$$

quindi le (4.1) danno:

$$\left\{ \begin{aligned} & dx_\alpha \wedge d(x_1 \ldots \hat{\alpha} \ldots , x_m) \wedge d(y_1 , \ldots \hat{\alpha} \ldots , y_m) = \\ & = (-1)^{m-1} \cos \widehat{y_\alpha n} \, d\Phi = (-1)^{m-1} \cos \widehat{x_\alpha s} \, d\Phi \\ & dy_\alpha \wedge d(x_1 , \ldots \hat{\alpha} \ldots , x_m) \wedge d(y_1 \ldots \hat{\alpha} \ldots , y_m) = \\ & = (-1)^m \cos \widehat{x_\alpha n} \, d\Phi = (-1)^{m-1} \cos \widehat{y_\alpha s} \, d\Phi \, . \end{aligned} \right. \tag{4.3}$$

Usufruendo delle precedenti si ottiene:

$$\omega = \frac{(m-1)!}{2\pi^m i} r^{-2m} \sum_1^m{}_\alpha \left[(x_\alpha \cos \widehat{x_\alpha s} + y_\alpha \cos \widehat{y_\alpha s}) - i (x_\alpha \cos \widehat{x_\alpha n} + \right.$$
$$\left. + y_\alpha \cos \widehat{y_\alpha n}) \right] d\Phi \, .$$

Da quest'ultima, considerando le derivate direzionali rispetto al vettore unitario $\vec{t} = \vec{s} , \vec{n}$

$$\frac{d}{dt} r^{2-2m} = (1-m) r^{-2m} \frac{dr^2}{dt} = -2(m-1) r^{-2m} \sum_1^m{}_\alpha (x_\alpha \cos \widehat{x_\alpha t} + y_\alpha \cos \widehat{y_\alpha t}) \, ,$$

si ricava senz'altro la (1.3).

BIBLIOGRAFIA

[1] E. PICARD (1905) – *Traité d'analyse*, II, Gauthier-Villars, Paris.

[2] J. PLEMELJ (1908) – *Ein Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend*, « Monatshefte f. Math. u. Phys. », *19*, 205-210.

[3] F. SEVERI (1931) – *Risoluzione generale del problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche*, « Rend. Acc. Lincei », *13*, 795-804.

[4] E. MARTINELLI (1938) – *Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di più variabili complesse*, « Memorie Acc. d'Italia », *9*, 269-283.

[5] E. MARTINELLI (1941) – *Studio di alcune questioni della teoria delle funzioni biarmoniche e delle funzioni analitiche di due variabili complesse coll'ausilio del calcolo differenziale assoluto*, « Memorie Acc. d'Italia », *12*, 143-167.

[6] E. MARTINELLI (1942-43) – *Sopra una dimostrazione di R. Fueter per un teorema di Hartogs*, « Comm. Math. Helvetici », *15*, 340-349.

[7] S. BOCHNER (1943) – *Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula*, « Annals of Math. », *44*, 652-673.

[8] E. Martinelli (1953) – *Sur l'extension des théorèmes de Cauchy aux fonctions de plusieurs variables complexes*, Colloque sur les fonctions de plus. var. (Centre Belge Rech. Math.), 109-124.

[9] N.I. Muskhelishvili (1953) – *Singular integral equations*, Nordhoff N.V., Groningen, (trad. dall'originale, 1944-46).

[10] G. Fichera (1957) – *Caratterizzazione della traccia, sulla frontiera di un campo, di una funzione analitica di più variabili complesse*, « Rend. Acc. Lincei », *22*, 706-715.

[11] E. Martinelli (1961) – *Sulla determinazione di una funzione analitica di più variabili complesse in un campo, assegnatane la traccia sulla frontiera*, « Annali di Mat. pura e appl. », *55*, 191-202.

[12] E. Martinelli (1961) – *Sopra un teorema di F. Severi nella teoria delle funzioni analitiche di più variabili complesse*, « Rend. di Matematica » (Roma), *20*, 81-96.

[13] F.R. Harvey – H.B. Lawson, Jr. (1975) – *On boundaries of complex analytic varieties*, I, « Annals of Math. », *102*, 223-290.

[14] P. Griffiths – J. Harris (1978) – *Principles of algebraic geometry*, J. Wiley and Sons, New York.